Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1966

УДК 621.372.5.061

К. В. ЧЕРНЫШЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Приводятся два способа экспериментального определения элементов матрицы четырехполюсника. Такой метод исследования может оказаться наиболее целесообразным, если четырехполюсники составлены из систем с распределенными параметрами. Изложенные в статье способы определения элементов матрицы пригодны при исследованиях четырехполюсников любой природы.

При решении многих задач электродинамики и акустики бывает удобно выделять части пространства, в котором протекает изучаемый процесс, и рассматривать эти части пространства как пассивные линейные четырехполюсники. Это возможно при условии линейности динамических соотношений в выделенных частях пространства и отсутствии в них положительных источников электромагнитной или звуковой энергии. В то же время допускается существование отрицательных источников энергии, т. е. поглотителей.

Свойства линейного пассивного четырехполюсника при синусоидальных во времени процессах определяются его матрицей. Та же матрица определяет свойства линий, составленных из одинаковых четырехполюсников [1].

Для четырехполюсников, образованных из элементов с сосредоточенными постоянными, вычисление элементов матрицы, по крайней мере принципиально, не представляет труда. В случае распределенных систем расчеты часто бывают затруднительны, поэтому встает вопрос об экспериментальном определении матрицы четырехполюсника.

Результаты, изложенные в этой работе, были получены при изучении упорядоченных систем объемных звукопоглотителей. В простейшем случае (распространение длинных волн вдоль оси решетки, образованной поглотителями) такие системы удобно рассматривать как конечные цепочки, образованные одинаковыми четырехполюсниками (каждый четырехполюсник включает один объемный поглотитель с прилегающей частью пространства). Волновые свойства этих цепочек могут быть изучены с помощью упомянутой матрицы, если размеры четырехполюсника значительно меньше длины звуковой волны. Это обстоятельство и приводит к необходимости определения элементов матрицы. Другие примеры, показывающие важность определения элементов матрицы, можно найти в работе [1].

Приведенные ниже результаты приложимы к четырехполюсникам любой природы, но для определенности мы будем пользоваться электротехническими переменными V (напряжение) и I (ток).

Если V_1 — напряжение на входных клеммах четырехполюсника, I_1 — ток, протекающий через них, а V_2 и I_2 — выходные значения напряжения и тока, то связь этих величин выражается так:

$$\begin{aligned} V_2 &= b_{11}V_1 + b_{12}I_1, \\ I_2 &= b_{21}V_1 + b_{22}I_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь (b_{ik}) — матрица четырехполюсника, элементами которой являются комплексные числа, зависящие от частоты и удовлетворяющие на всех частотах условию $\det(b_{ik}) = 1$.

Рассмотрим методы определения величин b_{ik} в функции частоты.

Первый способ предполагает возможность измерять входной импеданс четырехполюсника и измерять амплитуды и фазы напряжений на его входных и выходных клеммах. Кроме того, необходимо иметь в своем распоряжении два различных сопротивления z_2' и z_2'' известной величины.

Пусть z_1', а также V_1' и V_2' обозначают входной импеданс, входное и выходное напряжения четырехполюсника, замкнутого на z_2'. Величины z_1'', V_1'' и V_2'' имеют тот же смысл для четырехполюсника, замкнутого на z_2''. Система уравнений (1) дает

$$\begin{aligned} V_2' &= b_{11}V_1' + b_{12}\frac{V_1'}{z_1'}, \\ \frac{V_2'}{z_2'} &= b_{21}V_1' + b_{22}\frac{V_1'}{z_1'}, \\ V_2'' &= b_{11}V_1'' + b_{12}\frac{V_1''}{z_1''}, \\ \frac{V_2''}{z_2''} &= b_{21}V_1'' + b_{22}\frac{V_1''}{z_1''}. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим что z_2' и z_2'' нам известны, а z_1', z_1'', V_1', V_1'', V_1', V могут быть измерены. Из системы (2) следует определить b_{ik}. Система (2) распадается на две части: одна включает первое и третье уравнения, другая — второе и четвертое. Если уравнения каждой пары не совпадают между собой (совпадение имеет место только при $z_2' = z_2''$), система (2) имеет единственное решение.

Введем обозначения: $\alpha' = \dfrac{V_2'}{V_1'}$; $\alpha'' = \dfrac{V_2''}{V_1''}$. Для b_{ik} получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \alpha' - \frac{[\alpha' - \alpha'']\, z_1''}{z_1'' - z_1'}, \quad b_{12} = \frac{[\alpha' - \alpha'']\, z_1' z_1''}{z_1'' - z_1'}, \\ b_{21} &= \frac{\alpha'}{z_2'} - \left[\frac{\alpha'}{z_2'} - \frac{\alpha''}{z_2''}\right]\frac{z_1''}{z_1'' - z_1'}, \quad b_{22} = \left[\frac{\alpha'}{z_2'} - \frac{\alpha''}{z_2''}\right]\frac{z_1' z_1''}{z_1'' - z_1'}. \end{aligned} \tag{3}$$

Такие измерения и расчеты, проведенные для достаточного количества частот, позволят построить графики зависимости b_{ik} от частоты.

Если один из замыкающих импедансов равен нулю (короткое замыкание), то в формулах для b_{11} и b_{12} соответствующее значение α также равно нулю, а в формулах для b_{21} и b_{22} соответствующее значение $\frac{\alpha}{z_2}$ следует заменить на $\frac{I_2}{V_1}$, т. е. в этом случае придется измерять силу тока.

Если же один из замыкающих импедансов равен бесконечности, то в формулах для b_{11} и b_{12} никаких изменений нет, а в формулах для b_{21} и b_{22} соответствующее значение $\frac{\alpha}{z_2}$ равно нулю.

Приведенный способ определения элементов матрицы (b_{ik}) сравнительно прост в своей расчетной части, но измерение амплитуды и фазы напряжения (а в одном частном случае и тока) может оказаться затруднительным.

Разберем другой способ определения элементов матрицы четырехполюсника. Для его осуществления необходимо иметь возможность измерять входной импеданс четырехполюсника, а также располагать тремя различными сопротивлениями, величины которых известны.

Введем новые обозначения: замыкающие сопротивления обозначим через z_1', z_2' и z_3'. Соответствующие им входные сопротивления четырехполюсника обозначим через z_1, z_2 и z_3.

Если в системе (1) поделить первое равенство на второе, получим соотношение того же вида, что и три уравнения системы

$$\begin{aligned} z_1' &= \frac{b_{11}z_1 + b_{12}}{b_{21}z_1 + b_{22}}, \\ z_2' &= \frac{b_{11}z_2 + b_{12}}{b_{21}z_2 + b_{22}}, \\ z_3' &= \frac{b_{11}z_3 + b_{12}}{b_{21}z_3 + b_{22}}. \end{aligned} \tag{1'}$$

Эти уравнения могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{11}z_1 - b_{21}z_1z_1' - b_{22}z_1' &= -b_{12}, \\ b_{11}z_2 - b_{21}z_2z_2' - b_{22}z_2' &= -b_{12}, \\ b_{11}z_3 - b_{21}z_3z_3' - b_{22}z_3' &= -b_{12}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из этой системы величины b_{11}, b_{21}, b_{22} можно выразить в функции b_{12}. Затем b_{12} определяется из условия $\det(b_{ik}) = 1$.

Рассмотрим случай линейно зависимых уравнений системы (4). При этом одно (допустим, третье) уравнение есть линейная комбинация двух других:

$$tz_1 + wz_2 = z_3; \quad tz_1z_1' + wz_2z_2' = z_3z_3'; \quad tz_1' + wz_2' = z_3'. \tag{5}$$

В этой формуле t и w — комплексные коэффициенты, удовлетворяющие условию $t + w = 1$, что следует из выражения линейной комбинации правых частей уравнений (4).

Приравняем левую часть второго равенства из (5) произведению левых частей первого и третьего равенств. Принимая во внимание, что $t + w = 1$, получим

$$tw\,[z_1 - z_2]\,[z_1' - z_2'] = 0.$$

Если $tw \neq 0$, то $z_1 = z_2$ и, следовательно, $z_1' = z_2'$ (последнее вытекает из однозначности зависимостей z_1' от z_1 и z_2' от z_2). Из $tz_1 + wz_2 = z_3$ следует окончательно, что $z_1 = z_2 = z_3$ и $z_1' = z_2' = z_3'$, т. е. линейная зависимость при $tw \neq 0$ может иметь место только в случае равенства трех замыкающих импедансов. Если равны между собой только два из них, то одну из величин t и w придется считать равной нулю, а другую — единице.

Таким образом, если замыкающие сопротивления неодинаковы, система (4) позволяет выразить b_{11}, b_{21} и b_{22} через b_{12}. Вводя обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 z_1' & -z_1' \\ z_2 & -z_2 z_2' & -z_2' \\ z_3 & -z_3 z_3' & -z_3' \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -z_1 z_1' & -z_1' \\ -1 & -z_2 z_2' & -z_2' \\ -1 & -z_3 z_3' & -z_3' \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z_1 & -1 & -z_1' \\ z_2 & -1 & -z_2' \\ z_3 & -1 & -z_3' \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 z_1' & -1 \\ z_2 & -z_2 z_2' & -1 \\ z_3 & -z_3 z_3' & -1 \end{vmatrix},$$

найдем

$$b_{11} = b_{12}\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b_{21} = b_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad b_{22} = b_{12}\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{6}$$

Воспользуемся условием $\det(b_{ik}) = 1$:

$$b_{12}^2\left[\frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta} - \Delta_2\right] = \Delta,$$

откуда

$$b_{12} = \pm\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1\Delta_3 - \Delta\Delta_2}}. \tag{7}$$

Рассмотрим случай $b_{12} = 0$. При этом система (4) имеет решение лишь при условии $\Delta = 0$. Заметим, что условие $t + w = 1$, налагавшееся на коэффициенты линейной комбинации, теперь не необходимо. Обращение Δ в нуль очевидно при выполнении одного из трех условий: $b_{21} = 0$; один из замыкающих импедансов равен нулю; два замыкающих импеданса равны между собой. Будем считать, что эти условия не выполняются.

Определим t и w из первого и третьего соотношений формулы (5). Это возможно, если $z_1' \neq z_2'$ и z_1', $z_2' \neq 0$, как было обусловлено. Подставляя найденные t и w в первое соотношение из (5), получим тождество, которое с помощью выражений (1′) для z_1', z_2' и z_3' приведем к виду

$$tz_1'(b_{21}z_1 + b_{22}) + wz_2'(b_{21}z_2 + b_{22}) = z_3'(b_{21}z_3 + b_{22}),$$

откуда, учитывая третье равенство из (5) и условие $b_{21} \neq 0$, найдем

$$tz_1 z_1' + wz_2 z_2' = z_3 z_3'.$$

Из этого следует, что $\Delta = 0$, если $b_{12} = 0$. Величины b_{11}, b_{21} и b_{22} определяются из первых двух уравнений системы (4) и условия $b_{11} \cdot b_{22} = 1$. Для этого необходимо, чтобы $z_1' \neq z_2'$ и z_1', $z_2' \neq 0$.

При $b_{12} = 0$ формулы (6) и (7) неудобны, поэтому приведем эквивалентные им, которые можно применять всегда:

$$b_{11} = \pm \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1\Delta_3 - \Delta\Delta_2}}, \quad b_{12} = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1\Delta_3 - \Delta\Delta_2}},$$
$$b_{21} = \pm \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1\Delta_3 - \Delta\Delta_2}}, \quad b_{22} = \pm \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1\Delta_3 - \Delta\Delta_2}}. \tag{7a}$$

Выбор знака производится так же, как в формуле (7).

Разберем вопрос о выборе знака в формуле (7). Представим себе бесконечную цепочку, составленную из одинаковых четырехполюсников, вдоль которой распространяется нормальная волна [2]. При этом напряжение V_n и ток I_n, измеренные на входных клеммах n-го четырехполюсника, связаны с напряжением V_{n+1} и током I_{n+1}, измеренными на входных клеммах $(n+1)$-го четырехполюсника следующим образом [1]:

$$V_n\xi = V_{n+1}, \quad I_n\xi = I_{n+1},$$

где ξ — комплексное число, определяемое из уравнения: $\xi^2 - (b_{11}+b_{22})\xi + 1 = 0$. Два значения ξ

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{b_{11}+b_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_{11}+b_{22})^2 - 1}{4}}, \tag{8}$$

которые удовлетворяют этому уравнению, определяют преобразование напряжений и токов при распространении волны вдоль цепочки в положительном и отрицательном направлениях. Поскольку $\xi_1 \cdot \xi_2 = 1$, можем положить $\xi_1 = e^{-\gamma}$ и $\xi_2 = e^{\gamma}$, где $\gamma = \alpha + i\beta$ есть постоянная распространения. Величина α характеризует изменение амплитуды, а β — фазовый сдвиг напряжения или тока при переходе волны через четырехполюсник. Выбирая временной множитель в виде $e^{i\omega t}$, получим, что ξ_1 соответствует движению волны в положительном направлении, если $\alpha > 0$ (это следует из условия пассивности четырехполюсника).

Как известно (см. [1]), длина волны λ может изменяться в пределах $2d \leqslant \lambda \leqslant \infty$, где d — линейные размеры элементарной ячейки (четырехполюсника), многократным повторением которой образована цепочка. При этом фазовый сдвиг напряжения или тока, измеренных на входных клеммах двух соседних четырехполюсников, изменяется в пределах

$$-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi. \tag{9}$$

Одному и тому же распределению токов в цепочке в силу неоднозначности волнового числа соответствуют различные значения β, отличающиеся друг от друга на величину, кратную 2π. Таким образом, полученное при расчетах значение β может быть переведено в основную область определения (9) добавлением величины, кратной 2π.

Вводя обозначение $a = \frac{1}{\lambda}$, запишем выражение для напряжения на выходных клеммах n-го четырехполюсника

$$V_n = V_0 e^{2\pi i[\nu t - and]}.$$

Аналогично

$$V_{n+1} = V e^{2\pi i[\nu t - a(n+1)d]}.$$

Отсюда получаем

$$\xi_1 = e^{-\alpha - i\beta} = \frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{-2\pi i a d},$$

$$\alpha = -2\pi d Im[a], \quad \beta = 2\pi d \operatorname{Re}[a].$$

Для волны, бегущей в положительном направлении, $\mathrm{Re}[a]>0$, а значит и $\beta>0$. Таким образом, знаки α и β в волне, бегущей в положительном направлении, совпадают. В обратной волне обе величины изменяют свой знак. Следовательно, если α и β отличны от нуля, их знаки совпадают.

Из формулы (8)

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{\xi_1+\xi_2}{2} = \frac{1}{2}(b_{11}+b_{22}) = \operatorname{ch}\alpha\cos\beta + i\operatorname{sh}\alpha\sin\beta, \tag{10}$$

откуда вытекает

$$Jm\,[b_{11}+b_{22}] \geqslant 0. \tag{11}$$

Условие (11) является общим для всех пассивных линейных четырехполюсников. Оно позволяет выбрать знак в формуле (7), если $Im[b_{11}+b_{22}] \neq 0$.

Из формулы (10) следует, что для обращения в нуль величины $Jm[b_{11}+b_{22}]$ должно выполняться хотя бы одно из условий: $\alpha=0$, $\beta=0$, $\beta=+\pi$, $\beta=-\pi$.

Разберем случай, когда $\alpha=0$. Будем обозначать знаком плюс сверху величины, которые получаются при выборе положительного знака в формуле (7), и аналогично — для знака минус. Очевидно, что $b_{ik}^{+} = -b_{ik}^{-}$. Из формул

$$\begin{aligned}
\xi_1^{+} &= \frac{1}{2}[b_{11}^{+}+b_{22}^{+}] + \sqrt{\frac{(b_{11}^{+}+b_{22}^{+})^2}{4}-1} = e^{-\gamma^{+}},\\
\xi_2^{+} &= \frac{1}{2}[b_{11}^{+}+b_{22}^{+}] + \sqrt{\frac{(b_{11}^{+}+b_{22}^{+})^2}{4}-1} = e^{\gamma^{+}},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\xi_1^{-} = \frac{1}{2}[b_{11}^{-}+b_{22}^{-}] - \sqrt{\frac{[b_{11}^{-}+b_{22}^{-}]^2}{4}-1} = e^{-\gamma^{-}},$$

$$\xi_2^{-} = \frac{1}{2}[b_{11}^{-}+b_{22}^{-}] - \sqrt{\frac{(b_{11}^{-}+b_{22}^{-})^2}{4}-1} = e^{\gamma^{-}}$$

видно, что $\xi_1^{+} = -\xi_2^{-}$ и $\xi_2^{+} = -\xi_1^{-}$.

Из равенства модулей ξ_1^{+} и ξ_2^{-}, ξ_2^{+} и ξ_1^{-} следует, что ξ_1^{+} и ξ_2^{-} соответствуют распространению волны в одну сторону, а ξ_2^{+} и ξ_1^{-} — в другую. Вопрос о выборе знака в формуле (7) сводится к выбору между ξ_1^{+} и ξ_2^{-}, результат которого предопределяет и выбор между ξ_2^{+} и ξ_1^{-}. Разница между ξ_1^{+} и ξ_2^{-} состоит только в фазовом множителе, так как $\xi_1^{+} = \xi_2^{-}\cdot e^{i\pi}$, откуда

$$\alpha^{+} = -\alpha^{-},\quad -i\beta^{+} = i\beta^{-} + i\pi. \tag{13}$$

Такие же соотношения для этих величин получаются, если сравнивать ξ_2^{+} и ξ_1^{-}.

Если учесть, что β имеет область определения (9), и любое значение β может быть смещено в эту область добавлением величины, кратной 2π, то из (13) следует, что β^{+} и β^{-} не могут иметь противоположные знаки. Если одна из величин равна нулю, то вторая равна $+\pi$ или $-\pi$. Во всех остальных случаях β^{+} и β^{-} имеют одинаковые знаки и располагаются симметрично относительно точки $\beta = \frac{\pi}{2}$, если они положительны, и относительно точки $\beta = -\frac{\pi}{2}$, если они отрицательны.

Если α^+ и α^- не равны нулю и ни одна из величин β^+, β^- также не равна нулю, то выбор между ξ_1^+ и ξ_2^- осуществляется на основании требования о совпадении знаков α и β (напомним, что α^+ и α^- имеют разные знаки). Это эквивалентно применению формулы (11), которая при таких условиях становится строгим неравенством.

Если же α^+ и α^- равны нулю, этот способ неприменим. Предположим, что α обращается в нуль только на одной частоте ν_0. В этом случае знак в формуле (7) следует взять таким же, что и на близких частотах выше и ниже этой частоты.

Если α^+ и α^- равны нулю в целой области частот, выбор между β^+ и β^- может быть сделан на основании физических соображений. Например, если система четырехполюсников имеет характер фильтра нижних частот, выбирается та из величин β, которая соответствует уменьшению длины волны с повышением частоты.

Как уже было сказано, вопрос об экспериментальном определении элементов матрицы четырехполюсника возник в связи с изучением систем объемных поглотителей. Следует сказать, что, если в четырехполюснике имеет место поглощение энергии, величина α не может равняться нулю. С другой стороны, если поглощения нет, α также может иметь значение, отличное от нуля (если частота колебаний лежит в полосе непропускания цепочки).

Если на какой-либо частоте ν_0 приходится делать выбор между величинами $\beta = 0$ и $\beta = \pm\pi$, следует определить величину β на других частотах, по возможности близких к ν_0, и затем определить, к какому значению стремится β при частоте, стремящейся к ν_0. Если это почему-либо сделать не удается (например, по причине разрывности β в точке ν_0), следует воспользоваться первым методом определения элементов матрицы.

Измерения, связанные с определением величин b_{ik} для объемных звукопоглотителей, следует производить в акустическом интерферометре. Измерение входного импеданса четырехполюсника при этом может быть произведено по хорошо известной методике [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.
2. Краснушкин П. Е. «Вестн. Моск. ун-та», сер., мат., мех., астрон., физ., химии, № 2, 1950.
3. Беранек Л. Акустические измерения. М., ИЛ, 1952.

Поступила в редакцию
1. 9 1964 г.

Кафедра
акустики