

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1966

УДК 621.391.172

Н. К. КУЛЬМАН

## ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

При помощи теории оптимальной нелинейной фильтрации в гауссовом приближении синтезируются оптимальные устройства, производящие измерение одного из параметров сигнала в присутствии аддитивного белого шума. Сигнал представляет собой последовательность видео- или радиоимпульсов, несущих сообщение, которое является процессом Маркова. Путем сравнения полученных выражений для среднеквадратичных ошибок, возникающих при воспроизведении сообщения, делается вывод о преимуществе ФИМ по сравнению с другими видами импульсной модуляции (АИМ и ДИМ). Даются рекомендации по наилучшему выбору параметров импульсного сигнала.

Помехоустойчивость системы передачи информации можно определить как способность системы противостоять вредному действию помех. Сообщение обычно заключено в изменении какого-либо одного из  $k$  параметров сигнала  $s(y_1, \dots, y_k, t)$ , посылаемого в канал связи. Этот параметр обозначим через  $y$ . Действие помехи проявляется в том, что принятый сигнал  $r = s + n$  отличается от переданного. Помеха представляет собой белый шум. Структура оптимального приемника для измерения параметра  $y$  (т. е. и для выделения переданного сообщения) определяется с учетом статистики полезного сигнала, исходя из выбранного критерия верности воспроизведения сообщения (в нашем случае критерия минимальной среднеквадратичной ошибки). Для одного и того же сообщения каждому виду модуляции будет соответствовать вполне определенный оптимальный приемник. Будем говорить об относительной помехоустойчивости одного вида модуляции по сравнению с другим, сравнивая среднеквадратичные ошибки в оценке сообщения при выделении сигналов соответствующими оптимальными приемниками в случае действия одной и той же заданной помехи  $n(t)$ .

Приемник Котельникова [1], синтезируемый в соответствии с формулой обратной вероятности, вычисляет распределение обратных вероятностей и дает на выходе ту реализацию сообщения, при которой функция распределения максимальна. Помехоустойчивость различных систем передачи анализировалась в [1] при следующих основных допущениях: отношение помеха/сигнал достаточно мало, спектр сообщения ограничен по частоте, причем верхняя частота сообщения много меньше несущей частоты сигнала. Однако значения для среднеквадратичных ошибок фильтрации были получены в предположении прямоугольности

априорного распределения измеряемого параметра без учета динамики передаваемого процесса.

В [2] также рассматривается измерение параметров полезного сигнала при наличии помех по максимуму апостериорной вероятности на основе теории Котельникова. Показано, что отыскание наиболее вероятного значения параметра приводит к некоторому обобщению метода наименьших квадратов. В качестве примера рассмотрено измерение времени прихода высокочастотного импульсного сигнала при слабых помехах. Показано, что если полезный сигнал является высокочастотным импульсом, то измерение времени его прихода  $\theta$  сводится к измерению момента прихода видеопульса  $\frac{f(t-\theta)}{\sqrt{2}}$ , где  $f(t-\theta)$  — огибающая высокочастотного импульса.

В настоящей работе, так же как в [3—5], сообщение предполагается марковским случайным процессом. Для различных случаев импульсной модуляции амплитуды высокочастотного сигнала при тех же основных допущениях, что и в [1], решается задача построения оптимальной фильтрующей системы и вычисляется среднеквадратичная ошибка фильтрации.

### Уравнения оптимальной фильтрации в общем случае импульсной модуляции

Пусть сообщение представляет собой марковский случайный процесс, определяемый в соответствии с уравнением

$$\dot{x} = -\beta x + \beta \xi, \quad (1)$$

где

$$\overline{\xi \xi_\tau} = \kappa \delta(\tau), \quad \overline{\xi} = 0.$$

Процесс передачи сообщения сводится к модуляции тех или иных параметров сигнала  $s(y, t)$ , поступающего в канал связи

$$y(t) = y_c [1 + mx(t)], \quad (2)$$

$$(0 \leq m \leq 1, \overline{x^2} < 1),$$

где  $m$  — коэффициент модуляции по параметру  $y$ ,  $y_c = \overline{y}$ . В результате наложения аддитивной шумовой помехи на вход приемника поступает сигнал  $s(t) + n(t)$ , где  $n(t)$  — белый шум:  $\overline{nn_\tau} = \frac{N}{2} \delta(\tau)$  ( $N$  — спектральная плотность шума).

Оптимальный приемник должен выдавать оценочное значение параметра в соответствии с критерием минимальной среднеквадратичной ошибки. В качестве такого оценочного значения можно взять наиболее вероятное значение параметра ( $y_0$ ). Задача синтеза приемника в предположении, что апостериорное распределение можно аппроксимировать гауссовой кривой («гауссово» приближение), была решена для общего случая в [3, 4]. Если подлежащий выделению случайный процесс  $y(t)$  подчиняется априорному стохастическому уравнению

$$\dot{y} = g(y) + \zeta(t), \quad (\overline{\zeta \zeta_\tau} = b \delta(\tau)), \quad (3)$$

то уравнения оптимальной фильтрации в гауссовом приближении имеют вид

$$\dot{y}_0 = g(y_0) + k \frac{\partial F(y_0)}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\dot{k} = 2k \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} + b + k^2 \frac{\partial^2 F(y_0)}{\partial y^2}, \quad (5)$$

где  $y_0$  — оценочное значение параметра, соответствующее максимуму апостериорной вероятности,  $k$  — дисперсия аппроксимирующего гауссова распределения. Апостериорная неточность фильтрации (среднеквадратичная ошибка)  $\sigma = \sqrt{k}$ . Функция  $F$  находится из условия

$$F = \frac{d}{dt} \ln \omega_{ps}[s(y, t')],$$

где  $t'$  — текущее время,  $t$  — длина интервала наблюдения. В нашем случае имеем

$$F = \frac{1}{N} [2rs - s^2] \quad (6) \quad \text{или} \quad F = \frac{2}{N} rs. \quad (6')$$

Последнее выражение имеет место, если  $\int_0^t s^2(y, t') dt'$  не зависит от  $y$ .

Рассмотрим некоторые конкретные виды модуляции марковским случайным сигналом. В случае амплитудной, фазовой и частотной модуляции (АМ, ФМ и ЧМ) в качестве несущей, параметры которой непосредственно модулируются сообщением, используется высокочастотное колебание  $s = s(y, t)$ . В случае же импульсной модуляции непосредственным переносчиком сообщения является периодическая последовательность видеоимпульсов, которую можно рассматривать как поднесущую. Импульсы могут быть в принципе разной формы: прямоугольные, трапецеидальные, гауссовы и т. д. Однако все они характеризуются тремя основными параметрами: моментом прихода  $\theta$ , высотой  $h$  и длительностью  $\tau(f(\theta, h, \tau, t))$ . Модуляция по каждому из этих параметров есть фазово-импульсная (ФИМ), амплитудно-импульсная (АИМ) и модуляция по длительности (ДИМ)\*. Таким образом, в случае импульсной модуляции полезный сигнал может быть записан в виде

$$s = s[f(y, t), t]. \quad (7)$$

В зависимости от того, какой параметр высокочастотной несущей модулируется поднесущей  $f(y, t)$ , различают ФИМ/АМ, ФИМ/ФМ, ФИМ/ЧМ, АИМ/АМ и т. д.

В случае АИМ/АМ, ДИМ/АМ функция  $F$  определяется из (6). Учитывая, что  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y}$ , записываем уравнения оптимальной фильтрации (4), (5) следующим образом:

$$\dot{y}_0 = g(y_0) + \frac{2k}{N} [r - s_0] \frac{\partial s_0}{\partial f} \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{k} = 2k \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} + b + \frac{2k^2}{N} \left[ (r - s_0) \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial f} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_0}{\partial f^2} \left( \frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^2 \right\} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial s_0}{\partial f} \right)^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Индекс нуль означает подстановку оценочных значений параметров, например,  $\frac{\partial f_0}{\partial y} \equiv \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial y}$ . В случае АИМ/ФМ, ЧМ; ДИМ/ФМ, ЧМ;

\* Иногда употребляется термин широтно-импульсная модуляция (ШИМ).

ФИМ/АМ, ФМ, ЧМ функция  $F$  определяется соотношением (6'). Уравнения оптимальной фильтрации (4), (5) примут следующий вид:

$$\dot{y}_0 = g(y_0) + \frac{2k}{N} r \frac{\partial s_0}{\partial f} \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\dot{k} = 2k \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} + b + \frac{2k^2}{N} r \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial f} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_0}{\partial f^2} \left( \frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (11)$$

Оптимальное устройство, описываемое уравнениями (8—11), оказывается чрезмерно сложным даже в сравнительно простых случаях АМ и ЧМ сигнала. Поскольку, однако, в стационарном режиме  $k$  флуктуирует вокруг некоторого среднего значения  $\bar{k}$ , то схему можно значительно упростить, делая замену  $k \rightarrow \bar{k}$ . Связанная с такой заменой погрешность вполне окупается существенным упрощением оптимальной системы.

Решение уравнения (9), (11) ищется при помощи метода последовательных приближений:  $k(t) = k^0 + \lambda k^{(1)}(t) + \lambda^2 k^{(2)}(t) + \dots$  ( $\lambda$  — формальный малый параметр). При условии хорошей фильтрации (малой апостериорной дисперсии) можно считать, что  $\bar{k} \cong k^0$  [4], где  $k^0$  — первое приближение, не зависящее от времени, которое можно найти из уравнения

$$-2\beta^* k^0 + b - \frac{1}{N^*} (k^0)^2 = 0, \quad (12)$$

где  $\beta^* = -\frac{\partial g(y_0)}{\partial y}$ ,  $\frac{1}{N^*} = -\bar{K}$  (через  $\bar{K}$  обозначены усредненные во времени значения коэффициентов при  $k^2$  в (9) и (11), причем усреднение производится за период следования импульсов). Из (12) найдем средний квадрат ошибки фильтрации в первом приближении

$$k^0 = \beta^* N^* \left( \sqrt{1 + \frac{b}{N^* \beta^{*2}}} - 1 \right). \quad (13)$$

При малом  $N^*$  (т. е. и  $N$ ) получаем асимптотическое выражение

$$k^0 \approx N^{*1/2} b^{1/2}. \quad (14)$$

Заметим, что при  $N \rightarrow \infty$  ( $N^* \rightarrow \infty$ ) выражение (13) дает величину, в точности равную априорному разбросу параметра  $\left( \frac{b}{2\beta^*} \right)$ .

Вопрос о справедливости гауссова приближения разбирается в общем виде в [3]. Согласно теории условием справедливости гауссова приближения является условие малой апостериорной дисперсии (малой помехи). Мы считаем, что это условие у нас в дальнейшем выполняется во всяком случае в диапазоне значений  $N$ , при которых справедлива асимптотическая формула.

#### Конкретизация уравнений оптимальной фильтрации для случая ФИМ/АМ, АИМ/АМ и ДИМ/АМ

В случае амплитудной модуляции, несущей последовательность импульсов, полезный сигнал равен

$$s = f(y, t) \cos \omega t. \quad (15)$$

Очевидно, имеет место  $\frac{\partial s_0}{\partial f} = \cos \omega t$ ,  $\frac{\partial^2 s_0}{\partial f^2} = 0$ .

Учитывая, что  $r(t) = f^* \cos \omega t + n(t)$  ( $f^*$  — истинное значение амплитуды  $f(y^*, t)$ ), имеем следующее соотношение

$$(r - s_0) \frac{\partial s_0}{\partial f} = \frac{1}{2} [f^* + 2n \cos \omega t - f_0]$$

(здесь отброшен вибрационный член). Операция  $r \frac{\partial s_0}{\partial f} \left( s_0 \frac{\partial s_0}{\partial f} \right)$  эквивалентна сдвигу спектра исходного сигнала  $r(s_0)$  на величину  $\omega$ . Обозначим  $r_1 = f^* + n_1$  ( $n_1 = 2n \cos \omega t$ ), где  $n_1$  — белый шум со спектральной плотностью  $N_1 = 2N$ . Тогда

$$(r - s_0) \frac{\partial s_0}{\partial f} = \frac{1}{2} (r_1 - f_0).$$

Таким образом, уравнения оптимальной фильтрации (8) и (9) для АИМ/АМ и ДИМ/АМ записываются в виде

$$y_0 = g(y_0) + \frac{2k}{N_1} (r_1 - f_0) \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad (16)$$

$$\dot{k} = 2k \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} + b + \frac{2k^2}{N_1} \left[ (r_1 - f_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Уравнения оптимальной фильтрации в случае ФИМ/АМ:

$$\dot{y}_0 = g(y_0) + \frac{2k}{N_1} r_1 \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad (18)$$

$$\dot{k} = 2k \frac{\partial g(y_0)}{\partial y} + b + \frac{2k^2}{N_1} r_1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Из соотношений (16—19) следует, что оптимальный приемник для фильтрации радиосигналов (15) имеет ту же структуру, что и оптимальный приемник, выделяющий соответствующую последовательность видеоимпульсов из аддитивного белого шума  $n_1(t)$ , спектральная плотность которого вдвое больше спектральной плотности исходного белого шума  $n(t)$  на выходе канала связи ( $N_1 = 2N$ ). Этот общий результат полностью совпадает с выводами работы [2], сделанными для частного случая измерения времени прихода импульса.

Различие между оптимальными приемниками состоит в том, что приемник для фильтрации радиоимпульсов имеет дополнительный блок, осуществляющий операцию  $r_1 = 2r \frac{\partial s_0}{\partial f}$ . Так как в рассматриваемом

случае  $\frac{\partial s_0}{\partial f} = \cos \omega t$ , то этот блок представляет собой синхронный детектор. Поставим задачу синтезировать оптимальные приемники для фильтрации последовательности видеоимпульсов  $f(y, t)$  в случае ФИМ, АИМ и ДИМ и подсчитаем ошибки фильтрации.

Отметим, что колебания, подаваемые с опорного гетеродина на синхронный детектор, имеют в общем случае некоторый сдвиг по фазе по сравнению с радиоколебаниями, т. е.  $\frac{\partial s_0}{\partial f} = \cos(\omega t + \varphi)$ . Мы предполагали, что  $\varphi = 0$ . В [5] показано, что блуждание фазы  $\varphi$  вследствие случайных уходов частоты при приеме АМ сигнала можно компенсировать, включая в приемник кольцо фазовой автоподстройки частоты опорного гетеродина, параметры которого специально рассчитываются на основе теории оптимальной нелинейной фильтрации.

## Фазово-импульсная модуляция (ФИМ)

Пусть на вход приемника поступает последовательность гауссовых импульсов

$$f(h, \tau, t - \theta_k) = h \exp \left\{ -\frac{\pi}{\tau^2} (t - \theta_k)^2 \right\}. \quad (20)$$

Моменты прихода импульсов  $\theta_k = \theta_0 + \sum_{k'=1}^k T_{k'}$ , где  $T_k$  — длительность периода после прихода  $(k-1)$ -го импульса.  $T(t_k) \equiv T_k$ , где  $\theta_{k-1} < t_k < \theta_k$ . В нашем случае  $T = T_c [1 + m x(t)]$ , где  $T$  — период следования импульсов,  $T_c \equiv \bar{T}$ ,  $\frac{1}{T_c} = F_i$  — частота следования импульсов,  $m$  — коэффициент модуляции,  $x(t)$  — уравнение (1),  $h$  и  $\tau$  задаются.

Для выделения полезной информации необходимо осуществить последовательное измерение моментов прихода импульсов  $\theta_{k-1}$ ,  $\theta_k$  ( $T_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ ). При условии  $T_c \ll \frac{1}{\beta}$  ( $F_i \gg \beta$ ), которое мы будем считать выполненным, процесс  $T(t_k)$  можно считать функцией непрерывного времени. Тогда длительность периода является марковским случайным процессом с непрерывным временем, определяемым в соответствии со стохастическим уравнением

$$\dot{T} = -\beta(T - T_c) + \zeta, \quad (21)$$

где

$$\overline{\zeta\zeta_\tau} = b\delta(\tau), \quad b = \beta^2 m^2 T_c^2 \chi(g(T) = -\beta(T - T_c)).$$

Уравнения оптимальной фильтрации (18) и (19) в случае измерения сдвига во времени импульса  $\hat{f}(h, \tau, t - \theta_{k-1} - T)$

$$\dot{T}_0 = -\beta(T_0 - T_c) + \frac{2k_T^0}{N_1} r_1 \frac{\partial f_0}{\partial T}, \quad (22)$$

$$\dot{k}_T = -2\beta k_T + b + \frac{2k_T^2}{N_1} r_1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2}, \quad (23)$$

где  $k_T^0$  определяется как первое приближение при решении (23), не зависящее от времени, в соответствии с формулой (13), где  $\beta^* = \beta$ ,

$$\frac{1}{N^*} = -\frac{2}{N_1} r_1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} \quad (24)$$

(усреднение производится за время  $\bar{T} = T_c$ ).

Структура оптимального приемника, соответствующая (22), изображена на рис. 1,а. Оценочный сигнал  $\hat{f}_0(T_0, h, \tau, t)$  формируется через  $T_0$  сек после генерации предыдущего импульса специальной схемой формирования импульсов и подается на блок, образующий производную  $\frac{\partial f_0}{\partial T}$ . Этот блок может быть осуществлен в соответствии с правилом  $\frac{\partial f}{\partial T} = k[f(T+x) - f(T)]$ , где  $k = \frac{1}{x}$  ( $x \ll \tau$ ). Устройство, производящее операцию  $r_1 \frac{\partial f_0}{\partial T}$ , может быть названо по аналогии с частотным дискриминатором «фазовым» дискриминатором, так как сигнал с его выхода после усреднения фильтром пропорционален ошибке в измерении вре-

мени прихода (фазы) импульса. Фильтр с передаточной функцией  $F(p) = \frac{\beta}{p + \beta}$  производит усреднение шумового сигнала, поступающего на его вход, с постоянной времени  $T_\phi = \frac{1}{\beta}$ . Ввиду периодичности полезного сигнала и некоррелированности помехи эта операция эквивалентна усреднению за период следования импульсов. Помимо образования полезного управляющего сигнала фильтр также частично

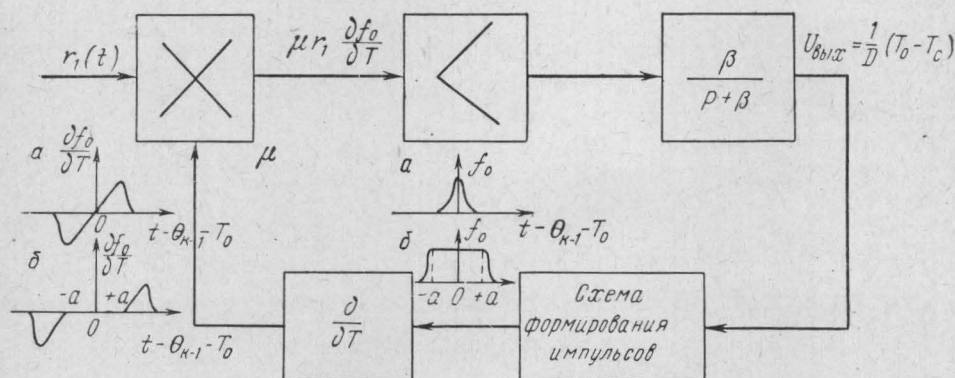


Рис. 1. Схема оптимального измерения момента прихода импульсов  $K_{yc} = \frac{2k_T^0}{N, \mu \beta D}$ ,  $\mu$  — коэффициент передачи умножителя,  $D$  — чувствительность исполнительного органа, управляющего временем запуска импульса

отфильтровывает помеху. Постоянная времени фильтра удовлетворяет условию  $T_\phi \gg T_c$ , что означает постоянство напряжения на выходе фильтра во время паузы между импульсами, т. е. усреднение высокочастотных составляющих помехи. Напряжение  $u_{\text{вых}}$  «отслеживает» изменение положения импульса на оси времени, так как ширина полосы пропускания фильтра как раз соответствует ширине спектра флуктуаций времени прихода импульса ( $\sim \beta$ ). Величина напряжения на выходе фильтра полностью определяет момент запуска импульса

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{D} (T_0 - T_c).$$

Определим среднеквадратичную ошибку фильтрации. Для этого вычислим  $\frac{1}{N^*}$  из (24). Очевидно,

$$r_1 \frac{\overline{\partial^2 f_0}}{\partial T^2} = \frac{1}{T_c} \int_{T_0 - \frac{T_c}{2}}^{T_0 + \frac{T_c}{2}} f^* \frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} dt, \quad (25)$$

где  $f^* \equiv f(y^*, t)$  — принимаемый полезный сигнал ( $n \frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} = 0$ ).

Пусть  $\varepsilon(t) = T^* - T_0$  — мгновенная ошибка воспроизведения параметра. Учитывая, что  $f^* = h \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau^2} (t_1 - T^*)^2\right\}$ , ( $t_1 = t - \theta_{k-1}$ ), а

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} = \frac{2\pi}{\tau^2} \left[ \frac{2\pi}{\tau^2} (t_1 - T_0)^2 - 1 \right] f_0,$$

получаем

$$r_1 \frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial T^2} = \frac{2\pi h^2 \exp\left\{-\frac{\pi \varepsilon^2}{\tau^2}\right\}}{\tau^2 T_c} \int_{\left(-\frac{T_c}{2}\right)}^{\frac{T_c}{2}} \left[ \frac{2\pi}{\tau^2} z^2 - 1 \right] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2\pi}{\tau^2} z^2 + \frac{2\pi}{\tau^2} \varepsilon z\right\} dz, \quad (26)$$

где  $z \equiv t_1 - T_0$ . В последнем выражении верхний и нижний пределы интегрирования можно заменить на  $+\infty$ ,  $-\infty$  соответственно. В результате интегрирования получаем

$$r_1 \frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial T^2} = -\frac{\pi h^2 F_i}{\sqrt{2} \tau} \left(1 - \frac{\pi \varepsilon^2}{\tau^2}\right) \exp\left\{-\frac{\pi \varepsilon^2}{2\tau^2}\right\}. \quad (27)$$

Будем считать, что в среднем ошибка измерения времени прихода импульса составляет малую часть его длительности, т. е.  $\frac{\varepsilon^2}{\tau^2} \ll 1$ .

Тогда  $\frac{1}{N^*} = \frac{\pi \sqrt{2} h^2 F_i}{N_1 \tau}$  и апостериорная дисперсия периода равна

$$k_T^0 = \frac{\beta N_1 \tau}{\pi \sqrt{2} h^2 F_i} \left( \sqrt{1 + \frac{\pi \sqrt{2} m^2 h^2 \kappa}{N_1 \tau F_i}} - 1 \right). \quad (28)$$

При  $N_1 \ll \pi \sqrt{2} m^2 h^2 \frac{T_c}{\tau} \kappa$  (малый шум) имеет место в соответствии с (14) следующая асимптотическая формула:

$$k_T^0 \approx \frac{m}{2^{1/4} \sqrt{\pi}} \frac{\tau^{1/2}}{h F_i^{3/2}} \beta \kappa^{1/2} N_1^{1/2}. \quad (29)$$

Отметим, что соотношения (28), (29) получены в предположении  $\varepsilon^2 \ll \tau^2$ , что соответствует следующему ограничению на интенсивность помехи:

$$N_1 \ll \frac{\pi \sqrt{2} F_i h^2 \tau^3}{(m^2 \beta^2 \kappa - 2\beta \tau^2)}. \quad (30)$$

При фиксированной помехе, интенсивность которой задана, это условие ограничивает как снизу, так и сверху величину длительности импульса. В общем случае можно, очевидно, рассчитать вероятность ошибки, большей длительности импульса, в зависимости от длительности импульса или какого-либо другого параметра. При выполнении условия (30) эта вероятность мала.

В заключение отметим, что изложенную теорию можно обобщить на случай «прямоугольного» импульса

$$f(h, \tau, t - \theta) = \begin{cases} h \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau^2} (t - \theta + a)^2\right\} & (t < \theta - a) \\ h & (\theta - a < t < \theta + a) \\ h \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau^2} (t - \theta - a)^2\right\} & (t > \theta + a) \end{cases} \quad (31)$$



Длительность импульса равна  $2a + \tau$ . Если  $\tau \ll 2a$ , то импульс можно считать прямоугольным. Схема оптимальной фильтрации совпадает в этом случае со схемой, изображенной на рис. 1, б. Ошибка фильтрации, как показывает исследование, не зависит от длительности импульса ( $2a$ ), но зависит от длительности фронта  $\left(\frac{\tau}{2}\right)$  и определяется в соответствии с (28), (29). Условия стационарного режима работы схемы:  $|\epsilon_{\max}| < \frac{\tau}{2}$  и  $|\epsilon_{\max}| < a + \frac{\tau}{2}$ . В отличие от ранее рассмотренного случая вторая схема работает более устойчиво, ибо вероятность срыва стационарного режима измерения («потери импульса») меньше.

### Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)

Пусть на вход приемника поступает последовательность гауссовых импульсов в соответствии с (20). Полезная информация заключена в величине амплитуды импульса  $h = h_c(1 + mx)$ , где  $x$  — уравнение (1). Уравнения оптимальной фильтрации (16), (17) в рассматриваемом случае

$$(g(h) = -\beta(h - h_c), \quad b = \beta^2 m^2 h_c^2 \kappa):$$

$$\dot{h}_0 = -\beta(h_0 - h_c) + \frac{2k_h^0}{N_1} [r_1 - f_0] \frac{\partial f_0}{\partial h}, \quad (32)$$

$$\dot{k}_h = -2\beta k_h + b - \frac{2k_h^2}{N_1} \left(\frac{\partial f_0}{\partial h}\right)^2, \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} = \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau^2}(t - \theta)^2\right\} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial h^2} = 0\right),$$

$k_h^0$  находится как первое приближение при решении (33) в соответствии с (13, 14), причем  $\beta^* = \beta$ ,  $\frac{1}{N^*} = \frac{2}{N_1} \left(\frac{\partial f_0}{\partial h}\right)^2$ . Производя усреднение за период следования импульсов аналогично случаю ФИМ, находим  $\frac{1}{N^*} = \frac{\sqrt{2}}{N_1} \tau F_i$ . Итак, апостериорная дисперсия в случае АИМ:

$$k_h^0 = \frac{\beta N_1}{\tau \sqrt{2} F_i} \left( \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2} m^2 h_c^2 \tau F_i \kappa}{N_1}} - 1 \right). \quad (34)$$

Асимптотическое выражение для малого шума

$$\left( N_1 \ll \sqrt{2} m^2 h_c^2 \frac{\tau}{T} \kappa \right),$$

$$k_h^0 \approx \frac{m h_c}{2^4 \tau^2 F_i^2} \beta \kappa^{\frac{1}{2}} N_1^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Уравнение оптимальной фильтрации (32) полностью определяет структуру оптимального приемника, изображенного на рис. 2. Схема формирования импульсов единичной амплитуды  $\frac{\partial f_0}{\partial h}$  вырабатывает

строб-импульсы, открывающие канал измерения амплитуды только на время действия полезного сигнала.

Рассмотрим случай «прямоугольных» импульсов (31), длительность которых  $\tau_i = 2a$ , а длительность фронта  $\tau_\phi = \frac{\tau}{2}$ . В этом случае структура оптимального устройства та же, что и для случая гауссовых импульсов. Однако средний квадрат ошибки фильтрации будет тем меньше, чем больше длительность импульса в соответствии с формулой, справедливой при  $N_1 \ll 2m^2 h_c^2 (\tau_i + \sqrt{2} \tau_\phi) F_i \kappa$

$$k_h^0 \approx \frac{mh_c}{2^2 (\tau_i + \sqrt{2} \tau_\phi)^2 F_i^2} \beta \kappa^2 N_1^{-1} \quad (36)$$

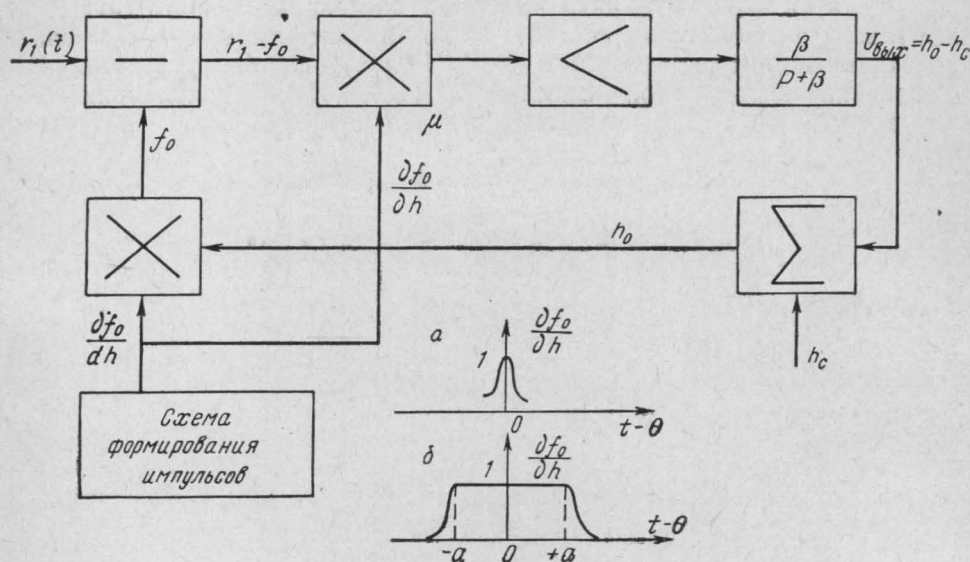


Рис. 2. Схема оптимального выделения АИМ — сигнала.  $K_{yc} = \frac{2k_h^0}{N_1 \beta \mu}$ ,  $\mu$  — коэффициент передачи умножителя

### Модуляция по длительности импульсов (ДИМ)

Пусть длительность импульсов меняется по закону  $\tau = \tau_c(1 + mx)$ , где  $\tau_c \equiv \tau$ ,  $x$  — уравнение (1). В рассматриваемом случае

$$(g(\tau) = -\beta(\tau - \tau_c), \quad b = \beta^2 m^2 \tau_c^2 \kappa)$$

общие уравнения фильтрации (16 — 17) принимают следующий вид:

$$\dot{\tau}_0 = -\beta(\tau_0 - \tau_c) + \frac{2k_\tau^0}{N_1} [r_1 - f_0] \frac{\partial f_0}{\partial \tau}, \quad (37)$$

$$\dot{k}_\tau = -2\beta k_\tau + b + \frac{2k_\tau^2}{N_1} \left[ (r_1 - f_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} - \left( \frac{\partial f_0}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (38)$$

Если  $f_0 = h \exp \left\{ -\frac{\pi}{\tau^2} (t - \theta)^2 \right\}$  — случай гауссовых импульсов, то

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{2\pi(t-\theta)^2}{\tau_0^3} f_0,$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} = \left[ \frac{4\pi^2(t-\theta)^4}{\tau_0^6} - \frac{6\pi(t-\theta)^2}{\tau_0^4} \right] f_0.$$

Из (38) получаем для первого приближения  $k_\tau^0$  общую формулу (13), где

$$\beta^* = \beta, \quad \frac{1}{N^*} = \frac{2}{N_1} \left[ (r_1 - f_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} - \left( \frac{\partial f_0}{\partial \tau} \right)^2 \right].$$

Вводя ошибку фильтрации  $\varepsilon = \tau^* - \tau_0$  ( $\tau^*$  — истинное,  $\tau_0$  — оценочное значение длительности) и считая  $|\varepsilon| \ll \tau_c$ , получаем

$$\frac{1}{N^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h^2 F_i}{\tau_c N_i}.$$

Конкретизируя (13) для рассматриваемого случая, находим

$$k_\tau^0 = \frac{\sqrt{2} \tau_c \beta N_1}{h^2 F_i} \left( \sqrt{1 + \frac{m^2 h^2 \tau_c F_i \kappa}{\sqrt{2} N_1}} - 1 \right). \quad (39)$$

При условии  $N_1 \ll \frac{1}{\sqrt{2}} m^2 h^2 \frac{\tau_c}{T} \kappa$  получаем следующее асимптотическое выражение для апостериорной дисперсии:

$$k_\tau^0 \approx 2^{\frac{1}{4}} \frac{m \tau_c^{\frac{3}{2}}}{h F_i^2} \beta \kappa^{\frac{1}{2}} N_1^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

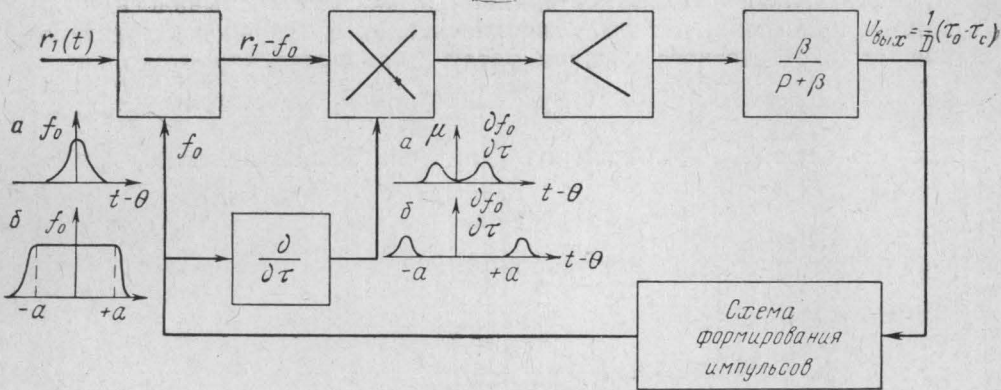


Рис. 3. Схема оптимального измерения длительности импульсов  $K_{yc} = \frac{2k_\tau^0}{N_1 \beta \mu D}$ , где  $\mu$  — коэффициент передачи умножителя,  $D$  — чувствительность исполнительного элемента, управляющего длительностью импульсов

Структура оптимальной схемы измерения длительности импульса, соответствующая уравнению (37), приведена на рис. 3. Умножитель в схеме, образующий  $(r_1 - f_0) \frac{\partial f_0}{\partial \tau}$ , также является по существу синхронным детектором, выделяющим в сочетании с фильтром полезный управляющий сигнал, ибо  $s - f_0 \approx c \frac{\partial f_0}{\partial \tau}$  (равенство тем точнее, чем меньше  $|\varepsilon|$ ).

Пусть полезный сигнал представляет собой последовательность «прямоугольных» импульсов (31), длительность которых с фронтами  $\tau_{\text{им}} = \tau_i + \tau$  ( $\tau = 2\tau_\phi$ ). ДИМ заключается тогда в следующем:  $\tau_{\text{им}} = \tau_{\text{им}}(1 + m\chi)$ , где  $\tau_{\text{им}} = \tau_i + \tau_c$  — средняя длительность импульса с фронтами. Пусть, ошибка фильтрации  $\varepsilon = \tau_{\text{им}}^* - \tau_{\text{им}0} \equiv \tau^* - \tau_0$ ; звездочкой обозначено истинное значение параметра, нулем — оценочное. Считая, что в среднем  $|\varepsilon| \ll \tau_c$ , получаем для асимптотического случая

$$\left( N_1 \ll \frac{1}{\sqrt{2}} m^2 \frac{\tau_{\text{им}}^2}{\tau_c} h^2 F_i \chi \right)$$

следующее значение апостериорной дисперсии параметра:

$$k_\tau^0 \approx 2^{\frac{1}{4}} \frac{m \tau_c^2}{h F_i^2} \frac{1}{\tau_{\text{им}}} \beta \chi^{\frac{1}{2}} N_1^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Оптимальный приемник в этом случае имеет ту же структуру, что и для гауссовых импульсов. Отметим, что рассмотренное обобщение носит лишь приближительный, качественный характер.

### Сравнение помехоустойчивости ФИМ/АМ, АИМ/АМ и ДИМ/АМ

Оптимальные приемники, изображенные на рисунках 1, 2 и 3, реализуются довольно несложным образом. Они осуществляют оптимальное измерение одного из трех параметров видеоимпульса в присутствии слабой помехи и выделяют сообщение  $x_0(t)$ . В случае последовательности радиоимпульсов на выходе приемника, как уже указывалось, необходимо к приведенным схемам добавить блок синхронного детектирования высокочастотного сигнала. Итак, для случая «прямоугольных» радиоимпульсов из (29, 36, 41), учитывая, что  $N_1 = 2N$ , а  $\bar{x}_0^2 = \frac{k^0}{m^2 y_c^2}$ , получаем следующие соотношения для среднеквадратичных ошибок

$$\left( \sigma = \sqrt{\bar{x}_0^2} \right),$$

возникающих при выделении сообщения:

$$\sigma^2 \text{ФИМ/АМ} \approx \frac{3}{2^4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\tau_\phi^2}{m} \frac{1}{F_i^2} \frac{1}{q^2} \frac{(\beta \chi)^2}{1}, \quad (42)$$

$$\sigma^2 \text{АИМ/АМ} \approx m^{-1} (\tau_i + \sqrt{2} \tau_\phi)^{-\frac{1}{2}} F_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{q^2} \frac{(\beta \chi)^2}{1}, \quad (43)$$

$$\sigma^2 \text{ДИМ/АМ} \approx 2^{\frac{5}{4}} \frac{\tau_\phi}{m (\tau_i + 2\tau_\phi)} \frac{1}{F_i^2} \frac{1}{q^2} \frac{(\beta \chi)^2}{1}, \quad (44)$$

где  $q = \frac{h^2}{N\beta}$  — обобщенное отношение сигнал/шум на входе приемника.

Полученные выражения справедливы также и для гауссовых импульсов, если положить  $\tau_i = 0$  (длительность гауссовых импульсов  $\tau = 2\tau_\phi$ ).

Как видно из (42—44), среднеквадратичная ошибка фильтрации зависит не только от отношения сигнал/шум и дисперсии сообщения  $\bar{x}^2$  ( $\bar{x}^2 = \frac{1}{2} \kappa\beta$ ), но и от характеристик импульсного сигнала. В ФИМ и ДИМ чем меньше длительность фронта  $\tau_\phi$ , тем меньше погрешность фильтрации. При этом в ФИМ точность измерения совершенно не зависит от длительности импульса  $\tau_i$ . В АИМ и ДИМ фильтрация тем лучше, чем длиннее импульсы и больше частота их следования. В ФИМ качество фильтрации тем лучше, чем меньше  $F_i$  (при условии  $F_i \gg \beta$ ). Действительно, положение импульса практически не меняется на протяжении  $T_c \ll \frac{1}{\beta}$ , поэтому чем реже мы открываем канал измерения, тем меньше среднеквадратичная ошибка сообщения на выходе. Другое дело АИМ и ДИМ: момент прихода импульса известен точно, поэтому чем чаще производится стробирование канала измерения параметра, тем больше сглаживание некоррелированной помехи, так как производится фактически накопление сигнала.

Для более удобного сравнения помехоустойчивости введем скважность  $Q = \frac{T_c}{\tau_i}$  и преобразуем формулы (42—44)

$$\sigma^2_{\text{ФИМ/АМ}} \approx \frac{2^4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\tau_\phi}{\tau_i} \right)^{\frac{1}{2}} m^{-1} Q^{-\frac{1}{2}} (\beta\kappa)^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

$$\sigma^2_{\text{АИМ/АМ}} \approx m^{-1} Q^{\frac{1}{2}} (\beta\kappa)^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

$$\sigma^2_{\text{ДИМ/АМ}} \approx 2^{\frac{5}{4}} m^{-1} \left( \frac{\tau_\phi}{\tau_i} \right)^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} (\beta\kappa)^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

Составим отношение ошибок для трех рассматриваемых видов импульсной модуляции

$$\sigma^2_{\text{АИМ}} : \sigma^2_{\text{ДИМ}} : \sigma^2_{\text{ФИМ}} = 1 : 2^{\frac{5}{4}} \left( \frac{\tau_\phi}{\tau_i} \right)^{\frac{1}{2}} : \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\tau_\phi}{\tau_i} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Q}. \quad (48)$$

Точность выделения сообщения в ДИМ и ФИМ тем больше, чем больше относительная крутизна фронтов  $\frac{\tau_i}{\tau_\phi}$ . Однако ФИМ имеет значительное преимущество по сравнению с ДИМ, которое тем значительнее, чем больше величина скважности  $Q$ .

Отметим, что соотношение соответствует лишь качественно выводам в [6], полученным совершенно другим способом без учета априорной статистики сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М., Госэнергоиздат, 1956.
2. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.
3. Стратонович Р. Л. «Радиотехника и электроника», 5, 11, 1751, 1960.
4. Кульман Н. К., Стратонович Р. Л. «Радиотехника и электроника», 9, 1, 67, 1964.
5. Кульман Н. К. «Радиотехника и электроника», 9, 5, 771, 1964.
6. Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию  
27. 7 1964 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата

---