

С. А. ИВАНОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ДЕМПФИРОВАНИИ

Рассмотрена задача об оптимальном параметрическом демпфировании вынужденных колебаний в контуре при воздействии на него случайной внешней силы. Решение находится с помощью асимптотического метода. Полученные результаты могут быть полезны в оценке параметрического демпфирования.

В настоящей заметке рассматривается задача об оптимальном параметрическом демпфировании вынужденных колебаний в контуре при воздействии на него случайной внешней силы. Решение проводится методом динамического программирования с привлечением теории марковских процессов. В отличие от работы [1], где шум и управляющее воздействие входят аддитивно, управление осуществляется за счет изменения одного из параметров контура (например, частоты). Полученное решение обладает рядом особенностей. Например, в рассматриваемом случае будет уже не одна, а две линии переключения. Характер линий переключения не зависит от интенсивности внешнего шумового воздействия, а только от глубины модуляции параметра контура.

С целью выяснения границ применимости полученных результатов была проведена соответствующая экспериментальная проверка.

Уравнение исследуемой системы имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 + u)x = \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ — белый шум, $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = B\delta(\tau)$, а $u(t)$ — управляющее воздействие. Необходимо найти такую функцию $u(t)$, ($|u| \leq k$), которая давала бы минимум следующему выражению:

$$v = M \left\{ \int_{t_0}^T C(x_\tau) d\tau \right\}, \quad (2)$$

где $C(x_\tau)$ — функция штрафа, x_τ — вектор достаточных координат системы, соответствующих моменту τ . В данном случае достаточные координаты совпадают с фазовыми координатами системы, и в качестве компонентов X_τ надо взять $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$. За функцию штрафа $C(x_\tau)$ примем x_1^2 . В этом случае при $T \rightarrow \infty$ (2) можно переписать в виде $v = \gamma(T - t_0)$, где γ — дисперсия x . Теперь обычным способом выведем уравнение альтернатив для нашего случая.

Функция минимальных будущих потерь

$$f_t(x_\tau, t) = M \left\{ \min_{u_\tau, \tau \geq t} \int_t^T C_\tau d\tau \right\} \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\frac{\partial f_t(x_\tau, t)}{\partial t} + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \min M \left\{ \frac{f_t(x_{t+\Delta}, t) - f_t(x_t, t)}{\Delta} + \frac{C_t}{x_t} \right\} = 0. \quad (4)$$

Для получения конкретного вида уравнения альтернатив (4), перепишем (1) в виде системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \xi(t) - \beta x_2 - x_1(1 + u). \quad (5)$$

Далее разлагаем $[f_t(x_{t+\Delta}, t) - f_t(x_t, t)]$ в ряд Тейлора по степеням $(x_1^{(t+\Delta)} - x_1^{(t)})$, $(x_2^{(t+\Delta)} - x_2^{(t)})$ и, учитывая (5), получим следующее альтернативное уравнение для нашей системы:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + x_2 \frac{\partial f_t}{\partial x_1} - (\beta x_2 + x_1) \frac{\partial f_t}{\partial x_2} - \min_u \left\{ u x_1 \frac{\partial f_t}{\partial x_2} + x_1^2 \right\} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_2^2} = 0. \quad (6)$$

Если рассматривать стационарный режим работы, то после установления флуктуаций в контуре на единицу времени будет приходиться постоянный штраф $\gamma = -\frac{\partial f_t}{\partial t}$; функция $f = f_t - \gamma(T - t)$ при $T \rightarrow \infty$ не будет зависеть от времени t . Так как функция штрафа явно не зависит от u , то для минимизации $\left\{ u x_1 \frac{\partial f_t}{\partial x_2} + x_1^2 \right\}$ следует положить

$$u = k \text{ при } \begin{cases} x_1 > 0, & \frac{\partial f_t}{\partial x_2} > 0, \\ x_1 < 0, & \frac{\partial f_t}{\partial x_2} < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$u = -k \text{ при } \begin{cases} x_1 > 0, & \frac{\partial f_t}{\partial x_2} < 0, \\ x_1 < 0, & \frac{\partial f_t}{\partial x_2} > 0. \end{cases}$$

Фазовая плоскость разбивается на 4 области, границы которых являются линиями переключения. Линии переключения находятся из условия $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Отсюда одна линия переключения может быть найдена сразу: $x_1 = 0$. На второй линии переключения должно выполняться условие $\frac{\partial f_t}{\partial x_2} = 0$.

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (\beta x_2 + x_1) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \gamma - x_1^2 + k \left| x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|. \quad (8)$$

Нахождение точного решения уравнения (8) затруднительно, поэтому будем искать приближенное решение по методу, предложенному Р. Л. Стратоновичем и Г. Е. Колосовым [1].

Из характера рассматриваемой задачи ясно, что приближенное выражение для функции потерь надо искать, учитывая малость величины управляющего воздействия u . В отличие от [1] величину u можно считать малой не только далеко от состояния равновесия, но и в непосредственной близости от него. Это связано с тем, что в [1] управляющее воздействие в системе входит аддитивно с шумом, а в рассматриваемом случае u является параметром системы.

В нулевом приближении функция потерь ищется в виде

$$f^{(0)} = a_1 x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \quad (9)$$

(при этом в (8) полагаем $k=0$). Подставляя $f^{(0)}$ в (8) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях x_1 и x_2 , находим коэффициенты в (9)

$$a_1 = \frac{1}{2\beta} + \frac{\beta}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta}, \quad a_{12} = 1, \quad \gamma^{(0)} = \frac{B}{2\beta}.$$

Вторую линию переключения находим, дифференцируя $f^{(0)}$ по x_2 и приравнявая получившееся выражение нулю:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_2} = x_1 + \frac{x_2}{\beta} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (8) для функции потерь в первом приближении можно переписать так:

$$x_2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} - (\beta x_2 + x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x_2^2} = \gamma^{(1)} - x_1^2 + k \left[x_1 \left(x_1 + \frac{x_2}{\beta} \right) \right].$$

Функция потерь $f^{(1)}$ равна

$$f^{(1)} = a_{40} x_1^4 + a_{31} x_1^3 x_2 + a_{22} x_1^2 + a_{13} x_1^3 x_1 + \\ + a_{04} x_2^4 + a_1 x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \text{const}, \quad (11)$$

где

$$a_{40} = 5,3k \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{B}, \quad a_{31} = \frac{k}{\pi B} \left[\frac{1}{6} + \beta \right],$$

$$a_{22} = \frac{2k\beta}{\pi B}, \quad a_{13} = -\frac{k}{6\pi B}, \quad a_{04} = \frac{11}{48\pi} \frac{k\beta}{B},$$

$$a_1 = \left[\frac{1}{2\beta} + \frac{\beta}{2} \right] + \frac{k}{\pi} \left[-\frac{1}{\beta^2} - \frac{21}{4} \right], \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} + \frac{k}{\pi} \left(-\frac{1}{\beta^2} - 10 \right),$$

$$a_{12} = 1 + \frac{k}{\pi} (a - 14\beta),$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{B}{2\beta} \left[1 - \frac{k}{\pi} \left(\frac{2}{\beta} + 4\beta \right) \right]. \quad (\beta^2 \ll 1).$$

График функции $f^{(1)}$ для частного случая $\beta=0,02$, $k=0,01$, $B=1$ приведен на рис. 1. Из (11) видно, что при увеличении B в n^2 раз необходимо изменить масштаб x_1 и x_2 в n раз. В этом случае график для линии переключения останется тем же.

С целью выяснения границ применимости полученных результатов была проведена экспериментальная проверка их на электронной модели МН-7. Было набрано уравнение $\dot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 (1+u)x = \xi(t)$, где $\omega_0 = 5$.

Измерялось либо $v = \int_0^T x_1^2 dt$ (T — фиксировано), либо T время — до-

стижения величиной v определенного уровня (в данном случае $v=100$ в) для различных линий переключения. Сравнению подвергались 3 результата: $\gamma^{(0)}$, $\gamma^{(1)}$ и γ' . (Для γ' линии переключения удовлетворяют следующим уравнениям: $x_1=0$, $x_2=0$.) \bar{v}_0 , \bar{T}_0 измерялось при отсутствии параметрического демпфирования; $\bar{v}_1\bar{T}_1$ — для линий переключения, вычисленных в 1-м приближении; v' , T' — линии переключения, удовлетворяющие уравнениям $x_1=0$, $x_2=0$; n — число измерений, Q — добротность контура.

Данные отдельных измерений объединялись и подвергались статистической обработке. Доверительные интервалы вычислялись для 95% уровня значимости. Из этих данных видно, что даже для $k = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2Q}$ отношение $\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(0)}}$ близко к расчетному, а доверительные интервалы для $\gamma^{(1)}$ и γ'

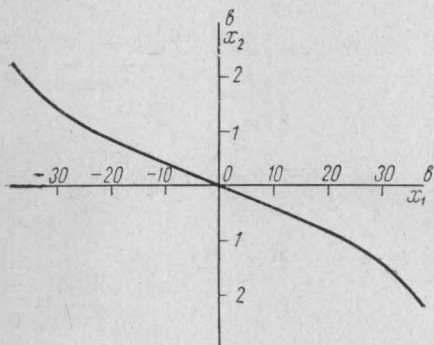


Рис. 1

перекрываются, т. е. вид графика линии переключения существенного влияния на γ не оказывает, если линия переключения близка к оси абсцисс. Для случая синусоидального внешнего сигнала и линий переключения, удовлетворяющих уравнениям $x_1=0$, $x_2=0$, потери энергии в контуре ΔN за период равны $\Delta N = 2N \left(\frac{\pi}{Q} + 2k \right)$. Для случая шумового внешнего воздействия дисперсия равна $\gamma^{(0)} = \frac{BQ}{2}$, где Q характеризует потери энергии в контуре ($k=0$).

По аналогии со случаем синусоидального внешнего сигнала ($Q \gg 1$ и $k \neq 0$) можно предположить, что потери энергии в контуре увеличились в $\left(1 + 2k \frac{Q}{\pi} \right)$, т. е. величину $\beta = \frac{1}{Q}$ можно заменить $\beta \left(1 + \frac{2u}{\pi\beta} \right)$. В этом случае $\gamma = \bar{x}^2 = \frac{B}{2\beta \left(1 + 2 \frac{k}{\pi\beta} \right)}$ или при

$k \ll 1$ это равно $\frac{B}{2\beta} \left(1 - \frac{2k}{\pi\beta} \right)$. Сравнивая γ' (11) с полученным резуль-

татом, видим, что они отличаются только на величину $\frac{4kB}{\pi}$, т. е. при $\frac{k}{\beta} = \text{const}$ и $\beta \rightarrow 0$ это различие стремится к нулю.

Из всего сказанного следует, что даже первое приближение дает достаточно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных результатов при сравнительно большой глубине модуляции параметра ($k=\beta/2$) и нет резко выраженной зависимости γ от вида линии переключения, соответствующей условию $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Основное ограничение, которое на нее накладывает — это требование, чтобы график линии переключения проходил достаточно близко к оси абсцисс (в исследуемом случае наклон линии переключения менялся в пределах от $-1/6$ до $+1/6$, т. е. модуль величины $\left(\frac{x_1}{x_2} \right)$ на линии переключения менялся от 0 до $1/6$).

	$\gamma^{(1)} / \gamma^{(0)}$	
	Теор.	Эксп.
$k = 0,015, Q = 50, T = 8 \text{ мин}$	—	—
$\left. \begin{array}{l} \bar{v}_0 = 138 \pm 6 \text{ в} \\ \bar{v}_1 = 92 \pm 4 \text{ в} \\ \bar{v}' = 96,6 \pm 4 \text{ в} \end{array} \right\} n = 72$	0,54	0,7
$k = 0,01, Q = 50, v = 100 \text{ в}$	—	—
$\left. \begin{array}{l} \bar{T}_0 = 338 \pm 15 \text{ сек} \\ \bar{T}_1 = 425 \pm 15 \text{ сек} \\ \bar{T}' = 424 \pm 16 \text{ сек} \end{array} \right\} n = 111$	0,7	0,71
$k = 0,01, Q = 100, v = 100 \text{ в}$	—	—
$\left. \begin{array}{l} \bar{T}_0 = 193 \pm 9 \text{ сек} \\ \bar{T}_1 = 259 \pm 11 \text{ сек} \\ \bar{T}' = 264 \pm 11 \text{ сек} \end{array} \right\} n = 183$	0,38	0,73
$k = 0,015, Q = 25, v = 100 \text{ в}$	—	—
$\left. \begin{array}{l} \bar{T}_0 = 718 \pm 40 \text{ сек} \\ \bar{T}_1 = 818 \pm 33 \text{ сек} \\ \bar{T}' = 854 \pm 45 \text{ сек} \end{array} \right\} n = 30$	0,79	0,84
$k = 0,015, Q = 25, T = 4 \text{ мин}$	—	—
$\left. \begin{array}{l} \bar{v}_0 = 73 \pm 3 \text{ в} \\ \bar{v}_1 = 59,0 \pm 2 \text{ в} \\ \bar{v}' = 59,0 \pm 2 \text{ в} \end{array} \right\} n = 160$	0,79	0,8

Автор благодарен Ю. М. Романовскому, Г. Е. Колосову и В. И. Шмальгаузену за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л., Колосов Г. Е. «Автоматика и телемеханика», № 12, 1641, 1964.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.

Поступила в редакцию
19. 9 1964 г.

Кафедра
общей физики для мехмата