

Е. И. ВАСИЛЬЕВ, В. М. ЛОПУХИН

## К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В КВАДРУПОЛЬНОМ УСИЛИТЕЛЕ

Проинтегрированы уравнения движения электронов в квадрупольном усилителе. Найдены выражения для амплитуды наведенного тока и времени его установления.

Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных плоских конденсаторов и расположенного между ними квадрупольного конденсатора, находящуюся в продольном магнитном поле. Размеры системы показаны на рис. 1.

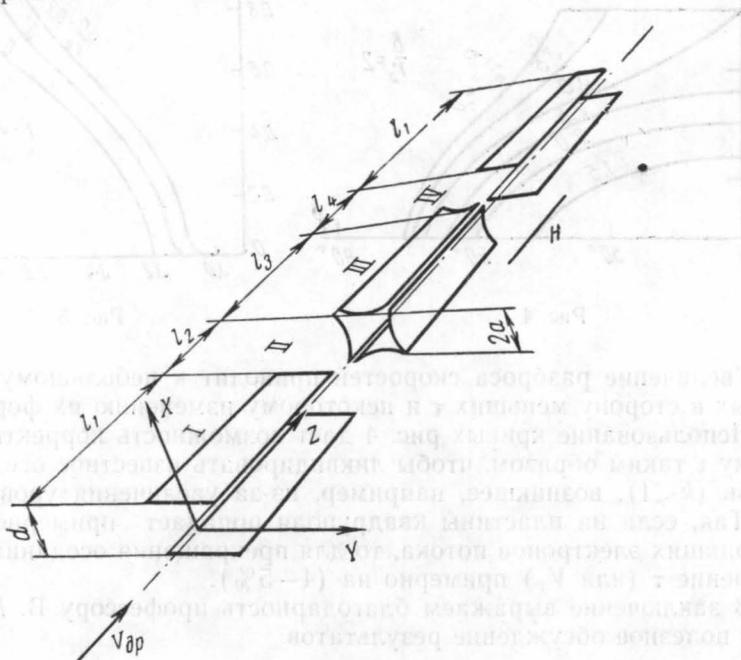


Рис. 1

Вдоль оси системы (в направлении  $z$ ) движется поток электронов со скоростью  $v_{др}$ . В момент времени  $t=0$  на пластины входного конденсатора подается сигнал  $V_s = V_{s0} \cos(\omega t + \psi_{s0})$ , где  $V_{s0}$  и  $\psi_{s0}$  — амплитуда и начальная фаза сигнала. Частота сигнала  $\omega$  близка к циклотронной частоте  $\omega_c = \frac{eH}{m}$ . Потенциал поля накачки на частоте  $\omega_p = 2\omega_c$  пропорционален выражению  $V_p(x^2 - y^2) \cos(\omega_p t + 2\psi_{p0})$ , где  $V_p$  — амплитуда накачки,  $2\psi_{p0}$  — начальная фаза накачки.

Начиная с некоторого момента, на пластинах выходного конденсатора будет наводиться ток. В настоящем расчете исследуются изменения амплитуды и фазы наведенного тока. Величина наведенного тока будет определяться средним значением компонента скорости  $v_x$ .

Рассмотрим движение отдельного электрона вдоль изучаемой системы.

Движение электрона во входном устройстве описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} &= \frac{e}{m} \frac{V_{s0}}{d} \cos(\omega t + \psi_s), \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\frac{e}{m}$  — отношение заряда электрона к его массе,  $d$  — ширина входного конденсатора,  $\psi_s$  — фаза поля сигнала в момент влета электрона.

Решая систему (1) методом, предложенным в [1], для скорости электрона на выходе из входного конденсатора получим

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{0x} \cos \omega_c t_1 + v_{0y} \sin \omega_c t_1 + u \cos(\omega_c t_1 + \psi_s'), \\ v_{1y} &= -v_{0x} \sin \omega_c t_1 + v_{0y} \cos \omega_c t_1 - u \sin(\omega_c t_1 + \psi_s'), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_{s0}}{d} t_1 \frac{\sin v}{v}, \quad v = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right), \\ \psi_s' &= \psi_{s0} + v. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $t_1$  — время движения электрона в поле входного конденсатора,  $v_{0x} = v_0 \cos \varphi_0$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \varphi_0$  — компоненты скорости на входе, а  $v_{1x}$ ,  $v_{1y}$  — компоненты скорости на выходе из первого конденсатора.

Из (2) получаются выражения для изменения компонентов скорости в пространстве дрейфа (области II, IV на рис. 1), если положить  $u = 0$ :

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_{1x} \cos \omega_c t_2 + v_{1y} \sin \omega_c t_2, \\ v_{2y} &= -v_{1x} \sin \omega_c t_2 + v_{1y} \cos \omega_c t_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t_2$  и  $t_4$  — соответственно время движения в областях II и IV.

Движение электрона в пространстве квадруполя (III) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} &= -\frac{2V_p}{a^2} x \cos(\omega_p t + 2\psi_p), \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} &= \frac{2V_p}{a^2} y \cos(\omega_p t + 2\psi_p), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $2\psi_p$  — фаза поля накачки в момент влета электрона в квадруполь,  $a$  — параметр, характеризующий размеры квадруполя.

Решая систему (4), получим [2]

$$\begin{aligned} v_{3x} &= [\sin(\omega_c t_3 + 2\psi_p) \operatorname{sh} \tau + \cos \omega_c t_3 \operatorname{ch} \tau] v_{2x} + \\ &+ [\cos(\omega_c t_3 + 2\psi_p) \operatorname{sh} \tau + \sin \omega_c t_3 \operatorname{ch} \tau] v_{2y}, \\ v_{3y} &= [\cos(\omega_c t_3 + \psi_p) \operatorname{sh} \tau - \sin \omega_c t_3 \operatorname{ch} \tau] v_{2x} - \\ &- [\sin(\omega_c t_3 + 2\psi_p) \operatorname{sh} \tau - \cos \omega_c t_3 \operatorname{ch} \tau] v_{2y}, \end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{V_p}{a^2 \omega_c} t_3, \quad (6)$$

$t_3$  — время движения электрона в пространстве квадруполя.

Используя (2), (3), (5), найдем связь между компонентами скорости на входе и на выходе всей системы

$$v_{4x} = [-\sin \theta' \operatorname{sh} \tau + \cos \theta \operatorname{ch} \tau] v_{0x} + [\cos \theta' \operatorname{sh} \tau + \sin \theta \operatorname{ch} \tau] v_{0y} + \\ + [-\sin (\theta' + \psi'_s) \operatorname{sh} \tau + \cos (\theta + \psi'_s) \operatorname{ch} \tau] u, \\ v_{4y} = [\cos \theta' \operatorname{sh} \tau - \sin \theta \operatorname{ch} \tau] v_{0x} + [\sin \theta' \operatorname{sh} \tau + \cos \theta \operatorname{ch} \tau] v_{0y} + \\ + [\cos (\theta' + \psi'_s) \operatorname{sh} \tau - \sin (\theta + \psi'_s) \operatorname{ch} \tau] u,$$

где

$$\theta = \omega (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = \omega T_0, \\ \theta' = \omega (t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - 2\psi_p). \quad (7)$$

Полагая, что  $v_{4x} = v \cos \varphi$ ,  $v_{4y} = v \sin \varphi$ , имеем

$$v_{0x} = v [\operatorname{ch} \tau \cos (\varphi + \theta) - \operatorname{sh} \tau \sin (\varphi - \theta')] - u \cos \psi'_s, \\ v_{0y} = v [\operatorname{ch} \tau \sin (\varphi + \theta) - \operatorname{sh} \tau \cos (\varphi - \theta')] + u \sin \psi'_s.$$

Откуда

$$v_0^2 = a^2 v^2 + 2bv u + u^2, \quad (8)$$

где

$$a^2 = e^{2\tau} \cos^2 (\varphi + \gamma) + e^{-2\tau} \sin^2 (\varphi + \gamma), \\ b = e^\tau \cos (\varphi + \gamma) \sin \delta + e^{-\tau} \sin (\varphi + \gamma) \cos \delta, \quad (9)$$

$$\gamma = \omega_c (t_3 + t_4) + \psi_p + \frac{\pi}{4},$$

$$\delta = \omega_c (t_1 + t_2) - \psi_p + \psi'_s + \frac{\pi}{4}.$$

Допустим, что на входе в систему все электроны имеют одинаковые по величине шумовые скорости  $\bar{v}_0$ , а все направления этих скоростей равновероятны. Если ток пучка  $I$ , а сечение  $s$ , в слое пучка длиной  $dl$  будет находиться следующее число электронов:

$$\Delta N = \frac{I}{ev_{\text{лр}}} dl.$$

С другой стороны, так как функция распределения электронов по скорости на входе имеет вид

$$f_0(v_0, \varphi_0) = c \delta(v_0 - \bar{v}),$$

можно записать

$$\Delta N = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty c \delta(v_0 - \bar{v}) v_0 dv_0 d\varphi_0,$$

где

$$c = \frac{\Delta N}{2\pi v_0}.$$

Переходя от переменных  $v_0, \varphi_0$  к переменным  $v, \varphi$ , с помощью (8) получим распределение электронов по скоростям на выходе системы. При этом функция распределения будет иметь вид

$$f(v, \varphi) = c \delta(\sqrt{a^2 v^2 - 2bv u + u^2} - \bar{v}_0^2). \quad (10)$$

Используя формулу

$$\delta(\Phi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x-x_s)}{|\Phi'(x_s)|},$$

где  $x_s$  — простые корни уравнения  $\Phi(x) = 0$  в рассматриваемом интервале, преобразуем (10)

$$f(v, \varphi) = c \frac{\bar{v}_0 \delta \left[ v - \left( \frac{bu}{a^2} + \sqrt{\left( \frac{bu}{a^2} \right)^2 - \frac{u^2 - v_0^2}{a^2}} \right)}{a^2 \sqrt{\left( \frac{bu}{a^2} \right)^2 - \frac{u^2 - v_0^2}{a^2}}}. \quad (11)$$

При выводе (11) предполагалось, что  $u < \bar{v}_0$ . При этом снова

$$\Delta N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(v, \varphi) v dv d\varphi.$$

Найдем среднюю величину проекции скорости электрона на ось  $x$

$$\overline{v \cos \varphi} = \frac{1}{\Delta N} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} v \cos \varphi f(v, \varphi) v dv d\varphi.$$

Используя (11) и проводя интегрирование, получим

$$\overline{v \cos \varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{bu}{a^4} \cos \varphi d\varphi = \frac{u}{2} (e^{-\tau} \sin \delta \cos \gamma + e^{\tau} \sin \gamma \cos \delta). \quad (12)$$

Это же выражение для  $v \cos \varphi$  получается, если предположить, что начальное распределение электронов по скоростям имеет вид

$$f(\varphi_0 v_0) = \begin{cases} c' & \bar{v}_{01} < v_0 < \bar{v}_{02} \\ 0 & v_0 < \bar{v}_{01}; v_0 > \bar{v}_{02}. \end{cases}$$

При этом

$$\Delta N = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\bar{v}_{01}}{v_0}}^{\frac{\bar{v}_{02}}{v_0}} c' v_0 dv_0 d\varphi_0 = c' (v_{01}^2 - v_{02}^2) \pi,$$

где

$$c' = \frac{I dl}{v_{др} \pi (v_{02}^2 - v_{01}^2)}.$$

Переходя к распределению на выходе, получим для пределов интегрирования по скоростям выражения

$$v_1 = \frac{ub}{a^2} + \sqrt{\left( \frac{ub}{a^2} \right)^2 - \frac{u^2 - \bar{v}_{01}^2}{a^2}},$$

$$v_2 = \frac{ub}{a^2} + \sqrt{\left( \frac{ub}{a^2} \right)^2 - \frac{u^2 - \bar{v}_{02}^2}{a^2}}.$$

И, следовательно,

$$v \cos \varphi = \frac{c'}{\Delta N} \int_0^{2\pi} \int_{v_1}^{v_2} v^2 \cos \varphi d\varphi dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ub}{a^4} \cos \varphi d\varphi.$$

В выражении (12)  $u$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  определяются формулами (3), (6), (8), (9).

Применим (12) к некоторому элементу пучка электронов  $\Delta l$ , находящемуся в момент  $t=0$  во входном конденсаторе на расстоянии, соответствующем времени  $t'$  от его конца. Этот элемент будет двигаться в поле входного конденсатора время  $t'$ . Время движения его в пространстве дрейфа  $t_2$ . В момент входа этих электронов в квадруполь фаза накачки будет равна

$$2\psi_p = 2[\omega(t' + t_2) + \psi_{p0}].$$

Время движения электронов в квадруполе  $t_3$ . Наведенный ток в выходном конденсаторе появится через время  $t_2 + t_3 + t_4$  после включения сигнала. (За это время к выходному конденсатору дойдут крайние (при  $t=0$ ) электроны входного конденсатора.) Через время  $\bar{t}$  после появления наведенного тока внутри выходного конденсатора будут находиться все электроны, которые при  $t=0$  находились на расстоянии  $l' < l = v_{др} t$  от конца входного резонатора. Время дрейфа после усиления  $t'_4$  для электронов с различным  $t'$  различно, так как  $t'_4 = t_4 + \bar{t} - t'$ . Используя (8) и (9), найдем, что

$$\gamma' = \omega \bar{t} + \gamma_0, \quad \gamma_0 = \omega \left( t_2 + t_3 + t_4 + \psi_{p0} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (13)$$

$$\delta' = \psi'_{s0} - \psi_{p0} + \frac{\pi}{4}, \quad \psi'_{s0} = \psi_{s0} + v.$$

В момент времени  $\bar{t}$  после появления наведенного тона величина его будет пропорциональна среднему значению поперечной скорости  $v_x$  всех электронов, находящихся в этот момент в выходном конденсаторе

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} v \cos \varphi dt' = \frac{A}{\bar{t}} \bar{t}^2 \sqrt{e^{-2\tau} \sin^2 \delta' + e^{2\tau} \cos^2 \delta} \cdot \sin(\omega_c \bar{t} + \chi_1),$$

где

$$A = \frac{1}{8} \frac{eV_{0s}}{md} \frac{\sin v}{v}, \quad \text{tg } \chi_1 = \frac{\text{tg } \gamma_0 e^\tau + \text{tg } \delta' e^{-\tau}}{e^\tau - \text{tg } \gamma_0 \text{tg } \delta' e^{-\tau}}. \quad (14)$$

Выражение (14) справедливо для  $\bar{t} < t_1$ .

Если  $\bar{t} > t_1$  (но  $2t_1 > \bar{t}$ ), то в выходном конденсаторе будет находиться только часть электронов, которые при  $t=0$  были во входном конденсаторе, так как некоторые из них уже выйдут из выходного конденсатора. При  $\bar{t} > t_1$  в выходной конденсатор начнут поступать электроны, которые при  $t=0$  находились еще вне входного устройства. Для них фаза сигнала при влете во входной конденсатор будет зависеть от их расстояния в момент  $t=0$  от входного конденсатора.

Для электронов, находящихся на расстоянии  $l = t' v_{др}$ , фаза сигнала в момент влета  $\varphi_s = \omega t' + \varphi_{s0}$ , фаза накачки в момент влета в квадруполь

$2\psi_p = 2\omega(t' + t_1 + t_2) + 2\psi_{p0}$ . Время движения, соответствующее различным частям системы  $t_1; t_2; t_3; t_4 + \bar{t} - t'$ . При этом

$$\gamma'' = \omega t + \gamma_1, \quad \gamma_1 = \omega T_0 + \psi_{p0} + \frac{\pi}{4}, \quad (15)$$

$$\delta'' = \psi'_{s0} - \psi_{p0} + \frac{\pi}{4} = \delta'.$$

Средняя поперечная скорость  $\bar{v}_x$  в этом случае будет равна

$$\bar{v}_x = \frac{2A}{t_1} \left[ \int_{\bar{t}-t_1}^{\bar{t}} (\overline{v \cos \varphi}) dt' + \int_0^{\bar{t}-t_1} (\overline{v \cos \varphi})_2 dt' \right].$$

В последнем выражении для вычисления  $(\overline{v \cos \varphi})_1$  и  $(\overline{v \cos \varphi})_2$  нужно определить  $\gamma$  и  $\delta$  соответственно по (13) и (15). При этом

$$\bar{v}_x = \frac{A}{t_1} \sqrt{e^{-2\tau} \sin^2 \delta + e^{2\tau} \cos^2 \delta'} \times \\ \times \sqrt{t_1^4 - 4 \sin^2 \left( \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right) (\bar{t} - t_1)^2 (t_1^2 - (\bar{t} - t_1)^2) \cdot \sin(\omega_c \bar{t} + \chi_0)}, \quad (16)$$

где

$$\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1 e^\tau + \operatorname{tg} \delta' e^{-\tau}}{e^\tau - \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta' e^{-\tau}}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \frac{[t_1^2 - (\bar{t} - t_1)^2] \sin \chi_1 + (\bar{t} - t_1)^2 \sin \chi_2}{[t_1^2 - (t' - t_1)^2] \cos \chi_1 + (\bar{t} - t_1)^2 \cos \chi_2}.$$

Выражение (16) справедливо для  $\bar{t} \leq 2t_1$ .

При  $\bar{t} > 2t_1$  в выходном конденсаторе находятся электроны, которые проходят весь входной конденсатор. В этом случае

$$\bar{v}_x = \frac{A}{t_1} t_1^2 \sqrt{e^{-2\tau} \sin^2 \delta' + e^{2\tau} \cos^2 \delta'} \sin(\omega_i \bar{t} + \chi_2).$$

Для определения наведенного тока воспользуемся формулой

$$I_m = \frac{q\bar{v}}{d}, \quad (18)$$

где  $q = It_1$  — объемный заряд, находящийся между пластинами выходного конденсатора. При этом для амплитуды установившегося наведенного тока получим

$$I_{m0} = \frac{1}{8} \frac{t_1^2}{v_{\text{др}}^2} \frac{e}{m} \frac{V_{0s}}{d^2} I \frac{\sin \frac{\pi \Delta \omega}{2\omega_c}}{\frac{\pi \Delta \omega}{2\omega_c}} \sqrt{e^{-2\tau} \sin^2 \delta' + e^{2\tau} \cos^2 \delta'}. \quad (19)$$

Величина  $I_{m0}$  сильно зависит от  $\delta$ . При  $\delta = n\pi$  величина  $I_{m0}$  максимальна и пропорциональна  $e^\tau$ . При  $\delta = \frac{(2m+1)}{2}\pi$   $I_{m0}$  минимальна (пропорциональна  $e^{-\tau}$ ).

Фаза установившегося наведенного тока определяется выражением (17).

Если снова отсчитывать время от момента включения сигнала, то зависимость  $I_m$  от времени будет иметь вид

$$I_m = I_{m0} \sin [\omega_c (t + t_1 - T_0) + \chi_2], \quad t > T_0 - t_1.$$

Таким образом, сдвиг фаз между  $I_m$  и  $V_s$  определяется выражением

$$\Delta = (\omega - \omega_c)t + (t_1 + T_0)\omega_c + \varphi_{s0} - \chi_2 + \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Как следует из (17), при  $\gamma = n\pi$

$$\operatorname{tg} \chi_2 = \operatorname{tg} \delta e^{-2\tau}, \quad \text{где } \delta = \psi'_{s0} \psi_{p0} + \frac{\pi}{4}.$$

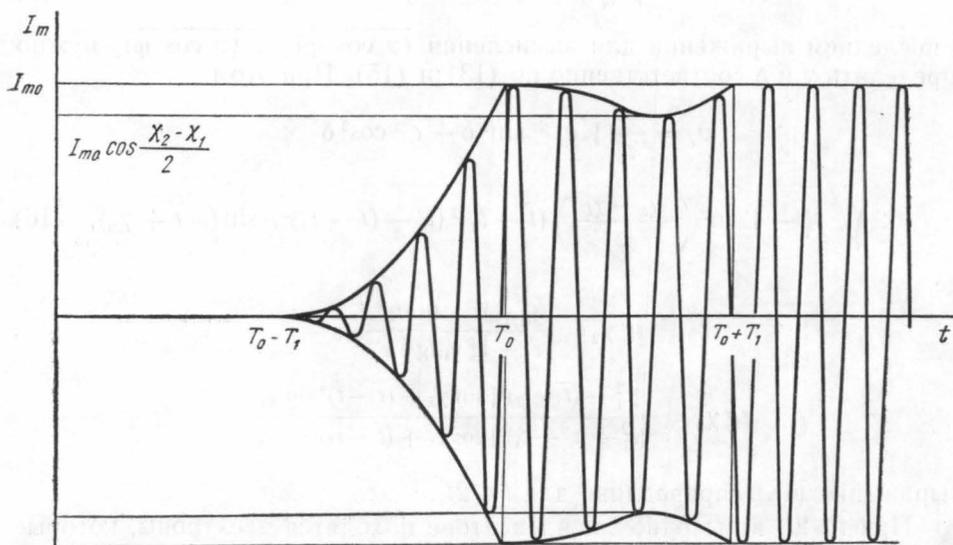


Рис. 2

Только в этом случае величина  $\chi_2$  может сильно зависеть от расстройки  $\Delta\omega$ , так как  $\psi'_{s0} = \psi_{s0} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_c} \right)$ . От величины расстройки зависит также  $I_{m0}$  (19).

Выражения (14), (16), (18) позволяют судить о характере увеличения амплитуды наведенного тока.

Как уже отмечалось, наведенный ток появляется в момент  $t = T_0 - t_1$ . При  $T_0 - t_1 < t < T_0$  увеличение амплитуды тока пропорционально  $[t - (T_0 - t_1)]^2$  (14). Изменение амплитуды тока между  $T_0$  и  $T_0 + t_1$ , как видно из (16), определяется выражением

$$F(t) = \sqrt{t_1^4 - 4 \sin^2 \left( \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right) (t - T_0)^2 [t_1^2 - (t - T_0)^2]}.$$

Приведенное выражение имеет минимум при  $t = T_0 + \frac{t_1}{\sqrt{2}}$ , при этом

$$F(t_s) = t_1^2 \cos \left( \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right).$$

При  $\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} = \frac{\pi}{2}$  в момент  $t = t_s$  наведенный ток равен нулю.

На рис. 2 показана кривая увеличения амплитуды  $I_{m0}$  в зависимости от времени.

Используя данные, приведенные в [3], можно оценить величину времени установления колебаний в описанной лампе. При этом  $2t_1 = \frac{2l}{v_{др}} = 0,54 \cdot 10^{-8}$  сек, так как  $V=13,4$  мм, а  $V=17,5$  в. Причем за это время происходит примерно 20 колебаний, так как  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,4 \cdot 10^{-10}$  сек.

Приведенные выше расчеты позволяют сделать следующие выводы. Наведенный ток в выходном конденсаторе появляется через время  $T_0-t$  после включения сигнала. Время установления амплитуды и фазы наведенного тока определяется величиной  $2t_1$ , где  $t_1$  — время пролета электрона в первом конденсаторе.

Если в частном случае  $t_1 = n \frac{T_c}{2}$ , то время установления колебаний равно  $t_1$ .

После появления наведенного тока амплитуда его сначала растет, затем проходит через минимум (равный нулю при  $-\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} = \frac{\pi}{2}$ ) при  $T_0 + \frac{t_1}{\sqrt{2}}$  и снова увеличивается до предельного значения, определяемого выражением (19). После установления колебаний сдвиг фаз между сигналом и наведенным током определяется выражением (20).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капца П. Л. Электроника больших мощностей. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Ванке В. А., Григоренко Л. П., Магалинский В. Б. «Радиотехника и электроника», 10, вып. 12, 2184, 1965.
3. Bridges T. J., Ashkin A. A. Proc. IRE., 48, 361, 1960.

Поступила в редакцию  
29. 6 1964 г.

Кафедра  
радиотехники