Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 523.03

В. Д. ЗАХАРОВ

ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА С ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ

Рассматривается новый общековариантный критерий гравитационных волн в применении к классификации Петрова полей тяготения по алгебраической структуре тензора кривизны. Показано, что нетривиальные пространства Эйнштейна, удовлетворяющие этому критерию, могут принадлежать только к вырожденному II типу по классификации Петрова. Формулируется обратная теорема.

Пусть $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\, (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ — метрика пространства-времени V_4 с сигнатурой $(+ - - -)$ (x^0 — временноподобная координата), $R_{\mu\alpha\beta\nu}$—тензор кривизны Римана—Кристоффеля; запятой с последующими n индексами будем обозначать n-кратное ковариантное дифференцирование.

Будем рассматривать класс римановых пространств V_4, определяемых уравнениями

$$\Box^\sigma_\sigma R_{\mu\alpha\beta\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\mu\alpha\beta\nu, \rho\sigma} = 0, \tag{1}$$

где $\Box^\sigma_\sigma \equiv g^{\rho\sigma}(\ldots)_{,\rho\sigma}$ — общековариантный волновой оператор (Даламбера) [1]. В работе [2] обосновывается высказанное А. Л. Зельмановым положение, что уравнения вида (1) могут служить в качестве общековариантного критерия существования гравитационных волн. Было показано, что ряд точных решений уравнений Эйнштейна в вакууме (решения Переса, Такено, Петрова и др.) удовлетворяет данному критерию; решения же в виде «цилиндрических волн» Эйнштейна—Розена не удовлетворяют уравнению (1).

Поставим в общем виде вопрос: какое место в классификации Петрова занимают пространства V_4, удовлетворяющие общековариантному волновому уравнению (1)? В настоящей статье ответ на этот вопрос будет дан лишь для пространств Эйнштейна $^*T_i$:

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где i (1, 2, 3) означает номер соответствующего типа полей тяготения. Пустые пространства V_4, т. е. пространства $^*T_i$ при $\varkappa = 0$, будем обозначать T_i.

Отобразим, следуя А. З. Петрову [3], пространство $^*T_i$ в данной точке на шестимерное метризованное бивекторное пространство R_6, поставив в соответствие каждой кососимметрической паре индексов $(\alpha\beta)$ и $(\mu\nu)$ тензора $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ собирательный индекс в пространстве R_6. Для этого используем, например, нумерацию

$$10 \to 1,\ 20 \to 2,\ 30 \to 3,\ 23 \to 4,\ 31 \to 5,\ 12 \to 6. \tag{3}$$

Как показал А. З. Петров [3], матрица (R_{ab}) $(a,\ b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$, определяющая ортогональные компоненты тензора кривизны для $^*T_i$, приводится в некотором неголономном орторепере к следующему каноническому виду:

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где для $^*T_1$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\sum \alpha_i = -\varkappa,\quad \sum \beta_i = 0; \tag{6}$$

для $^*T_2$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2-1 \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varkappa,\quad \beta_1 + 2\beta_2 = 0; \tag{8}$$

для $^*T_3$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь α_i и β_i — вещественные и мнимые части стационарных бивекторных кривизн, совпадающих с базисами элементарных делителей λ матрицы

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}),$$

где g_{ab} — метрика пространства R_6:

$$g_{ab} \to g_{\mu\alpha\beta\nu} \equiv g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}.$$

Пенроуз [4]*, исходя из спинорных свойств тензора кривизны, указал на возможность более узкой специализации типов полей тяготения Петрова, разделив $^*T_1$ на три, а $^*T_2$ на два подкласса пространств Эйнштейна, в соответствии с диаграммой:

---

* А ранее Дебеве [11].

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{I} \arrow[d, dash, dashed] \\
 & \mathrm{II} \arrow[ur, dash, dashed] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] & \mathrm{D} \arrow[d, dash] \\
\mathrm{III} \arrow[r, dash] & \mathrm{N} \arrow[r, dash] & \mathrm{O} \\
{}^*T_3 & {}^*T_2 & {}^*T_1
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Здесь I, D, O — подклассы пространств $^*T_1$: для типа I все три значения стационарных кривизн $\sigma_s = \alpha_s + i\beta_s$ различны; для типа D две из трех стационарных кривизн совпадают, например $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$; для типа O все стационарные кривизны совпадают и являются вещественными:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{\varkappa}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

II и N — подклассы пространств $^*T_2$: II — «невырожденный II тип», для которого обе стационарные кривизны σ_1 и σ_2 различны; N — «вырожденный II тип», характеризующийся совпадением стационарных кривизн (также являющихся вещественными):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\varkappa}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{11}$$

Отметим, что в классификации Беля [5] типы I, D, II, III, N обозначаются соответственно cas 1, cas 2a, cas 2b, cas 3a, cas 3b.

Воспользуемся известным результатом: для того чтобы пространство $^*T_i$ удовлетворяло уравнениям (1), необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло уравнениям

$$R_{\sigma\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\delta\mu\nu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} + 2\left(R_{\alpha\nu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\mu\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} - R_{\beta\nu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\mu\alpha\delta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} + \varkappa R_{\mu\alpha\beta\nu}\right) = 0. \tag{12}$$

Уравнения (12) с очевидностью вытекают из тождеств для $^*T_i$ (см. [6], стр. 244):

$$\Box_{\sigma}^{\sigma} R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\sigma\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\delta\mu\nu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} + 2\left(R_{\alpha\nu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\mu\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} - R_{\beta\nu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\delta} R_{\mu\alpha\delta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma} + \varkappa R_{\mu\alpha\beta\nu}\right) = 0,$$

которые являются следствием уравнений (2), тождеств Бианки и дифференциальных тождеств Риччи.

Поскольку уравнения (12) являются алгебраическими относительно тензора кривизны, их можно исследовать с помощью алгебраической классификации полей тяготения $R_{\mu\alpha\beta\nu}$, выражаемой формулами (4) — (9). Выберем для этого в каждой данной точке пространства $^*T_i$ ортогональный неголономный репер ξ_{σ}^{α} $(\alpha, \sigma = 0, 1, 2, 3)$ такой, что

$$g_{\alpha\alpha} = e_{\alpha} = \pm 1 \, (e_0 = 1, \; e_i = -1, \; i = 1, 2, 3), \; g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Уравнения (12) в этом репере примут вид

$$\sum_{\sigma,\delta} e_{\sigma} e_{\delta} \left[R_{\sigma\alpha\beta\delta} R_{\delta\mu\nu\sigma} + 2R_{\alpha\nu\sigma\delta} R_{\beta\mu\sigma\delta} - 2R_{\alpha\mu\sigma\delta} R_{\beta\nu\sigma\delta}\right] + \\ + 2\varkappa R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \tag{13}$$

Пусть имеет место пространство $^*T_1$. Тогда, записывая уравнения (13) в бивекторном пространстве R_6 с использованием нумерации (3), принимая во внимание (4) и (5), получим

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - \beta_1^2 - 2\beta_2\beta_3 + \varkappa\alpha_1 = 0,$$
$$2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \varkappa\beta_1 = 0$$

и еще четыре уравнения, получающиеся из этих циклированием по индексам 1, 2, 3. Вычитая из первого уравнения третье, из третьего — пятое, из пятого — первое и проделывая то же самое со вторым, четвертым и шестым уравнениями, принимая во внимание соотношения (6), получаем

$$\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)-\beta_1(\beta_2-\beta_3)=0,$$
$$\beta_1(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_1(\beta_2-\beta_3)=0$$

и еще четыре уравнения, получающиеся из них циклированием по индексам 1, 2, 3. Эти уравнения, как известно ([3], стр. 399), представляют собой записанные в R_6 условия интегрируемости уравнений

$$R_{\mu\alpha\beta\nu,\sigma}=0, \tag{14}$$

определяющих симметрические пространства. Так как любое пространство $^*T_1$, определяемое уравнениями (1), удовлетворяет условиям интегрируемости уравнений (14), то *для этих* $^*T_1$ последние обращаются в тождества, т. е. система (14) вполне интегрируема ([7], стр. 99—103). Таким образом, любое $^*T_1$, определяемое уравнениями (1), удовлетворяет и уравнениям (14), т. е. является симметрическим пространством и, следовательно, тривиально относительно уравнения (1).

Так как при $\varkappa=0$ симметрические пространства Эйнштейна I типа являются плоскими ([3], стр. 402), то пространства T_1, удовлетворяющие уравнениям (1), будут плоскими.

Пусть имеет место пространство $^*T_2$. Уравнения (13), с использованием формул (4) и (7), приводят к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1^2-\beta_1^2+2(\alpha_2^2-\beta_2^2)+\varkappa\alpha_1=0,\\
&2(\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2)+\varkappa\beta_1=0,\\
&\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2-\beta_2^2-2\beta_1\beta_2+2(\alpha_2-\alpha_1)+\varkappa(\alpha_2+1)=0,\\
&\beta_1-\beta_2=0,\\
&2(\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2+\beta_2-\beta_1)+\varkappa\beta_2=0,\\
&2(\alpha_2-\alpha_1)+\varkappa=0,\\
&\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2-\beta_2^2-2\beta_1\beta_2+2(\alpha_1-\alpha_2)+\varkappa(\alpha_2-1)=0,\\
&2(\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1-\beta_2)+\varkappa\beta_2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из четвертого уравнения системы (15) и второго из соотношений (8) следует, что $\beta_1=\beta_2=0$. Из шестого уравнения системы (14) и первого из соотношений (8) следует далее, что $\alpha_1=0$. Тогда из первого уравнения системы (15) следует также, что $\alpha_2=0$, а из шестого уравнения — что $\varkappa=0$. Таким образом, система (15) может быть удовлетворена лишь при условиях (11), определяющих вырожденный II тип пространств Эйнштейна с $\varkappa=0$.

Как показал А. З. Петров [3], существует единственное симметрическое пространство $^*T_2$. Оно удовлетворяет условиям (11), определяющим вырожденный II тип, и в специальной системе координат выражается метрикой

$$ds^2=2dx^0\,dx^1-\mathrm{sh}^2\,x^0\,dx^{2^2}-\sin^2 x^0\,dx^{3^2}. \tag{16}$$

Таким образом, тип $^*T_2$ допускает единственное решение уравнений (1), определяющее симметрическое пространство, — метрику (16).

Пусть, наконец, имеет место пространство $^*T_3$. Если в уравнениях (13) зафиксировать индексы, пользуясь любой из подстановок

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 10 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 30 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 30 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 23 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\beta & \mu\nu \\ 12 & 12 \end{pmatrix},$$

то на основе формул (4) и (9) ни одно из соответствующих шести уравнений не может быть удовлетворено ни при каком значении $\varkappa$. Это означает, что пространства Эйнштейна, удовлетворяющие тензорному волновому уравнению (1), не могут быть пространствами III типа по классификации Петрова.

Условимся называть пространства V_4 с ковариантно-постоянным тензором кривизны (14) (симметрические пространства) тривиальными относительно волнового уравнения (1). Тогда изложенные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пространства $^*T_1$, определяемые тензорным волновым уравнением (1), могут быть только тривиальными относительно этого уравнения, при $\varkappa=0$ (пространства T_1) они могут быть только плоскими. Пространства $^*T_2$, определяемые уравнением (1), в том числе и тривиальное относительно (1) пространство (16), могут принадлежать только к типу N диаграммы Пенроуза, причем $\varkappa=0$. Пространства $^*T_3$ не могут удовлетворять уравнению (1).

Иными словами, нетривиальные пространства Эйнштейна, удовлетворяющие волновому уравнению (1), могут быть только пространствами T_2 типа N диаграммы Пенроуза.

Наоборот, полагая в формулах (7) $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=\beta_2=0$ (тип N при $\varkappa=0$), легко убедимся на основании уравнений (15), что уравнения (12) удовлетворяются тождественно. Это доказывает следующую обратную теорему.

Теорема. Любое пространство $^*T_2$ типа N удовлетворяет общековариантному волновому уравнению (1). Из них единственное пространство, с метрикой (16), является тривиальным относительно уравнения (1).

В заключение полезно провести аналогию между критерием (1) гравитационных волн (А. Л. Зельманова) и критерием, сформулированным в [8] Лихнеровичем. Согласно критерию Лихнеровича, пространство Эйнштейна $^*T_i$ определяет гравитационные волны, если оно допускает существование изотропного векторного поля $l_\alpha(l_\alpha l^\alpha=0)$, удовлетворяющего уравнениям типа

$$l_{\alpha,[\beta\gamma]}=0. \tag{17}$$

Уравнения (17) в $^*T_i$ могут быть записаны также в виде

$$l_\sigma R_{\mu\alpha\beta\nu}+l_\mu R_{\nu\alpha\beta\sigma}+l_\nu R_{\sigma\alpha\beta\mu}=0.$$

Согласно работе Беля [9], для выполнения условия (17) необходимо и достаточно, чтобы данное $^*T_i$ было пространством T_2 типа N. Таким образом, с точностью до пространства T_2 вида (16), где выполнение критерия Зельманова оказывается тривиальным, в пространствах Эйнштейна оба упомянутых критерия идентичны.

Отметим, наконец, что в работе [10] другим способом было показано, что для метрик вида «плоских волн» $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x'\pm x^0)$ тензор кривизны имеет структуру, соответствующую случаю типа II при $\alpha_i=\beta_i=0$.

Однако этот результат был получен без использования какого-либо инвариантного критерия гравитационных волн. Тем не менее совпадение результатов в обоих случаях является дополнительным аргументом в пользу того, что общековариантное уравнение (1) действительно выделяет класс пространств, обладающих гравитационным излучением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tolman R. C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford, 1934.
2. Захаров В. Д. «Сообщения ГАИШ», № 131, 42, 1964.
3. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
4. Penrose R. Ann. Phys (USA), **10**, No. 2, 171, 1960.
5. Bel L. Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., Paris, 1962.
6. Петров А. З. Докторская диссертация. МГУ, 1956.
7. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948
8. Lichnerowicz A. C. r. acad. sci., **246**, 893, 1958.
9. Bel L. C. r. acad. sci., **247**, 1094, 1958.
10. Weber J., Zipoy D. Nuovo Cimento, **18**, No. 1, 191, 1960.
11. Debever M. R. C. r. acad. sci., **249**, 1324, 1959.

Поступила в редакцию
4. 2 1964 г.

Кафедра
астрофизики