Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1966

УДК 538.311

Ю. П. РЫБАКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Исходя из постулата устойчивости производится отбор инвариантов, которые могут быть использованы при описании классического нелинейного векторного поля. В полученной более узкой теории найдены достаточные и в одном частном случае необходимые условия устойчивости стационарных состояний. Показывается, что постулата устойчивости и закона Кулона достаточно для получения в предельном линейном случае уравнений Максвелла.

Введение

Начиная с классических работ Ми [1], рядом авторов [2—4] делались многочисленные попытки описать зарядовые свойства элементарных частиц при помощи нелинейного электромагнитного поля без введения его источников. Основной причиной, приведшей к этим попыткам, было стремление избавиться от расходимости собственной массы в электродинамике точечных зарядов, а также от многих непоследовательностей и противоречий, появляющихся при введении распределения заряда внутри элементарных частиц (в частности, необходимость введения сил неэлектромагнитного происхождения — давлений Пуанкаре, сдерживающих частицу). Во всех этих работах предлагалось некоторое обобщение уравнений Максвелла, т. е. такое их видоизменение, которое позволяло интерпретировать добавочную часть как источники электромагнитного поля.

Не останавливаясь на деталях и недостатках упомянутых теорий, постараемся сформулировать некоторые общие требования, которым должна удовлетворять классическая теория такого типа.

1. Конечность полевой энергии частицы, приводящая к необходимости рассмотрения только регулярных решений уравнений поля, т. е. решений, не имеющих особых точек и квадратично интегрируемых во всем пространстве, — эти решения можно назвать частицеподобными.

2. Релятивистское соотношение между энергией и импульсом частицы, что обычно обеспечивается лоренц-ковариантностью уравнений поля.

3. Уравнения движения частицы должны вытекать из уравнений поля — в нелинейной теории это требование можно выполнить, так как из-за перекрытия полей частицы начинают взаимодействовать друг с другом.

4. Выполнение принципа соответствия, который состоит в том, что в предельном случае малых полей, когда уравнения поля можно линеаризовать, должны получаться уравнения Максвелла *.

5. В теории должны получаться устойчивые по отношению к малым внешним возмущениям частицы (электрон).

Постановка задачи

Настоящая работа посвящена анализу нелинейных векторных полей в основном с точки зрения последнего требования, поскольку постулат устойчивости, по-видимому, является наиболее фундаментальным отборочным принципом законов природы [5, 6]. Прежде всего мы допускаем, что существует действительное векторное поле $A_\mu = \{\vec{A}, i\Phi\}$, подчиняющееся нелинейным лорентц — ковариантным уравнениям, среди решений которых имеются стационарные частицеподобные состояния $A_\mu(\vec{r})$, не зависящие от времени.

Поскольку на реальную частицу в течение всего времени ее существования постоянно действуют хаотические возмущения, происхождение которых мы сейчас не будем конкретизировать, то фактически необходимо вводить в исходные уравнения какие-то посторонние случайные силы. Однако в такой постановке задача об устойчивости движения необычайно сложна, и поэтому в качестве первого приближения предлагается классическая постановка задачи, восходящая к А. М. Ляпунову [7]. Суть ее состоит в том, что возмущающие силы включаются лишь в начальный момент времени, что эквивалентно изменению начальных условий движения динамической системы. Короче говоря, ставится задача об устойчивости динамической системы по отношению к начальным условиям во времени. Очевидно, что такая устойчивость необходима для полной устойчивости системы (с учетом внешних сил) и, следовательно, обязательно должна иметь место для стабильных частиц.

Для определения понятия «устойчивость» введем метрическое расстояние в пространстве возмущений, т. е. меру отклонения от исследуемого состояния. В качестве таковой возьмем величину $\rho(t) = \left(\int d\tau\{\vec{a}^2 + f^2\}\right)^{1/2}$, где $\{\vec{a}, if\} = \xi_\mu$ — возмущение поля, $d\tau$ — элемент 3-объема.

Тогда состояние $A_\mu(\vec{r})$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условию $\rho(t_0) < \delta$, для любого $t > t_0$ будет справедливо неравенство $\rho(t) < \varepsilon$. В противном случае исследуемое состояние неустойчиво, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$, какое бы ни предлагалось $\delta > 0$, всегда найдется такое начальное возмущение $\xi_\mu(\vec{r}, t_0)$, удовлетворяющее условию $\rho(t_0) < \delta$, что неравенство $\rho < \varepsilon$ обязательно нарушится для некоторого $t > t_0$.

Отбор инвариантов и исследование устойчивости

Как известно, устойчивость движения в указанном смысле можно установить с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости, которая формулируется следующим образом [5, 7, 8].

Теорема. Если в некоторой окрестности исследуемой стационарной точки ($\xi_\mu = 0$) существует знакоопределенный и допускающий бесконечно малый высший предел функционал $V[\xi_\mu]$, такой, что его про-

* Это положение делает ненужным добавочное требование градиентной инвариантности, которая обязательно будет иметь место для линейных полей.

изводная по времени $\dot{V}$, взятая в силу уравнений движения, неотрицательна всюду в рассматриваемой окрестности, то движение устойчиво.

Напомним, что функционал V называется допускающим бесконечно малый высший предел, если для всякого $l>0$ найдется такое $\lambda>0$. что при $t \geqslant t_0$ и $\rho<\lambda$ будет выполняться неравенство $|V|<l$. Сразу же отметим, что поскольку теория инвариантна по отношению к инверсии времени $(t \to -t)$, то случай $\dot{V}<0$ отпадает и остается лишь $\dot{V}=0$, т. е. V должен быть интегралом движения. Очевидным интегралом движения, который может быть знакоопределенным и которым прежде всего надлежит воспользоваться, является энергия поля $\mathscr{E}$. Для нахождения ее используем лагранжеву формулировку теории.

Если ограничиться уравнениями поля не выше второго порядка, то плотность лагранжиана L может быть функцией, например, следующих шести независимых инвариантов:

$$u=-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2=\frac{1}{2}(\vec{E}^2-\vec{H}^2),\ v=\frac{1}{8}(F^t_{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2=-2(\vec{E}\vec{H})^2,$$

$$s=-A_\mu^2,\ l=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2,\ t=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\right)^2,\ m=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu\right)^2,$$

где

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},\ F^t_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — единичный полностью антисимметричный псевдотензор $(\varepsilon_{1234}=1)$;

$$\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu};\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_0};\ x_0=-ix_4;\ \vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Итак, $L=F(u, v, s, l, t, m)$. Теперь нам необходимо получить уравнения движения для возмущений поля ξ_μ. Проще всего это сделать путем разложения полного действия S вблизи исследуемого стационарного состояния $A_\mu\ (\vec{r})$, если учесть, что плотность лагранжиана возмущений $\widetilde{L}$, квадратичная по ξ_μ, удовлетворяет соотношению $\frac{1}{2}\delta^2S=\int dx\widetilde{L}$, где $dx=d\tau dx_0$. Вычислив δ^2S и произведя сравнение, найдем, что

$$\widetilde{L}=\frac{1}{8}F''_u(F_{\mu\nu}f_{\mu\nu})^2-\frac{1}{4}F'_u(f_{\mu\nu})^2+\frac{1}{8}(2F''_v v+F'_v)(F^t_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}+f^t_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})^2+$$
$$+\frac{1}{4}F'_v(F^t_{\mu\nu}F_{\mu\nu})(f^t_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta})=-F'_s(\xi_\mu)^2+2F''_s+(A_\mu\xi_\mu)^2+\frac{1}{2}(2F''_l l+F'_l)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}F''_t\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\frac{\partial\xi_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\right)^2+\frac{1}{2}F'_t\left(\frac{\partial\xi_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\right)^2+\frac{1}{4}(2F''_m m+$$
$$+F'_m)\left[\frac{\partial\xi_{(\alpha}}{\partial x_{\beta)}}A_\alpha A_\beta+\frac{\partial A_{(\alpha}}{\partial x_{\beta)}}(\xi_{(\alpha}A_{\beta)})\right]^2+\frac{1}{2}F'_m\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu\right)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial\xi_{(\alpha}}{\partial x_{\beta)}}(\xi_{(\alpha}A_{\beta)})+\frac{\partial A_{(\alpha}}{\partial x_{\beta)}}\xi_\alpha\xi_\beta\right]+$$

+смешанные члены типа F''_{ul}, которые несущественны для наших целей и в дальнейшем будут заменяться многоточием. Здесь мы ввели обозначения

$$f_{\alpha\beta}=\frac{\partial\xi_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\beta},\ \xi_{(\alpha}A_{\beta)}=\xi_\alpha A_\beta+\xi_\beta A_\alpha.$$

Обычной вариацией действия $\widetilde{S}=\int dx\widetilde{L}$ получаем уравнения движения для возмущений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big\{\frac{1}{2}F''_u(F_{\mu\nu}f_{\mu\nu})F_{\alpha\beta}-F'_u f_{\alpha\beta}+(2F''_v v+F'_v)(F^t_{\mu\nu}f_{\mu\nu}+f^t_{\mu\nu}F_{\mu\nu})F^t_{\alpha\beta}+\\
&+F'_v(F^t_{\mu\nu}F_{\mu\nu})f^t_{\alpha\beta}+(2F''_l l+F'_l)\left(\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x_\mu}\right)\delta_{\alpha\beta}+2F''_t\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\frac{\partial\xi_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}\right)\frac{\partial A_{(\beta}}{\partial x_{\alpha)}}+\\
&+2F'_t\left(\frac{\partial\xi_{(\alpha}}{\partial x_{\beta)}}\right)+(2F''_m m+F'_m)\left[\frac{\partial\xi_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu+\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}(\xi_{(\mu}A_{\nu)})\right]A_\alpha A_\beta+\\
&+F'_m\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu\right)(\xi_{(\beta}A_{\alpha)})\Big\}+2F'_s\xi_\beta-4F''_s(A_\mu\xi_\mu)A_\beta-(2F''_m m+F'_m)\times\\
&\times\left[\frac{\partial\xi_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu+\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}(\xi_{(\mu}A_{\nu)})\right]\frac{\partial A_{(\beta}}{\partial x_{\alpha)}}A_\alpha-F'_m\left(\frac{\partial A_{(\mu}}{\partial x_{\nu)}}A_\mu A_\nu\right)\times\\
&\times\left[\frac{\partial\xi_{(\beta}}{\partial x_{\nu)}}A_\nu+\frac{\partial A_{(\beta}}{\partial x_{\nu)}}\xi_\nu\right]+\ldots=0.
\end{aligned}
$$

Исходя из $\widetilde{L}$, легко получить и интеграл энергии возмущенного движения $\widetilde{\mathscr{E}}=\int d\tau\left\{\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_4}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\left(\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_4}\right)}-\widetilde{L}\right\}$. Однако для упрощения последующих выкладок рассмотрим теперь случай, когда $\vec{A}=0$, т. е. $\vec{H}=0$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$. Как выяснится, это не повлияет на общность окончательных выводов. Для этого случая с помощью последнего из уравнений движения ($\beta=4$) выражение для энергии преобразуется к следующему:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{E}}=\int d\tau\Big\{&\frac{1}{2}F''_u(\vec{E}\vec{e})^2+\frac{1}{2}F'_u(\vec{e}^2+\vec{h}^2)+\frac{1}{2}(2F''_l l+F'_l)[(\dot{f})^2-(\operatorname{div}\vec{a})^2]+\\
&+2F''_t(\vec{E}(\vec{e}+2\vec{\nabla}f))^2+\frac{1}{2}F'_t\left[4(\dot{f})^2-2(\vec{e}+2\vec{\nabla}f)^2-\left(\frac{\partial a_{(i}}{\partial x_{k)}}\right)^2\right]+\\
&+(2F''_m m+F'_m)[(\dot{f}\Phi)^2-(\vec{E}\vec{a})^2]\Phi^2+2(2F''_v v+F'_v)(\vec{E}\vec{h})^2-\\
&-(2F''_l l+F'_l)(\operatorname{div}\dot{\vec{a}}+\ddot{f})f-4F'_t\ddot{f}f-2(2F''_m m+F'_m)(\ddot{f}\Phi-(\vec{E}\dot{\vec{a}}))\Phi^3 f+\\
&+F'_s(\vec{a}^2+f^2)+2F''_s\Phi^2 f^2+\ldots\Big\},
\end{aligned}
$$

где

$$
\vec{e}=-\vec{\nabla}f-\frac{\partial\vec{a}}{\partial x_0};\ \vec{h}=\operatorname{rot}\vec{a};\ i,\ k=1,\ 2,\ 3.
$$

Из этого выражения видно, что инварианты l, m, t приводят к знакопеременности $\widetilde{\mathscr{E}}$, и поэтому требование устойчивости запрещает их использование. Тем самым мы приходим к выводу, что только три инварианта u, v, s совместны с требованием устойчивости и поэтому могут быть оставлены в плотности лагранжиана, т. е. $L=F(u,\ v,\ s)$. Исследуем этот случай более детально. Записывая выражение для второй вариации действия, найдем плотность лагранжиана возмущений поля

$$\tilde{L} = -\frac{1}{4} F'_u (f_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8} F''_u (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} F''_{uv} (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) (F^t_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) (F^t_{\gamma\delta} f_{\gamma\delta}) +$$

$$+ F''_{us} (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) (A_\alpha \xi_\alpha) + \frac{1}{4} F'_v (F^t_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) (f^t_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (2F''_v v + F'_v) (F^t_{\mu\nu} f_{\mu\nu})^2 -$$

$$- F''_{vs} (F^t_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) (F^t_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) (A_\sigma f_\sigma) - F'_s \xi^2_\mu + 2F''_s (A_\mu \xi_\mu)^2.$$

Соответствующие уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} \Big\{ - F'_u f_{\varepsilon\tau} + \frac{1}{2} F''_u (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) F_{\varepsilon\tau} - \frac{1}{2} F''_{uv} (F^t_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) [F_{\varepsilon\tau} (F^t_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) +$$

$$+ F^t_{\varepsilon\tau} (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu})] + 2F''_{us} (A_\alpha \xi_\alpha) F_{\varepsilon\tau} + F'_v (F^t_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) f^t_{\varepsilon\tau} + (2F''_v v + F'_v) (F^t_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) F^t_{\varepsilon\tau} -$$

$$- 2F''_{vs} (F^t_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) (A_\alpha \xi_\alpha) F^t_{\varepsilon\tau} \Big\} - F''_{us} (F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}) A_\tau + F''_{vs} (F^t_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) (F^t_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) A_\tau +$$

$$+ 2F'_s \xi_\tau - 4F''_s (A_\alpha \xi_\alpha) A_\tau = 0.$$

Совершенно аналогично предыдущему, используя последнее уравнение ($\tau = 4$), найдем, что энергия возмущенного движения $\tilde{\mathscr{E}} = V + W$, где

$$V = \int d\tau \Big\{ \frac{1}{2} F'_u \vec{e}^2 + \frac{1}{2} F''_u (\vec{E}\vec{e})^2 - 2(2F''_v v + F'_v)(\vec{H}\vec{e})^2 -$$

$$- 4F''_{uv} (\vec{E}\vec{H})(\vec{e}\vec{H})(\vec{e}\vec{E}) + 2F''_{us} (\vec{E}\vec{e}) \Phi f - 8F''_{vs} (\vec{E}\vec{H})(\vec{H}\vec{e}) \Phi f +$$

$$+ F'_s f^2 + 2F''_s (\Phi f^2)^2 \Big\},$$

$$W = \int d\tau \Big\{ \frac{1}{2} F'_u \vec{h}^2 - \frac{1}{2} F''_u (\vec{H}\vec{h})^2 + 2(2F''_v v + F'_v)(\vec{E}\vec{h})^2 -$$

$$- 4F''_{uv} (\vec{E}\vec{H})(\vec{H}\vec{h})(\vec{E}\vec{h}) - 2F''_{us} (\vec{H}\vec{h})(\vec{A}\vec{a}) - 8F''_{vs} (\vec{E}\vec{H})(\vec{E}\vec{h})(\vec{A}\vec{a}) +$$

$$+ F'_s \vec{a}^2 - 2F''_s (\vec{A}\vec{a})^2 \Big\}.$$

В силу независимости переменных $\vec{e}$, $\vec{h}(\vec{a})$ и f функционалы V и W также независимы. Подынтегральное выражение в V представляет собой квадратичную форму от переменных $\vec{e}$ и f, необходимым и достаточным условием положительной определенности которой являются следующие неравенства, вытекающие из критерия Гурвица (положительность главных миноров матрицы):

$$1)\ \Delta_1 = \frac{1}{2} F'_u + \frac{1}{2} F''_u E_1^2 - 2(2F''_v v + F'_v) H_1^2 - 4F''_{uv} (\vec{E}\vec{H})(E_1 H_1) > 0;$$

$$2)\ \Delta_2 = \left(\frac{1}{2} F'_u\right)^2 + \frac{1}{4} F'_u F''_u (E_1^2 + E_2^2) - F'_u (2F''_v v + F'_v)(H_1^2 + H_2^2) -$$

$$- 2F'_u F''_{uv} (\vec{E}\vec{H})(E_1 H_1 + E_2 H_2) - [F''_u (2F''_v v + F'_v) + (2F''_{uv} (\vec{E}\vec{H}))^2] [\vec{H}, \vec{E}]_3^2 > 0;$$

$$3)\ \Delta_3 = \frac{1}{2} F'_u \Big\{ \left(\frac{1}{2} F'_u\right)^2 + \frac{1}{4} F'_u F''_u (\vec{E})^2 - 2F'_u F''_{uv} (\vec{E}\vec{H})^2 -$$

$$- F'_u (2F''_v v + F'_v)(\vec{H})^2 - [F''_u (2F''_v v + F'_v) + (2F''_{uv} (\vec{E}\vec{H}))^2] [\vec{E}, \vec{H}]^2 \Big\} > 0; \quad (1)$$

$$4)\ \Delta_4 = (F_s' + 2F_s''\Phi^2)\,\Delta_3 - \Phi^2\Big\{\Big(\frac{1}{2}F_u'F_{us}''\Big)^2(\vec{E})^2 + (2F_u'F_{vs}''(\vec{E}\vec{H}))^2(\vec{H})^2 -$$

$$-2(F_u')^2F_{us}''F_{vs}''(\vec{E}\vec{H})^2 - F_u'[(2F_v''v + F_v')(F_{us}'')^2 +$$

$$+4F_{vs}''(\vec{E}\vec{H})^2(2F_{uv}''F_{us}'' - F_u''F_{vs}'')][\vec{E},\vec{H}]^2\Big\} > 0.$$

Эти неравенства и будут искомыми, так как совершенно очевидно, что для положительной определенности функционала V необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение в V было всюду положительным. Действительно, если в некоторой области оно отрицательно, то всегда можно выбрать возмущения поля таким образом, что они будут равны нулю всюду, кроме этой области, а тогда и V окажется отрицательным.

Аналогично находятся и условия положительной определенности функционала W, хотя подынтегральное выражение в нем представляет собой квадратичную форму от переменных $\vec{h}$ и $\vec{a}$, которые нельзя считать независимыми. Положение спасается тем, что $\vec{h} = \mathrm{rot}\,\vec{a}$, и поэтому может быть обращено в нуль подстановкой $\vec{a} = \vec{\nabla}\psi$, и, кроме того, должно выполняться необходимое условие минимума функционала W, требующее положительной определенности квадратичной формы из $\vec{h}$ (условие Лежандра [9]). Тем самым получаются обычные неравенства Гурвица:

$$1)\ \bar{\Delta}_1 = \frac{1}{2}F_u' - \frac{1}{2}F_u''H_1^2 + 2(2F_v''v + F_v')E_1^2 - 4F_{uv}''(\vec{E}\vec{H})E_1H_1 > 0,$$

$$2)\ \bar{\Delta}_2 = \Big(\frac{1}{2}F_u'\Big)^2 + F_u'(2F_v''v + F_v')(E_1^2 + E_2^2) - \frac{1}{4}F_u'F_u''(H_1^2 + H_2^2) -$$

$$-2F_u'F_{uv}''(\vec{E}\vec{H})(E_1H_1 + E_2H_2) - [F_u''(2F_v''v + F_v') + 4(F_{uv}'')^2(\vec{E}\vec{H})^2][\vec{H},\vec{E}]_3^2 > 0,$$

$$3)\ \bar{\Delta}_3 = \frac{1}{2}F_u'\Big\{\Big(\frac{1}{2}F_u'\Big)^2 + F_u'(2F_v''v + F_v')(\vec{E})^2 - \frac{1}{4}F_u'F_u''(\vec{H})^2 -$$

$$-2F_u'F_{uv}''(\vec{E}\vec{H})^2 - [F_v''(2F_v''v + F_v') + (2F_{uv}''(\vec{E}\vec{H}))^2][\vec{E},\vec{H}]^2\Big\} > 0, \qquad (2)$$

$$4)\ \bar{\Delta}_4 = (F_s' - 2F_s''A_1^2)\,\bar{\Delta}_3 - A_1^2\Lambda > 0,$$

$$5)\ \bar{\Delta}_5 = F_s'\{\bar{\Delta}_3[F_s' - 2F_s''(A_1^2 + A_2^2)] - (A_1^2 + A_2^2)\Lambda\} > 0,$$

$$6)\ \bar{\Delta}_6 = (F_s')^2\{\bar{\Delta}_3[F_s' - 2F_s''(\vec{A})^2] - (\vec{A})^2\Lambda\} > 0,$$

где

$$\Lambda = 4(F_u'F_{vs}'')^2(\vec{E}\vec{H})^2(\vec{E})^2 + \frac{1}{4}(F_u'F_{us}'')^2(\vec{H})^2 + 2(F_u')^2F_{us}''F_{vs}''(\vec{E}\vec{H})^2 +$$

$$+F_u'[(2F_v''v + F_v')(F_{us}'')^2 + 4F_{vs}''(\vec{E}\vec{H})^2(F_u''F_{vs}'' + 2F_{uv}''F_{us}'')][\vec{E},\vec{H}]^2.$$

Но выписанные условия устойчивости (1, 2) пока являются только достаточными. Утверждать, что они необходимы, можно лишь, если доказать, что в случае их нарушения будет выполняться одна из теорем о неустойчивости. Исследование этого мы проведем для наиболее интересного частного случая, когда $\vec{A} = 0$. При этом мы воспользуемся теоремой Четаева о неустойчивости [5], согласно которой стационарное состояние ($\xi_\mu = 0$) неустойчиво, если существует область возмущений, в которой для ограниченного функционала $\overline{V}$ совпадают знаки у $\overline{V}$ и $\dot{\overline{V}}$.

Если ввести обозначение $\pi_{\varepsilon\tau} = \dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\varepsilon} \right)}$, то, как легко убедиться, имеет место соотношение

$$\frac{d}{dx_4} \int d\tau \{\pi_{4\tau}\xi_\tau\} = 2 \int d\tau \widetilde{L}.$$

Учитывая это, выберем в качестве функционала Четаева $\overline{V} = i\widetilde{\varepsilon} \int d\tau \{\pi_{4\tau}\xi_\tau\}$ и определим область неустойчивости неравенствами $\widetilde{\varepsilon} < 0$ и $i \int d\tau \{\pi_{4\tau}\xi_\tau\} < 0$.

Тогда для выбранного нами случая $\vec{A} = 0$ будет

$$\dot{\overline{V}} = -2\widetilde{\varepsilon} \int d\tau \widetilde{L} = -2\widetilde{\varepsilon}(V - W).$$

На основании этого можно утверждать, что если условия положительной определенности $\widetilde{\varepsilon}$ нарушаются в некоторой области, в которой V и W имеют противоположные знаки, то исследуемое стационарное состояние неустойчиво.

Существование заряда и необходимость источников

Выясним теперь, при каких условиях частицы в нашей теории будут иметь заряд. Необходимым для этого является кулоновская асимптотика поля, т. е. $\Phi \sim \dfrac{1}{r}$ при $r \to \infty$. Это утверждение является следствием того факта, что потенциал взаимодействия двух частиц в нелинейной теории совпадает с асимптотикой поля одной частицы и не зависит от используемой нелинейности [10]. Поэтому мы должны определить характер поведения поля Φ при $r \to \infty$. Так как при $\vec{H} = 0$ инвариант $v = 0$, то оставшиеся два инварианта u, s приводят к следующему уравнению для Φ в сферически — симметричном случае

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 F_u' \frac{d\Phi}{dr} \right) = 2F_s' \Phi. \tag{3}$$

Введя переменную $x = \dfrac{1}{r}$ и представив $\Phi(r) = y(x)$ в виде ряда по степеням x, т. е. $y(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$, подставим это разложение в уравнение (3):

$$x^4 [F_u'(0)(2b + 6cx + \ldots) + \ldots] = -2 \Big[F_s'(0) + F_s''(0) y^2 + \\ + \frac{1}{2} F_s'''(0) y^4 + F_{su}''(0) u + \ldots \Big] y.$$

Поскольку для существования заряда необходимо, чтобы $a \neq 0$, то наименьшая степень x в выражении справа нечетна, и поэтому $b = 0$. Значит, наименьшая степень x слева есть x^5 и чтобы она была такой же справа при $a \neq 0$ необходимо, чтобы $F_s'(0) = F_s''(0) = 0$. Поэтому в предельном линейном случае вкладом инварианта s можно пренебречь, т. е. линейные уравнения будут совпадать с уравнениями Максвелла. Тем самым, если бы мы не знали уравнений Максвелла, то при рассмотрении нелинейного векторного поля постулата устойчивости и закона Кулона оказалось бы достаточно для их обоснования в предельном линейном случае.

Но как оказывается, найденные условия устойчивости (1, 2) позволяют утверждать и большее, ибо они обнаруживают противоречие с условиями существования частицеподобных решений. Действительно, из уравнений движения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{-F'_u F_{\mu\nu} + F'_v (F^t_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) F^t_{\mu\nu}\} + 2F'_s A_\nu = 0$$

следует, что статическое поле подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\{F'_u\vec{H} + 4F'_v(\vec{E}\vec{H})\vec{E}\} + 2F'_s\vec{A} = 0, \\ &\operatorname{div}\{F'_u\vec{E} - 4F'_v(\vec{E}\vec{H})\vec{H}\} + 2F'_s\Phi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь обратим внимание на то, что из условий устойчивости вытекают неравенства $F'_u > 0$ и $F'_s > 0$. В самом деле, если мы выберем $f=0$, $\vec{e}\perp\vec{H}$ и $\vec{e}\perp\vec{E}$, то из $V>0$ находим, что $F'_u>0$. Если же взять $\vec{e}=0$, то получим, что $F'_s + 2F''_s\Phi^2 > 0$. В то же время, если положить $\vec{a}=\nabla\psi$, то из $W>0$ вытекает, что $F'_s - 2F''_s(\vec{A})^2 > 0$. Последние же два неравенства обязательно предполагают положительность F'_s, независимо от знака F''_s.

Умножая теперь уравнения поля (4) соответственно на $\vec{A}$ и Φ и интегрируя по всему пространству, после преобразования объемных интегралов от дивергенций в поверхностные, исчезающие в силу частицеподобности решений, получим

$$\int d\tau\{F'_u(\vec{E})^2 - 4F'_v(\vec{E}\vec{H})^2\} + \int d\tau\{2F'_s\Phi^2\} = 0,$$

$$\int d\tau\{F'_u(\vec{H})^2 + 4F'_v(\vec{E}\vec{H})^2\} + \int d\tau\{2F'_s(\vec{A})^2\} = 0.$$

Сложив эти уравнения, найдем, что

$$\int d\tau\{F'_u(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\} + \int d\tau\{2F'_s(\vec{A}^2 + \Phi^2)\} = 0.$$

Но если $F'_u > 0$ и $F'_s > 0$, то слева стоит положительная величина, что и приводит к противоречию. Таким образом, мы приходим к выводу, что не существует стабильных образований, локализованных в некоторой конечной области пространства и сдерживаемых натяжениями единственного векторного поля (самодействие)*. Значит, должно существовать некоторое второе поле, порождающее данное векторное, и такое, что вся система в целом устойчива.

Так, постулат устойчивости с необходимостью заставляет отказаться от использования только векторного поля для описания зарядовых свойств элементарных частиц.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за полезные советы и поддержку в решении этой задачи.

* Можно было бы думать, что учет квантовых особенностей материи существенно изменит этот результат, ведь классический атом водорода тоже неустойчив. Но скорее всего это не так, ибо здесь речь идет о собственном поле элементарной частицы, на которое квантование почти не оказывает влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mie G. Ann. Phys., 37, 511, 1912; 39, 1, 1912; 40, 1, 1913.
2. Born M. Proc. Roy. Soc. A143, 410, 1934.
3. Born M., Infekd L. Proc. Roy. Soc., A144, 425, 1934.
4. Dirac P. A. Proc. Roy. Soc., A209, 291, 1951; A212, 330, 1952.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1946.
6. Богуславский С. А. Избранные труды по физике. М., Физматгиз, 1961, стр. 123.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
8. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957.
9. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
10. Rosen N., Rosenstock H. B. Phys. Rev., 85, 257, 1952.

Поступила в редакцию
29. 10 1964 г.

Кафедра
теоретической физики