

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1966

621.373.423.01

О. А. КУРДЮМОВ, И. И. МИНАКОВА

## ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В ТРЕХКОНТУРНОЙ СИСТЕМЕ

Теоретически рассматриваются режимы работы генератора с тремя связанными контурами. Получены уравнения частотных и амплитудных кривых. Рассмотрены различные типы этих кривых для некоторых случаев расстроек парциальных частот.

### Введение

Значительное количество теоретических и экспериментальных работ посвящено задаче стабилизации частоты автогенераторов затягиванием дополнительным контуром [1—8]. Однако ни в одной из теоретических работ не ставился вопрос об учете влияния линии связи между основным и дополнительным контурами. Это и не вызывалось практическими потребностями, так как для низких частот, вплоть до дециметрового диапазона, влиянием этой линии можно было пренебрегать.

С продвижением техники в область сантиметровых и миллиметровых волн это пренебрежение оказывается незаконным, так как линия связи в системе с распределенными постоянными имеет значительную добротность и должна учитываться, как дополнительная — третья степень свободы. Вместе с тем работы технического характера, выполненные в этих диапазонах [5—8], показали, что система с тремя степенями свободы обладает определенными преимуществами перед системой с двумя степенями свободы.

Наличие дополнительной степени свободы приводит к появлению третьей устойчивой ветви нормальных частот, где коэффициент стабилизации частоты может быть выше, чем в двухконтурной системе (так как взаимодействие двух контуров при синхронизме сильнее, чем при отстройке от него).

Теоретические исследования автоколебательной системы с тремя степенями свободы, с целью выяснения возможности ее применения для стабилизации частоты, частично проведены в работе [9].

В этой работе проведено исследование стационарного режима (без вывода уравнений установления) и не исследована его устойчивость. Уравнение частот не получено в обычно принятой форме. Однако через промежуточные величины рассчитаны и построены частотные кривые для случая, когда изменяется только парциальная частота первого контура. Сравняются два способа вывода энергии в нагрузку из первого контура (активного) и из второго (линии связи).

Более подробно подобные системы пока не рассматривались. В связи с практическим интересом, который представляет трехконтурная система для стабилизации частоты в диапазоне СВЧ, в настоящей работе было проведено исследование некоторых закономерностей автоколебательных режимов в системе с тремя контурами для различных случаев расстройек их парциальных частот.

### Уравнения установления и стационарного режима

Генератор СВЧ с тремя связанными объемными резонаторами может быть представлен эквивалентной схемой (рис. 1), где  $z_0$  — эквивалентное внутреннее сопротивление генератора, а  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  — реактивные сопротивления связи.

Основные черты рассматриваемых закономерностей могут быть выяснены для случая мягкого режима, когда для малых сигналов колебательную характеристику генератора аппроксимируем в виде кубического полинома. Полагая колебания в контурах синусоидальными

$$x = a \sin \omega t,$$

$$y = b \sin (\omega t - \varphi), \quad (1)$$

$$z = c \sin (\omega t - \psi)$$

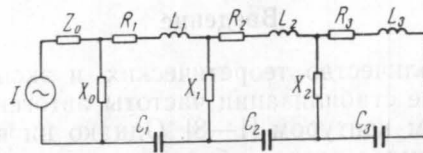


Рис. 1

и используя метод медленно меняющихся амплитуд, получим уравнения установления в виде

$$\dot{a} = -\frac{\omega}{2} \left( \delta_0 a + \frac{\delta_1}{4} a^3 + k_{11} b \sin \varphi \right),$$

$$\dot{b} = -\frac{\omega}{2} (\delta_2 b - k_{12} a \sin \varphi - k_{21} c \sin \psi),$$

$$\dot{c} = -\frac{\omega}{2} (\delta_3 c + k_{22} b \sin \psi), \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega}{2} \left( \eta - \xi_2 + k_{12} \frac{a}{b} \cos \varphi + k_{21} \frac{c}{b} \cos \psi \right),$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\omega}{2} \left( \eta + k_{22} \frac{b}{c} \cos \psi \right),$$

$$0 = \eta - \xi_1 + k_{11} \frac{b}{a} \cos \varphi.$$

В уравнениях (2) введены следующие обозначения:

$$\psi = \varphi - \psi_1,$$

$$\eta = \frac{\omega^2 - \nu_3^2}{\omega^2}, \quad \xi_1 = \frac{\nu_1^2 - \nu_3^2}{\omega^2}, \quad \xi_2 = \frac{\nu_2^2 - \nu_3^2}{\omega^2}, \quad (3)$$

причем  $\omega$  — нормальная частота, а  $\nu_i$  — парциальная частота  $i$ -го контура. Расстройки нормальной и парциальных частот определяются относительно парциальной частоты третьего контура.  $\delta_0$  и  $\delta_1$  — инкремент и декремент затухания парциальной одноконтурной автоколебательной системы [см., например, [3] — формулы (2,19) и (2,20)].  $\delta_2$  и  $\delta_3$  — декременты затухания второго и третьего контуров.

$$k_{11} = \frac{X_1}{\rho_2}; \quad k_{12} = \frac{X_1}{\rho_1}; \quad k_{21} = \frac{X_2}{\rho_3}; \quad k_{22} = \frac{X_2}{\rho_2}; \quad k_1^2 = k_{11}k_{12} \quad (4)$$

$$k_2^2 = k_{21}k_{22}$$

частичные коэффициенты связи, а  $\rho_i$  — характеристическое сопротивление  $i$ -го контура.

Из уравнений (2) при стационарном режиме можно получить амплитуду колебаний в первом контуре

$$a_0 = 2 \sqrt{\frac{1}{\delta_1} \left[ -\delta_0 - \frac{(\eta - \xi_1) \left( \delta_2 + \frac{k_2^2 \delta_3}{\eta^2 + \delta_3^2} \right)}{\eta - \xi_2 - \frac{k_2^2 \eta}{\eta^2 + \delta_3^2}} \right]} \quad (5)$$

и пересчитанные в первый контур отношения квадратов амплитуд колебаний во втором и третьем контурах к квадрату амплитуды колебаний в первом контуре:

$$m_1 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{b_0^2}{a_0^2} = \frac{\eta - \xi_1}{\eta - \xi_2 - \frac{k_2^2 \eta}{\eta^2 + \delta_3^2}} = \frac{k_1^2}{\left( \eta - \xi_2 - \frac{k_2^2 \eta}{\eta^2 + \delta_3^2} \right)^2 + \left( \delta_2 + \frac{k_2^2 \delta_3}{\eta^2 + \delta_3^2} \right)^2} \quad (6)$$

$$m_1 m_2 = \frac{k_{11} k_2}{k_{12}} \frac{C_0^2}{a_0^2} = \frac{K_2^2}{\eta^2 + \delta_3^2} m_1. \quad (7)$$

Из уравнений стационарного режима находится также уравнение нормальных частот. Это уравнение пятой степени относительно  $\eta$ , и проанализировать его путем исследования коэффициентов достаточно сложно. Однако некоторые сведения об уравнении можно получить более простым путем при синхронизме парциальных частот ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ). В этом случае уравнение нормальных частот имеет вид

$$\eta [\eta^4 + \eta^2 (\delta_2^2 + \delta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \delta_2 \delta_3)^2 + k_1^2 (k_2^2 - \delta_3^2)] = 0 \quad (8)$$

Это уравнение имеет пять корней, из которых три соответствуют устойчивым нормальным частотам, а два неустойчивым. Из анализа характера этих корней можно сделать выводы о том, как соотношения между параметрами системы определяют количество действительных корней уравнения частот вблизи синхронизма.

В частности, один действительный корень будет при:

$$a) \quad k_1^2 < \left\{ \begin{array}{l} \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2k_2^2 \\ \frac{(k_2^2 + \delta_2 \delta_3)^2}{\delta_3^2 - k_2^2} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$б) \quad k_1^2 < (\delta_2 + \delta_3) (\delta_2 - \delta_3 + 2k_2).$$

Три действительных корня при:

$$k_1^2 > (\delta_2 + \delta_3)(\delta_2 - \delta_3 + 2k_2), \quad (10)$$

$$k_1^2 > \frac{(k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2}{\delta_3^2 - k_2^2}.$$

Пять действительных корней при:

$$k_1^2 > \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2k_2^2,$$

$$k_1^2 > (\delta_2 + \delta_3)(\delta_2 - \delta_3 + 2k_2), \quad (11)$$

$$k_1^2 < \frac{(k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2}{\delta_3^2 - k_2^2}.$$

### Частотные кривые

Зависимость характера частотных кривых от коэффициентов уравнений частот при любых расстройках между парциальными частотами контуров наиболее просто можно проанализировать для трех частных случаев.

1. Изменяется только частота первого контура ( $\xi_2=0$ ). В этом случае можно разрешить уравнение частот относительно расстройки парциальных частот следующим образом:

$$\xi_1 = \eta \frac{\eta^4 + \eta^2(\delta_2^2 + \delta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2 + k_1^2(k_2^2 - \delta_3^2)}{\eta^4 + \eta^2(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2}. \quad (12)$$

2. Изменяется только частота второго контура ( $\xi_1=0$ ). Для  $\xi_2$  в этом случае можно получить квадратное уравнение

$$\xi_2^2(\eta^2 + \delta_3^2) - \frac{\xi_2}{\eta} [2\eta^4 + \eta^2(2\delta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) - \delta_3^2 k_1^2] + \eta^4 + \eta^2(\delta_2^2 + \delta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2 + k_1^2(k_2^2 - \delta_3^2) = 0. \quad (13)$$

3. Изменяются одновременно и одинаково парциальные частоты первого и второго контуров (что равнозначно изменению частоты 3-го контура при постоянных частотах первых двух контуров).

Если в этом случае ввести обозначение

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi,$$

то получим кубическое уравнение

$$\xi^3 \frac{\eta^2 + \delta_3^2}{\eta} - \xi^2 (3\eta^2 + 3\delta_3^2 - 2k_2^2) + \frac{\xi}{\eta} [3\eta^4 + \eta^2(\delta_2^2 + 3\delta_3^2 - k_1^2 - 4k_2^2) + (k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2 - \delta_3^2 k_1^2] - \eta^4 - \eta^2(\delta_2^2 + \delta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) - (k_2^2 + \delta_2\delta_3)^2 - k_1^2(k_2^2 - \delta_3^2) = 0. \quad (14)$$

Будем называть в дальнейшем частотные и амплитудные кривые кривыми первого, второго или третьего типа, соответственно номеру изменяющейся парциальной частоты. Для наглядности целесообразно ввести понятие парциальной двухконтурной системы. Именно, систему

первого и второго контура назовем первой парциальной системой, а систему второго и третьего контуров — второй парциальной системой. После такого выделения парциальных систем процессы в системе можно качественно рассматривать как результат взаимодействия одной из них с контуром, не вошедшим в эту систему.

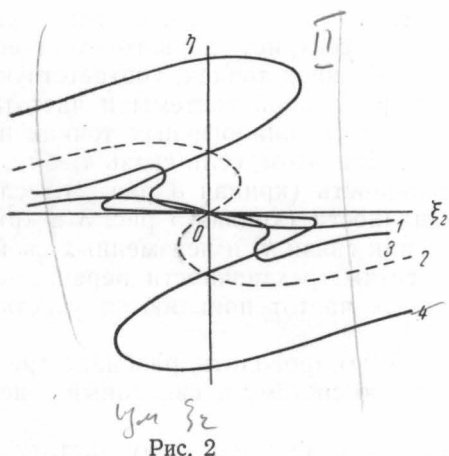


Рис. 2

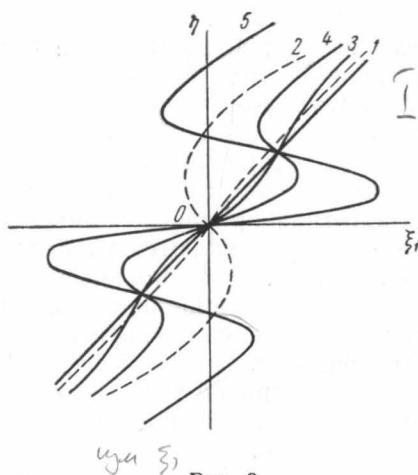


Рис. 3

Используя уравнения (12)—(14), можно построить графики трех типов частотных кривых (рис. 2—4). Не исследуя подробно условий устойчивости, что для трехконтурной системы представляется весьма сложной задачей, можно, однако, из общей теории автоколебательных систем указать неустойчивые участки частотных кривых.

Анализ частотных кривых первого и второго типа (рис. 2 и 3) физически наглядно можно провести исходя из представлений о взаимодействии второй парциальной системы и первого контура.

Вдали от синхронизма парциальных частот контуров частотные кривые однозначны, при этом нормальная частота трехконтурной системы близка к парциальной частоте первого контура. Поэтому асимптотами для ветвей частотных кривых, уходящих в бесконечность, будут: для кривых первого типа — биссектриса первого и третьего квадрантов (рис. 3), а для кривых второго типа — ось абсцисс (рис. 2). Для области расстроек, близкой к синхронизму парциальных частот контуров, все кривые, в зависимости от свойств парциальных систем, от числа действительных значений нормальных частот можно разделить на три вида: кривые, однозначные при любых расстройках; кривые, имеющие участки трехзначности, и кривые с трех- и пятизначными участками.

При связях  $k_1 < k_{1\text{кр}}$  и  $k_2 < k_{2\text{кр}}$  частотные кривые сохраняют однозначность при любых расстройках (кривые 1 рис. 2—3). При связи

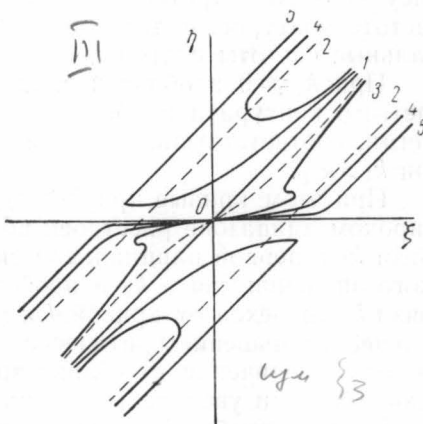


Рис. 4

$k_2 < k_{2\text{кр}}$  вторую парциальную систему можно рассматривать как эквивалентный контур, имеющий определенную собственную чистоту. Поэтому при связи  $k_1 > k_{1\text{кр}}$ , т. е. при связи больше критической между первым контуром и второй парциальной системой на частотной кривой вблизи точки синхронизма парциальных частот появляется участок трехзначности (кривые 2 рис. 2 и 3). Частотные кривые при этом аналогичны кривым двухконтурной системы. Если вторая парциальная система имеет две нормальные частоты, т. е.  $k_2 > k_{2\text{кр}}$ , то частотная кривая первого типа начинает пересекать биссектрису первого—третьего квадранта, кроме точки синхронизма еще в двух точках, соответствующих совпадению нормальных частот парциальной системы и частоты первого контура. На кривых второго типа в аналогичных точках на частотных кривых появляются перегибы. При этом, если связь  $k_1 < k_{1\text{кр}}$ , то частотная кривая сохраняет однозначность (кривая 3 рис. 2), если  $k_1 > k_{1\text{кр}}$ , то появляются участки трехзначности (кривая 3 рис. 3 и кривая 4 рис. 2). При дальнейшем увеличении связи  $k_1$  и неизменных свойствах второй парциальной системы участки трехзначности перекрываются и вблизи синхронизма парциальных частот появляются участки пятизначности.

Анализ кривой третьего типа естественно проводить, разбивая трехконтурную систему на первую парциальную систему и связанный с ней третий контур.

Если связь  $k_1 < k_{1\text{кр}}$ , то парциальная система имеет одну частоту и частотные кривые для связи  $k_2 < k_{2\text{кр}}$  (кривая 1 рис. 4) и для связи  $k_2 > k_{2\text{кр}}$  (кривая 3 рис. 4) имеют характер, аналогичный частотным кривым первого типа. Картина резко усложняется, если  $k_1 > k_{1\text{кр}}$  и первая парциальная система имеет две нормальные частоты. При выбранных координатах кривая частот при  $k_2 \rightarrow 0$  распадается на три прямые — биссектрису первого и третьего квадрантов, соответствующую парциальной частоте контуров, и две параллельные ей прямые, изображающие нормальные частоты системы.

При  $k_2 \neq 0$  в области синхронизма нормальных частот и частоты третьего контура и на бесконечности появляются переходы между линиями, соответствующими трем частотам первой парциальной системы при  $k_1 > k_{1\text{кр}}$ .

При этом кривые при  $k_2 > k_{2\text{кр}}$  могут иметь пятизначные участки в широком диапазоне расстроек вблизи области синхронизма. Изменение связи  $k_1$  в первой парциальной системе приводит к изменению критического значения связи  $k_2$  и наоборот. Благодаря этому при увеличении связи  $k_1$  (переход от кривой 4 к кривой 5 рис. 4) происходит соответствующее уменьшение критического значения  $k_2$ . При  $k_1 > k_{1\text{кр}}$  и  $k_2 > k_{2\text{кр}}$  по мере увеличения  $k_2$  вблизи точки синхронизма появляется расширяющийся при увеличении  $k_2$  участок однозначности.

Более подробный анализ зависимости частотных кривых (рис. 2—4) от параметров конкретных схем будет описан в следующей работе.

### Амплитудные кривые

Рассмотрим амплитудные кривые только для случая, когда частотные кривые имеют участки пятизначности и трехзначности, так как однозначные кривые особого интереса не представляют.

Для дальнейшего целесообразно ввести коэффициенты распределения для данной работы  $t_{ij}$  (где  $i$  и  $j$  — номера контуров системы) как отношение амплитуды колебаний в  $j$ -том контуре к амплитуде колебаний в  $i$ -том контуре. Их можно выразить через величины  $m_1$  и  $m_2$  сле-

дующим образом:

$$\begin{aligned}
 t_{12} &= \sqrt{m_1} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \\
 t_{23} &= \sqrt{m_2} \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}, \\
 t_{13} &= \sqrt{m_1 m_2} \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

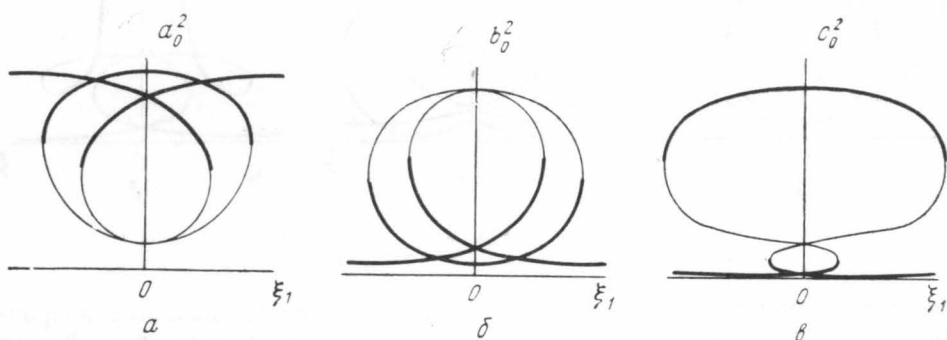


Рис. 5

В частности, для точки синхронизма, можно получить следующие простые выражения:

$$\begin{aligned}
 t_{12} &= \frac{k_1}{\delta_2 + \frac{k_2^2}{\delta_3}} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \\
 t_{23} &= \frac{k_2}{\delta_3} \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}, \\
 t_{13} &= \frac{k_1 k_2}{k_2^2 + \delta_2 \delta_3} \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Так как по физическому смыслу коэффициенты распределения в автоколебательной системе характеризуют взаимодействие двух контуров, то этими величинами удобно пользоваться при анализе амплитудных кривых.

Зависимости амплитуд колебаний в контурах от расстройки парциальной частоты первого контура приведены на рис. 5—7. Анализировать заведомо неустойчивые участки кривых (тонкие линии) не имеет смысла. На крайних ветвях нормальных частот коэффициент  $t_{13}$  мал, а  $t_{12}$  достаточно велик (см. (6) и (7)), поэтому основное влияние на частоту и амплитуду колебаний имеет второй контур. В связи с этим амплитудные кривые для первого и второго контуров имеют характер кривых двухконтурной системы с сильной связью. Зависимость амплитуды колебаний в третьем контуре на крайних ветвях аналогична зависимости для второго контура, так как парциальные частоты этих контуров равны и, следовательно, амплитуда колебаний в третьем контуре

определяется их амплитудой во втором. При этом  $t_{23}$  мал и третий контур не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний второго контура, так как частота колебаний далека от парциальных частот контуров. На средней ветви нормальных частот третий контур при максимальной связанности всех трех контуров сильно влияет на частоту и амплитуду автоколебаний. Уменьшение амплитуды колеба-

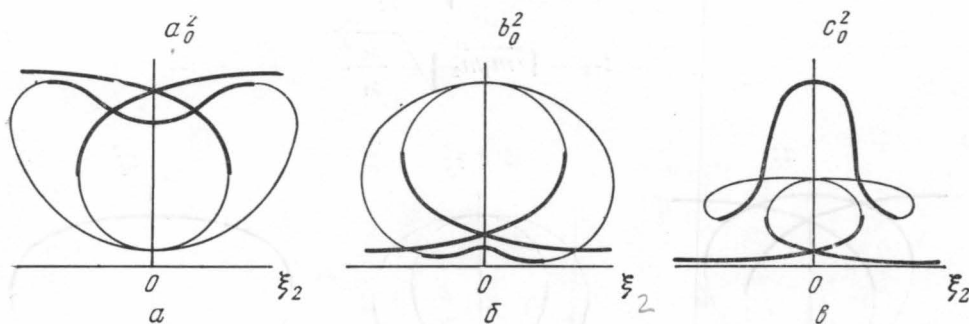


Рис. 6

ний в первом контуре при отстройке от синхронизма связано с возрастанием вносимого в первый контур активного сопротивления. Форма средней ветви амплитудной кривой в третьем контуре аналогична кривой в первом,  $t_{13}$  велик и несколько уменьшается при отстройке от синхронизма. Во втором контуре при синхронизме — минимум амплитуды,  $t_{23}$  велик и третий контур «отсасывает» из второго максимальное количество энергии.

Зависимости амплитуд колебаний в контурах от расстройки второго контура приведены на рис. 6.

Амплитуда колебаний на крайних ветвях нормальных частот зависит от расстройки так же, как для кривых первого типа. Это объясняется тем, что, как указывалось для кривых первого типа, влияние третьего контура вдали от синхронизма нормальной частоты незначительно, и система ведет себя по существу как двухконтурная.

Зависимости  $a_0^2$  и  $b_0^2$  от  $\xi_2$  на средней ветви нормальных частот противоположны соответствующим зависимостям от  $\xi_1$ , так как в этом случае вносимое в первый контур сопротивление минимально не при синхронизме парциальных частот, а при отстройке второго контура, когда  $t_{12}$  уменьшается. Имеет место «отсос» энергии из первого контура во второй. Амплитуда колебаний в третьем контуре на средней ветви нормальных частот имеет максимум при синхронизме, как и для кривых первого типа. Однако зависимость от расстройки в этом случае будет значительно острее, так как можно считать, что амплитуда колебаний  $c_0^2$  изменяется по «резонансной кривой» второго контура, тогда как при расстройке первого контура она изменяется по более широкой «резонансной кривой» второй парциальной системы.

Зависимости амплитуд колебаний в контурах от одновременной расстройки синхронных парциальных частот первого и второго контуров приведены на рис. 7. Амплитуда колебаний на крайних ветвях нормальных частот меняется так же, как для кривых первого и второго типа. Амплитуда колебаний во втором контуре на средней ветви нормальных частот минимальна при синхронизме, а в третьем контуре максимальна, что объясняется «отсосом» энергии из второго контура в



третий. Модуль коэффициента распределения  $t_{12}$  при синхронизме уменьшается, вследствие увеличения влияния третьего контура  $t_{23}$  увеличивается. Амплитуда колебаний в третьем контуре в этом случае, как и для кривых первого типа, имеет сравнительно плоскую вершину, так что можно считать, что она изменяется по «резонансной кривой» первой парциальной системы.

Зависимость  $a_0^2$  от  $\xi$  может иметь либо такой характер, как при расстройке второго контура (сплошная кривая рис. 7), либо как при

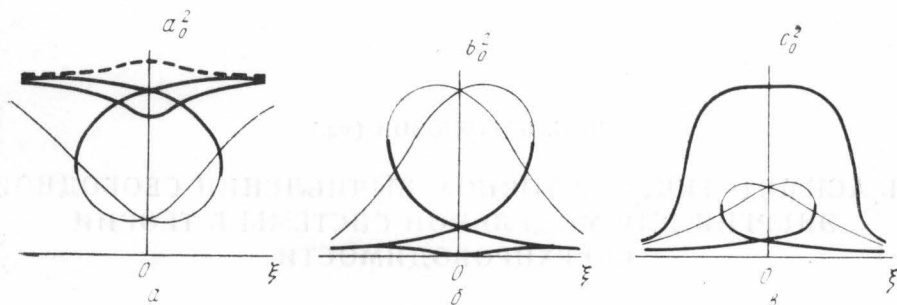


Рис. 7

расстройке первого контура (пунктирная кривая рис. 7). Последняя имеет место при больших связях в системе (низком характеристическом сопротивлении второго контура), когда основное влияние на амплитуду при синхронизме имеет третий контур ( $t_{12}$  мал, взаимодействие первого и второго контуров слабое.) При увеличении  $\rho_2$  и соответствующем понижении связей  $k_1^2$  и  $k_2^2$  может иметь место обратная зависимость, объясняющаяся тем, что  $t_{12}$  увеличивается, взаимодействие становится значительно сильнее, и основное влияние на амплитуду  $a_0^2$  оказывает теперь второй контур.

При промежуточном значении  $\rho_2$  может быть получена амплитуда  $a_0^2$ , не зависящая от расстройки  $\xi$  на средней ветви нормальных частот.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов Р. В. ЖТФ, 25, № 14, 2492, 1955.
2. Ирисов Е. А. «Радиотехника и электроника», № 2, 74, 1958.
3. Ирисов Е. А. Кандидатская диссертация. МГУ, 1958.
4. Уткин Г. М., Хрюнов А. В. «Радиотехника и электроника», № 3, 448, 1962.
5. Кузнецов Ю. И., Парышкуро Л. А. «Вопросы радиоэлектроники», сер. электроника, № 3, 1960.
6. Shelton E. J., Trans IRE, ED—1, No. 4, 30, 1954.
7. Rabinowitz S. J., Trans IRE MTT—2, No. 3, 23, 1954.
8. Goldstein J., Trans IRE, MTT—5, No. 1, 57, 1957.
9. Уткин Г. М., Хрюнов А. В., Снедков Б. А. Теоретическое и экспериментальное исследование двух- и трехконтурного отражательного клистрона с затягиванием. Отчет по научно-исследовательской работе № 23386, 15, 5, 1961.

Поступила в редакцию  
2. 10 1964 г.

Кафедра  
физики колебаний