ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1966

УДК 537.312.62

Н. Н. БОГОЛЮБОВ (мл.)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрено асимптотически точное решение для модельной системы бардиновского типа. Построен новый метод, позволяющий математически строго показать, что вычисленные свободные энергии на единицу объема с помощью модельного и аппроксимирующего гамильтонианов асимптотически мало отличаются друг от друга. Полученные результаты справедливы как при $\theta>0$, так и при $\theta=0$.

В этой работе рассмотрим простейшую модельную систему, изучаемую в теории сверхпроводимости, которая характеризуется гамильтонианом с фермиевскими амплитудами a_f, a_f^+

$$H = \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \frac{1}{2V} \sum_{f,f'} \lambda(f)\,\lambda(f')\, a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}. \qquad (1)$$

Мы используем общепринятые обозначения, а именно: $f=(p, s)$, $-f=(-p, -s)$, $s=\pm 1$, p — вектор импульса. При фиксировании нормировочного объема $V=L^3$

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z,$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа.

Наконец, $T(f) = \dfrac{p^2}{2m} - \mu$, где μ — химический потенциал.

Для обычной модели Бардина

$$\lambda(f) = \begin{cases} J\,\epsilon(s) = \text{const} \ \text{для} \ \left|\dfrac{p^2}{2m} - \mu\right| \leqslant 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{для} \ \left|\dfrac{p^2}{2m} - \mu\right| > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\epsilon(s) = \pm 1$$

В предполагаемом исследовании нам не придется использовать эти конкретные свойства функций $T(f)$, $\lambda(f)$. Вполне достаточным является выполнение следующих условий.

Функции $\lambda(f)$ и $T(f)$ — вещественны, $\lambda(-f)=-\lambda(f)$,

$$\frac{1}{2V}\sum_f |\lambda_f| \leqslant k_1 = \text{const},\ \frac{1}{V}\sum_f |T(f)\lambda_f| \leqslant k_2 = \text{const},$$

$$\frac{1}{V}\sum_f \lambda_f^2 \leqslant k_3 = \text{const (при } V\to\infty).$$

Свободная энергия на единицу объема, соответствующая системе невзаимодействующих частиц, конечна.

Эти условия заведомо выполняются в случае (2).

В работе [1] был предложен способ вычисления свободной энергии такой динамической системы, основанный на введении «аппроксимирующего гамильтониана»:

$$H^0=\sum_f T(f)\,a_f^+a_f-\left\{\sum_f \lambda(f)\,(Ca_{-f}a_f+c^*a_f^+a_{-f}^+)\right\}+2CC^*,$$

где C и C^* — с-числа.

Поскольку H^0 является квадратичной формой из ферми операторов, то такой аппроксимирующий гамильтониан можно привести к диагональной форме и непосредственно вычислить свободную энергию на единицу объема

$$f_{H^0}=-\frac{\theta}{V}\ln Spe^{-\frac{H^0}{\theta}}.$$

Входящую в H^0 комплексную постоянную C мы должны определить, следуя указанным работам из условия минимальности $f_{H^0}(C)$; $f_{H^0}(C)=$ $=\min$, откуда получим $\frac{\partial f_{H^0}}{\partial C}=0$, т. е.

$$C=\langle J\rangle_{H^0}=\frac{SpJe^{-\frac{H^0}{\theta}}}{Spe^{-\frac{H^0}{\theta}}}.$$

Здесь

$$J=\frac{1}{2V}\sum_f \lambda(f)\,a_f^+a_{-f}^+.$$

Там же с помощью теории возмущений было показано, что вычисленная таким образом f_{H^0}, отличается от истинной свободной энергии f_H (для системы с гамильтонианом H) на единицу объема на величины, исчезающие при $V\to\infty$. Поскольку вопрос о сходимости рядов теории возмущений там не был исследован, соответствующий результат о том, что f_{H^0} равняется f_H асимптотически точно нуждался, естественно, в более строгом обосновании.

Поэтому в работе [2] поставленная задача была рассмотрена без применения теории возмущений. В этой работе была изучена цепочка зацепляющихся уравнений для функций Грина и было показано, что функции Грина для «интегрируемой задачи» с гамильтонианом H^0 удовлетворяют всей этой цепочке уравнений для точного гамильтониана H с ошибкой порядка $\left(\frac{1}{V}\right)$.

Однако, разумеется, с чисто математической точки зрения и такого рода рассуждения не являются вполне строгими. Строго говоря, здесь надо было бы показать, что функции Грина для системы с гамильтонианом H^0 асимптотически равны соответствующим функциям Грина для системы с гамильтонианом H, а это свойство не вытекает непосредственно из того факта, что функции Грина для H^0 удовлетворяют всем уравнениям функций Грина для H с ошибкой порядка $\left(\frac{1}{V}\right)$.

Ввиду важности рассмотрения модельной системы с возможно большей полнотой для теории сверхпроводимости, и, с другой стороны, ее относительной простоты она заслуживает того, чтобы ее изучение провести на вполне строгом математическом уровне.

В такой чисто математической постановке задача была изучена [3, 4] в случае нулевой температуры, где и было показано, что действительно система с аппроксимирующим гамильтонианом H^0 дает асимптотически точный результат для системы с гамильтонианом H. Развитый в этих исследованиях метод обобщен в работе [5] на случай более сложных модельных систем (в которых пары взаимодействуют не в s-состояниях, а в состояниях с более высокими значениями момента количества движения, например, в p-, d- и т. д. состояниях), однако и там также рассматривался случай нулевой температуры.

Перенесение указанного метода на случай $(\theta \neq 0)$ температур, отличных от нуля, наталкивается на ряд принципиальных трудностей, которые до настоящего времени не были преодолены.

Целью настоящей работы является построение нового метода, позволяющего доказать асимптотическую малость разности $f_{H^0} - f_H$ и при $\theta > 0$.

Мы будем исходить из гамильтониана более общего вида, содержащего комплексный параметр ν. (Этот гамильтониан при $\nu = 0$ совпадает с гамильтонианом (1), $\Gamma_{\nu=0} = H$.)

$$\Gamma = T - 2VJJ^{+} - (\nu J + \nu^{*} J^{+})V, \tag{3}$$

где

$$T = \sum_{(f)} T_f a_f^{+} a_f.$$

Соответственно «аппроксимирующий» гамильтониан будет

$$\Gamma^{\circ} = T - 2V(CJ^{+} + C^{*}J) - V(\nu J + \nu^{+} J^{+}) + 2V|C|^2, \tag{4}$$

отсюда видно, что

$$\Gamma = \Gamma^0 + \mathfrak{A}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{A} = -2V(J - C)(J^{+} - C^{*}). \tag{6}$$

Найдем сейчас оценку для $(f_{\Gamma^\circ} - f_{\Gamma})$ разности свободных энергий на единицу объема через посредство средних от величины типа (6).

Для этого нам удобнее будет ввести вспомогательный «промежуточный гамильтониан» $\Gamma^t = \Gamma^0 + t\,\mathfrak{A}$ (при $t=0$, $\Gamma^t = \Gamma^0$, $t=1$, $\Gamma^t = \Gamma$). Входящая в Γ^t постоянная C считается фиксированной (не зависит от t).

Рассмотрим конфигурационный интеграл и свободную энергию для «промежуточного» гамильтониана

$$Q_t = Sp\, e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}, \quad f_t(C) = -\frac{\theta}{V} \ln Q_t, \quad Q_t = e^{-\frac{Vf_t}{\theta}}. \tag{7}$$

Заметим, что $f_1(C) = f_\Gamma$ и потому не зависит от C, а $f_{\Gamma^\circ} = \min_{(c)} f_0(C)$.

Дифференцируя равенство (7) два раза по t, получим

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial t^2} = -\frac{V}{\theta}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} Q_t + \frac{V^2}{\theta^2}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^2 Q_t. \tag{8}$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial t^2} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^1 Sp\{\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\}\, d\tau, \tag{9}$$

и сравнивая с предыдущей формулой, имеем

$$-\frac{V}{\theta}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} + \frac{V^2}{\theta^2}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2 Q}\int_0^1 Sp\{\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\}\, d\tau, \tag{10}$$

принимая во внимание

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{1}{V}\frac{Sp\,\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}}{Sp e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}} = \frac{1}{V}\langle\mathfrak{A}\rangle,$$

находим

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} = \frac{1}{\theta V}\left\{\frac{1}{Q}\int_0^1 Sp\,\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathfrak{A}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\, d\tau - \langle\mathfrak{A}\rangle^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{\theta V Q}\int_0^1 Sp\{\mathfrak{B}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}\mathfrak{B}e^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\}\, d\tau,$$

где $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \langle\mathfrak{A}\rangle$.

Перейдем к матричному представлению, в котором промежуточный гамильтониан Γ_t диагонален, тогда

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} = \frac{1}{\theta V Q}\int_0^1 \sum_{n,m} \mathfrak{B}_{nm}\,\mathfrak{B}_{mn}\, e^{-\frac{(E^t_m - E^t_n)}{\theta}\tau} \times$$

$$\times\, d\tau^{-\frac{E^t_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta V Q}\int_0^1 \sum_{n,m} |\mathfrak{B}_{nm}|^2\, e^{-\frac{(E^t_m - E^t_n)}{\theta}\tau - \frac{E^t_n}{\theta}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\theta V Q}\int_0^1 \sum_{n,m} |\mathfrak{B}_{nm}|^2\, e^{-\frac{(E^t_m - E^t_n)}{\theta}\tau - \frac{E^t_n}{\theta}} \geqslant 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} \geqslant 0.$$

Из этого неравенства следует, что $\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{1}{V}\langle\mathfrak{A}\rangle_t$ уменьшается с увеличением параметра t.

Имеем далее

$$f_{\Gamma^\circ}(C)-f_\Gamma=-\int\limits_0^1\frac{\partial f_t}{\partial t}\,dt=-\int\limits_0^1\frac{\langle\mathfrak{A}\rangle}{V}\,dt\geqslant 0.$$

Поскольку это соотношение верно для всех C, имеем также

$$\min_{(c)} f_0(C)\geqslant f_\Gamma,\ \text{т. е. } f_{\Gamma^\circ}\geqslant f_\Gamma.$$

Проинтегрируем неравенство

$$(\langle\mathfrak{A}\rangle_t)\geqslant(\langle\mathfrak{A}\rangle_\Gamma),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Подставляя вместо $\mathfrak{A}$ выражение (6), убеждаемся, что для любого C справедливо

$$f_{\Gamma^\circ}(c)-f_\Gamma\leqslant 2<(J-C)(J^+-C^+)>_\Gamma.$$

В частности, возьмем $C=<J>_\Gamma$ и заметим, что

$$f_{\Gamma^\circ}=\min f_{\Gamma^\circ}(C)\leqslant f_{\Gamma^\circ}(\langle J\rangle_\Gamma),$$

таким образом,

$$f_{\Gamma^\circ}-f_\Gamma\leqslant f_{\Gamma^\circ}(\langle J\rangle_\Gamma)-f_\Gamma\leqslant 2\langle(J-\langle J\rangle_\Gamma)(J^+-\langle J^+\rangle_\Gamma)_\Gamma\rangle$$

и окончательно

$$0\leqslant f_{\Gamma^\circ}-f_\Gamma\leqslant 2\,\langle(J-\langle J\rangle)\,(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle^*. \tag{11}$$

Напомним сейчас нашу основную задачу — мы хотим показать, что разность $f_{\Gamma^\circ}-f_\Gamma$ является асимптотически малой при $V\to\infty$. Как видно из полученного неравенства (11), эта задача была бы решена, если бы мы смогли установить асимптотическую малость среднего

$$\langle(J-\langle J\rangle)\,(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle.$$

Наметим для этого в общих чертах схему для оценки этого среднего. Заметим прежде всего, что

$$|\,\Gamma J-J\Gamma\,|\leqslant K=\text{const},$$

где

$$K=|\nu|\,k_3+k_2+2k_1k_3.$$

Принимая во внимание, что Г-энергия всей системы должна быть пропорциональна V, естественно считать операторы Г и J, J^+ асимптотически коммутирующими.

Если бы вообще пренебречь некоммутативностью оператора Г с J и J^+, то получили бы, дифференцируя по ν и ν^*,

$$-\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*}=V\,\frac{Sp\,(JJ^+e^{-\frac{\Gamma}{\theta}})}{Spe^{-\frac{\Gamma}{\theta}}}-V\,\frac{(Sp\,Je^{-\frac{\Gamma}{\theta}})(Sp\,J^+e^{-\frac{\Gamma}{\theta}})}{(Spe^{-\frac{\Gamma}{\theta}})^2}=$$

$$=V\,\langle(J-\langle J\rangle)\,(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle,$$

т. е.

$$-\frac{\theta}{V}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*}=\langle(J-\langle J\rangle)\,(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle. \tag{12}$$

---

* Для удобства записи усреднение по гамильтониану Г обозначаем $<\ldots>_\Gamma=$ $=<\ldots>$.

При этом наша задача была бы выполнена, если бы нам удалось установить ограниченность второй производной $\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}$. Однако, к сожалению, мы этого показать не умеем. Мы располагаем только тем, что первые производные от f по ν и ν^* ограничены

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle J \rangle, \ \left| \frac{\partial f}{\partial \nu} \right| \leqslant |J| \leqslant \frac{1}{2V} \sum_f |\lambda(f)| \underset{V\to\infty}{=} k_1 = \text{const} \right).$$

К тому же, как указано выше, операторы Γ и J, J^+ некоммутативны и потому равенство (12) нуждается в уточнении.

Итак поставленную задачу — показать асимптотическую малость разности $(f_{\Gamma^0} - f_\Gamma)$ — осуществим в два этапа. Сначала найдем точную оценку для среднего $<(J - <J>)\ (J^+ - <J^+>)>$, выраженную через вторые производные от f с учетом некоммутируемости операторов Γ и J, J^+. Далее, основываясь на полученной оценке для среднего и не используя того факта, что вторые производные ограничены, разработаем способ, с помощью которого покажем асимптотическую малость искомой разности $(f_{\Gamma^0} - f_\Gamma)$ при $V \to \infty$.

Совершая преобразования, аналогичные (8—10), только с гамильтонианом Γ и дифференцируя f по ν и ν^*, придем к равенству

$$-\frac{1}{\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*} = \frac{V}{\theta^2}\int_0^1 \frac{Sp\left(De^{-\frac{\tau}{\theta}\Gamma} D^+ e^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}\Gamma}\right)d\tau}{Sp\,e^{-\frac{\Gamma}{\theta}}}, \tag{13}$$

где

$$D = J - \langle J \rangle.$$

Записывая правую часть этого равенства подробнее, имеем

$$-\frac{1}{\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*} = \frac{V}{\theta^2}\sum_{n,m}\int_0^1 D_{nm}\,e^{-\frac{\tau}{\theta}E_m} D^+_{mn}\,e^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}E_n}\,d\tau\cdot Q^{-1} =$$

$$= \frac{V}{\theta^2}\sum_{n,m}|D_{nm}|^2 \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\theta}E_m}\,d\tau^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}E_n}\cdot Q^{-1} =$$

$$= \frac{V}{\theta}\,\frac{1}{Q}\sum_{n,m}\frac{|D_{nm}|^2}{E_n - E_m}\cdot\left(e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}}\right).$$

Таким образом, всегда

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*} = V\sum_{n,m}\frac{|D_{nm}|^2}{Q}\;\frac{e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}}}{E_n - E_m} \geqslant 0. \tag{14}$$

Для дальнейших оценок мы будем пользоваться неравенством Гельдера *, которое применительно к нашему случаю удобно записывать в

---

* Неравенство Гельдера: $\left|\sum ab\right| \leqslant \left(\sum |a|^p\right)^{1/p} \times \left(\sum |b|^q\right)^{1/q}$, где $\underset{q>0}{p>0}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ должно быть $p > 1$, $q > 1$. Мы берем $p = \frac{3}{2}$ и $q = 3$.

виде:

$$\sum_k |u_k|^2 \leqslant \left(\sum_k \frac{|u_k|^2}{p_k}\right)^{2/3} \left(\sum_k |u_k|^2 p_k^2\right)^{1/3} \tag{15}$$

$$\left(p_k \geqslant 0 \left| \frac{u_k}{\sqrt{p_k}} \right| \text{ конечна}\right).$$

$$\sum_k |u_k|^2 = \sum_k \left(\frac{|u_k|^{4/3}}{p^{2/3}}\right) (|u_k|^{2/3} p^{2/3}),$$

$$p = |E_n - E_m|$$

$$|u_k|^2 = |J_{nm}|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right| VQ^{-1}.$$

Подставляя в неравенство (15) выражения для p и $|u_k|^2$, получим

$$\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{V}{Q} \sum_{n,m} \frac{|D_{nm}|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right|}{|E_n - E_m|}\right)^{2/3} \left(\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 \times\right.$$

$$\left.\times |E_n - E_m|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right|\right)^{1/3}.$$

Учитывая (14), имеем

$$\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \, \partial \nu^*}\right)^{2/3} \left(\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 \times\right.$$

$$\left.\times |E_n - E_m|^2 \left(e^{-\frac{E_n}{\theta}} + e^{-\frac{E_m}{\theta}}\right)\right)^{1/3}.$$

Произведем несложные преобразования

$$\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 |E_n - E_m|^2 \left(e^{-\frac{E_n}{\theta}} + e^{-\frac{E_m}{\theta}}\right) =$$

$$= \frac{V}{Q} Sp\, e^{-\frac{\Gamma}{\theta}} \{(\Gamma D - D\Gamma)(D^+\Gamma - \Gamma D^+) + (D^+\Gamma - \Gamma D^+)(\Gamma D - D\Gamma)\} =$$

$$= V \langle (\Gamma J - J\Gamma)(\Gamma J - J\Gamma)^+ + (\Gamma J - J\Gamma)^+ (\Gamma J - J\Gamma) \rangle \leqslant 2VK^2.$$

Учитывая эти преобразования, получим

$$\frac{V}{Q} \sum_{n,m} |D_{nm}|^2 \left| e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}} \right| \leqslant \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \, \partial \nu^*}\right)^{\frac{2}{3}} (2VK^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Далее запишем

$$\frac{V}{Q}\sum_{n,m}|D_{nm}|^2 e^{-\frac{E_n}{\theta}} \leqslant \theta\frac{V}{Q}\sum_{n,m}\frac{|D_{nm}|^2}{(E_n-E_m)}\left(e^{-\frac{E_m}{\theta}}-e^{-\frac{E_n}{\theta}}\right)+$$

$$+\frac{V}{Q}\sum_{n,m}|D_{nm}|^2\left|e^{-\frac{E_n}{\theta}}-e^{-\frac{E_m}{\theta}}\right|,$$

где

$$\frac{V}{Q}\sum_{n,m}|D_{nm}|^2 e^{-\frac{E_n}{\theta}}=\frac{V}{Q}Sp\,DD^+e^{-\frac{\Gamma}{\theta}}=V\langle DD^+\rangle=$$

$$=V\langle(J-\langle J\rangle)(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle;$$

таким образом, окончательно имеем неравенство

$$\langle(J-\langle J\rangle)(J^+-\langle J^+\rangle)\rangle\leqslant-\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*}\,\frac{\theta}{V}+\frac{(2K^2)^{1/3}}{V^{2/3}}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*}\right)^{2/3}. \tag{16}$$

Заметим, что если сравнить полученную точную оценку для среднего (16) с предварительным равенством (12), то видно, что точная оценка (16) отличается от равенства (12) лишь дополнительным членом, возникшим в результате учета некоммутативности оператора гамильтона Γ с операторами J, J^+. (Если операторы Γ и J, J^+ коммутируют, ясно, что (16) автоматически переходит в (12)). Отметим, что $f(\nu,\nu^*)$ зависит лишь от модуля $r=\sqrt{\nu\nu^*}$ и не зависит от фазы, т. е. $f(\nu,\nu^*)=f(\sqrt{\nu\nu^*})$, отсюда, дифференцируя f по ν и ν^*, найдем

$$\frac{\partial f}{\partial\nu^*}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\nu^*}}f'_r(r),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu^*}=\frac{1}{4r}(f'_r+f''_r r)=\frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right)\leqslant 0,$$

далее учитывая, что $|\Gamma J-J\Gamma|\leqslant K=\mathrm{const}$, и обозначая $D(r)=<(J-$ $-<J>)(J^+-<J^+>)>$, перепишем неравенство (16)

$$D(r)\leqslant\frac{\theta}{4V}\left(-f''_r-\frac{1}{r}f'_2\right)+\left(-f''_r+\frac{1}{r}f'_r\right)^{\frac{2}{3}}\frac{K^{\frac{2}{3}}}{2V^{\frac{2}{3}}}.$$

В этом неравенстве для нас неудобны вторые производные от f, ограничить которые мы не умеем. Чтобы от них избавиться, проинтегрируем (16) по r и покажем, что

$$\int_{r_0}^{r_1} r\cdot D(r)\,dr\to 0 \text{ при } V\to\infty.$$

имеем в самом деле

$$\int_{r_0}^{r_1} r\cdot D(r)\,dr\leqq\frac{\theta}{4V}\,r\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r_1}^{r_0}+\frac{K^{\frac{2}{3}}}{2V^{\frac{2}{3}}}\int_{r_0}^{r_1}\underbrace{r^{\frac{1}{3}}}_{u}\Bigg(\underbrace{-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)}_{v}\Bigg)^{\frac{2}{3}}dr.$$

Применяя ко второму члену, стоящему в правой части, неравенство Гельдера в интегральной форме

$$\int |u \cdot v|\, dr \leqslant \left(\int |u|^3 dr\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int |v|^{\frac{3}{2}} dr\right)^{\frac{2}{3}}$$

и учитывая, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \leqslant 2k_1, \tag{17}$$

найдем

$$\int_{r_0}^{r_1} r \cdot D(r)\, dr \leqslant \frac{\theta}{2V} k_1 (r_0 + r_1) + \frac{1!}{2V^{\frac{2}{3}}} (2k_1 K (r_0 + r_1))^{\frac{2}{3}} \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{18}$$

Хотя мы и показали, что этот интеграл асимптотически убывает при $V \to \infty$, однако отсюда нельзя сделать вывод о том, что и подынтегральная функция убывает.

Обратимся к неравенству (11)

$$0 \leqslant f_{\Gamma_0} - f_{\Gamma} \leqslant 2 \langle (J - \langle J \rangle)(\overset{+}{J} - \langle \overset{+}{J} \rangle) \rangle.$$

Обозначая $a(r) = f_{\Gamma^0} - f_{\Gamma}$ и учитывая (18), имеем

$$\int_{r_0}^{r_1} r \cdot a(r)\, dr \leqslant \frac{\theta k_1 (r_0 + r_1)}{V} + \frac{(2kK(r_0 + r_1))^{\frac{2}{3}} \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}}.$$

Так как первая производная $\frac{\partial f}{\partial r}$ ограничена (17), то и $|a'_r(r)| \leqslant 4k_1$.

Положим

$$r_0 = r + l, \quad r_1 = r + 2l$$

и воспользуемся «теоремой о среднем»

$$a(\xi) \cdot \int_{r+l}^{r+2l} r \cdot dr = \int_{r+l}^{r+2l} r \cdot a(r)\, dr,$$

где

$$r + l \leqslant \xi \leqslant r + 2l.$$

Принимая во внимание равенство

$$a(r) = a(\xi) - \int_r^{\xi} a'_r\, dr,$$

имеем

$$|a(r)| \leqslant \frac{\int_{r+l}^{r+2l} r \cdot a(r)\, dr}{\frac{1}{2}[(r+2l)^2 - (r+l)^2]} + 4k_1 \cdot 2l \leqslant 8k\, l + 2\frac{\theta k}{Vl} + \frac{(4kK)^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}}}.$$

Выберем l из условия

$$8kl = \frac{(4kK)^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}}}; \quad l = \frac{K^{\frac{2}{5}}}{2V^{\frac{2}{5}} k^{\frac{1}{5}}}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$0 \leqslant f_{\Gamma^0} - f_{\Gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8(k^2K)^{\frac{2}{5}}}{V^{\frac{2}{5}}} + \frac{4\theta\left(\frac{k^3}{K}\right)^{\frac{2}{5}}}{V^{\frac{3}{5}}} \leqslant \frac{L}{V^{\frac{3}{5}}}; \quad L = \text{const}. \tag{19}$$

Можно отметить, что полученная оценка сильно мажорирована, но для нас это не играет роли, поскольку мы хотели лишь установить, что

$$f_{\Gamma^0} - f_{\Gamma} \to 0$$

$$\text{при } V \to \infty.$$

Заметим, с другой стороны, что правая часть (19) стремится к нулю, равномерно по отношению к $r = |\nu|$, поэтому она справедлива для $\nu=0$. В этом случае имеем

$$0 \leqslant f_{H^0} - f_H \leqslant \frac{L}{V^{\frac{2}{5}}}; \quad L = \text{const}.$$

Более того, оценка равномерна и по отношению к $\theta \geqslant 0$, и мы можем положить также $\theta = 0$. Таким образом, результат имеет место как при $\theta > 0$, так и при $\theta = 0$.

В заключение укажем, что можно рассмотреть задачу [6] об асимптотически точном вычислении корреляционных функций у функций Грина, построенных на основе модельного (3) и соответствующего аппроксимирующего гамильтонианов. При этом, вообще говоря, можно показать, что

$$|\langle A(t) \cdot B(\tau)\rangle_{\Gamma} - \langle A(t) \cdot B(\tau)\rangle_{\Gamma^0}| \leqslant \eta\left(\frac{1}{V}, \delta\right)|t-\tau| + \eta'\left(\frac{1}{V}, \delta\right), \tag{20}$$

где

$$A, B = a_f, \ a_f^+, \ a_{-f}, \ a_{-f}^+,$$

и

$$\eta\left(\frac{1}{V}, \delta\right) \to 0, \quad \eta'\left(\frac{1}{V}, \delta\right) \to 0$$

$$\text{при } V \to \infty$$

для любого фиксированного значения $\delta > 0$. Подчеркнем, что это соотношение справедливо, когда $r \geqslant \delta$. Выражение $\langle A(t) \cdot B(\tau) \rangle_{\Gamma^0}$ вычисляется элементарно, и нетрудно установить, что

$$\lim_{r \to 0} \{\lim_{V \to \infty} \langle A(t) \cdot B(\tau)\rangle_{\Gamma^0}\} = \lim_{V \to \infty} \langle A(t) \cdot B(\tau)\rangle_{H^0}. \tag{21}$$

Таким образом, из соотношения (20) вытекает существование предела

$$\lim_{r\to 0}\{\lim_{V\to\infty}\langle A(t)\cdot B(\tau)\rangle_\Gamma\} = \langle A(t)\cdot B(\tau)\rangle_H. \tag{22}$$

Но (21), (23) — не что иное, как квазисредние в смысле работы [3]. Итак видим, что квазисредняя (21) асимптотически равна квазисредней (22).

Отсюда также вытекают аналогичные соотношения и для функций Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. ДАН СССР, **117**, 788, 1957.
2. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. ЖЭТФ, **39**, 120, 1960.
3. Боголюбов Н. Н. препринт, Дубна, 1960.
4. Боголюбов Н. Н. Physica, **26**, 1960.
5. Тареева Е. Е. Диссертация, МИАН СССР, 1964.
6. Боголюбов Н. Н. (мл.) ДАН СССР (в печати).

Поступила в редакцию
29. 10 1964 г.

Кафедра
теоретической физики