Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 621.372.061.310

Ю. П. КУЗНЕЦОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНАЦИОННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Дано приближенное теоретическое рассмотрение комбинационного параметрического возбуждения в балансной схеме на частоте, равной полусумме несоизмеримых частот двух воздействующих сил. Показано, что поведение системы аналогично поведению системы с параметром, периодически меняющимся с частотой, равной сумме частот воздействующих сил. Экспериментально подтверждено, что зависимость коэффициента модуляции параметра от амплитуд воздействующих сил сложнее, чем простая пропорциональность их произведения. Найдено, что для амплитуд действующих сил имеется ограничение снизу и сверху, т. е. область их совместных значений, для которых возможно возбуждение, имеет замкнутый вид.

Постановка задачи

При воздействии на систему, содержащую нелинейный реактивный элемент, двух гармонических сил и при соблюдении определенных условий возможно получение параметрического возбуждения на частоте, равной полусумме частот воздействующих колебаний [1]. На возможность такого возбуждения впервые было указано в [2]. Позднее вопрос о комбинационных явлениях в параметрических системах рассматривался в [3, 4].

В то время как в работе [1] рассматривается комбинационное параметрическое возбуждение в однотактной схеме, в данной работе исследуется возбуждение LCR контура в балансной схеме. Сумма частот воздействующих сил (комбинационная частота в спектре изменения реактивного элемента) удовлетворяет условию получения параметрически возбужденных колебаний. Частоты воздействующих сил, как и в [1], выбраны несоизмеримыми.

В настоящей работе проведено экспериментальное исследование и приближенное теоретическое описание комбинационного параметрического возбуждения и сопоставление основных результатов эксперимента и расчетов.

Теоретическое рассмотрение

Рассмотрим балансную схему, содержащую две емкости полупроводниковых диодов (рис. 1, *а*). На каждый из диодов (рис. 1, *б*) действуют два переменных напряжения: напряжение $v=v_c(q)$ и управляющее напряжение $u=u(t)$, причем

$$u(t) = p_1 \cos \omega_1 t + p_2 \cos \omega_2 t. \qquad (1)$$

Вследствие несоизмеримости частот начальные фазы колебаний можно не учитывать.

Диоды выбираются идентичными. Зависимость дифференциальной емкости диода от напряжения равна.

$$c_g = c_0\left(1 + \frac{u}{\varphi}\right)^{-\frac{1}{n}},$$

где $2 \leqslant n \leqslant 3$. Напряжение смещения $u_{\text{см}} = u_0$ считаем входящим в состав управляющего напряжения.

В балансной схеме к одному из диодов приложено напряжение $u + \frac{1}{2}v$, к другому — $u - \frac{1}{2}v$. Тогда

$$\frac{1}{c_{g\text{ общ}}} = \frac{1}{c_0}\left\{\left[1 + \frac{1}{\varphi}\left(u - \frac{1}{2}v\right)\right]^{\frac{1}{n}} + \left[1 + \frac{1}{\varphi}\left(u + \frac{1}{2}v\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

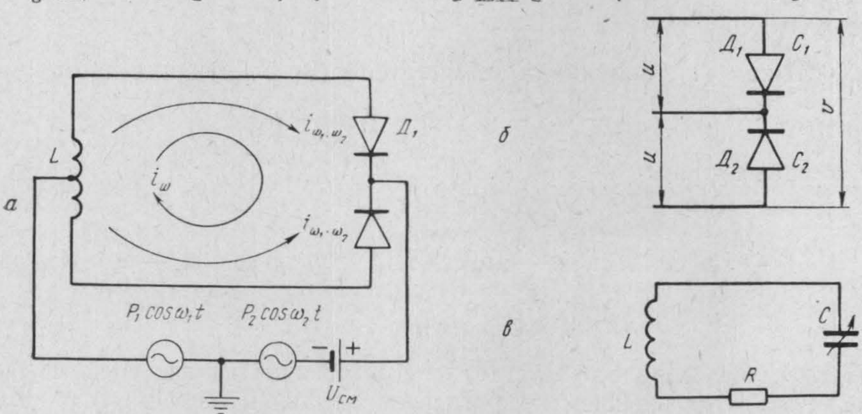

Рис. 1, *а* — принципиальная схема исследуемой системы, *б* — распределение напряжений на диодах, *в* — эквивалентная схема для возбуждаемых колебаний

Примем $u(t)$ за параметр. Учтем, что $c_g = dq/dv$. Тогда

$$q - q_0 = c_0 \int \frac{dv}{\left[1 + \frac{1}{\varphi}\left(u - \frac{1}{2}v\right)\right]^{\frac{1}{n}} + \left[1 + \frac{1}{\varphi}\left(u + \frac{1}{2}v\right)\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Выражения в квадратных скобках, стоящие в знаменателе под знаком интеграла, разложим в ряд в точке $v = 0$. Ограничимся тремя членами разложения и введем обозначения

$$\bar{c}_0 = \frac{c_0}{2\left(1 + \frac{u}{\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}}, \quad a^2 = \frac{1 - n}{8n^2\varphi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{\varphi}\right)^2}.$$

Имеем

$$q - q_0 = \bar{c}_0 \int \frac{dv}{1 + a^2v^2},$$

отсюда

$$v = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left[\frac{a}{\bar{c}_0}(q - q_0)\right].$$

Разложим tg в ряд и возьмем два члена разложения. Обозначив $\gamma = \frac{a^2}{3\bar{c}_0^2}$, окончательно получим

$$v = \frac{1}{\bar{c}_0} [(q - q_0) + \gamma (q - q_0)^3]. \tag{2}$$

Так как $q = 0 |_{v=0}$ и $q_0 = q(u)$, то $q_0 = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}$. Представим зависимость $\bar{c}_0(u)$ в виде ряда в точке $u = u_0$:

$$\bar{c}_0 \simeq \frac{c_0'}{1 + \alpha (u - u_0) + \beta (u - u_0)^2}, \tag{3}$$

где

$$c_0' = \frac{c_0}{\left(1 + \frac{u_0}{\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}}, \quad \alpha = \frac{1}{n\varphi\left(1 + \frac{u_0}{\varphi}\right)}, \quad \beta = -\frac{n-1}{2n^2\varphi^2\left(1 + \frac{u_0}{\varphi}\right)^2}.$$

Учитывая (1), получим в знаменателе (3) следующие постоянные

$$1 - \alpha u_0 + \beta u_0^2 + \frac{1}{2} \beta (p_1^2 + p_2^2)$$

и переменные члены

$$(\alpha p_1 - 2p_1 u_0 \beta) \cos \omega_1 t + (\alpha p_2 - 2p_2 \beta) \cos \omega_2 t +$$
$$+ \frac{1}{2} \beta p_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} \beta p_2^2 \cos 2\omega_2 t + p_1 p_2 \beta \cos (\omega_2 - \omega_1) +$$
$$+ p_1 p_2 \beta \cos (\omega_1 + \omega_2) t.$$

Таким образом, здесь присутствует интересующий нас член с частотой $\omega_1 + \omega_2$. В дальнейшем не учитываем компоненты с другими частотами, так как для них частотные условия параметрического возбуждения в рассматриваемой системе не соблюдаются. Действительно, так как

$$\omega = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}, \quad \omega_1 < \omega \simeq \omega_0 < \omega_2$$

и возбуждение возможно лишь в определенном интервале расстройки ω относительно ω_0, то условия возбуждения для колебаний с частотами, отличными от $\omega = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$, не могут быть выполнены*.

Оставив постоянные члены и член с частотой $\omega_1 + \omega_2$ и обозначив через

$$c_0'' = \frac{c_0'}{1 - \alpha u_0 + \beta u_0^2 + \frac{1}{2} \beta (p_1^2 + p_2^2)}, \tag{4}$$

$$m = \frac{\beta p_1 p_2}{1 - \alpha u_0 + \beta u_0^2 + \frac{1}{2} \beta (p_1^2 + p_2^2)}, \tag{5}$$

получим

$$\bar{c}_0 = \frac{c''}{1 + m \cos 2\omega t}, \tag{6}$$

где $2\omega = \omega_1 + \omega_2$.

* При этом имеется в виду возбуждение в первой области неустойчивости.

Учитывая (2) и (6), получим для возбуждаемых колебаний на нелинейной емкости контура следующее выражение:

$$v = \frac{1}{c_0''}\,[1 + m\cos 2\omega t]\,[(q - q_0) + \gamma (q - q_0)^3].$$

Из рис. 1, *в* для контура имеем уравнение

$$L\,\frac{di}{dt} + Ri + v = 0.$$

Введем новую переменную $x = q - q_0$ и обозначения $2\omega t = 2\tau$, $\frac{1}{Lc_0''} = \omega_0^2$, $\frac{R}{\omega L} = 2\vartheta$, $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \xi$, при этом предполагаем, что m, γ и ξ много меньше единицы. Тогда, пренебрегая членами второго порядка малости относительно m, γ и ξ, получим для рассматриваемой системы уравнение

$$\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + (1 + \xi + \gamma x^2 + m\cos 2\tau)\,x = 0. \qquad (7)$$

Коэффициент γ принят постоянным (не зависящим от u), что возможно лишь при условии малости γ.

В [1] система описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(x + \gamma x^3) = p_1\cos\omega_1 t + p_2\cos\omega_2 t,$$

где из-за несоизмеримости частот ω_1 и ω_2 правая часть уравнения является непериодической функцией времени. Учитывая, что в рассматриваемом случае выбрана балансная схема, возможно свести действие внешних сил к изменению реактивного параметра с частотой $\omega_1 + \omega_2$. Тогда система описывается уравнением (7), решение которого известно *. В частности, условие возбуждения будет: $m^2 \geqslant 16\vartheta^2 + 4\xi^2$, пороговое значение коэффициента модуляции параметра $m_{\min} = 4\vartheta\,|_{\xi=0}$, стационарная амплитуда возбужденных колебаний

$$A^2 = \frac{4}{3\gamma}\left(-\xi \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - 4\vartheta^2}\right).$$

Коэффициент модуляции параметра m зависит от амплитуд p_1 и p_2, однако эта зависимость несколько сложнее, чем простая пропорциональность произведению $p_1 p_2$. На рис. 2 приведена теоретическая зависимость m от $p_1 p_2$ по (5) для случая одинаковых p_1 и p_2. Влияние члена $\frac{1}{2}\beta\,(p_1^2 + p_2^2)$ на изменение m видно из сопоставления этой зависимости с линейной зависимостью m от $p_1 p_2$.

Появление постоянных составляющих за счет нелинейных членов ведет к тому, что они частично компенсируют приложенное напряжение смещения. Это ведет к увеличению для данного фиксированного напряжения смещения нелинейности, ибо фактическое напряжение смещения меньше приложенного. Следовательно, при увеличении p_1, p_2 коэффициент m будет расти, причем рост m зависит от роста p_1 и p_2 нелинейно.

Собственная частота системы определяется емкостью c_0'' (4), поэтому она зависит от величин p_1 и p_2. При увеличении p_1 и p_2 ω_0

---

* См., например, Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.

уменьшается. Для реальных систем $\Delta\omega_0$ (p_1, p_2), изменение собственной частоты, вносимое за счет действующих сил и обусловленное нелинейностью, может достигать 10—15% от $\omega_0(u_0)$ — собственной частоты при отсутствии внешнего воздействия.

Поскольку для m имеется пороговое значение, т. е. существует минимальная глубина модуляции параметра, необходимая для возбуждения, имеется порог и для p_1p_2. Однако при данном теоретическом рассмотрении мы не можем получить информацию о том, чем определяется и каково минимальное значение p_1 (или p_2) для фиксированного значения m (больше порогового).

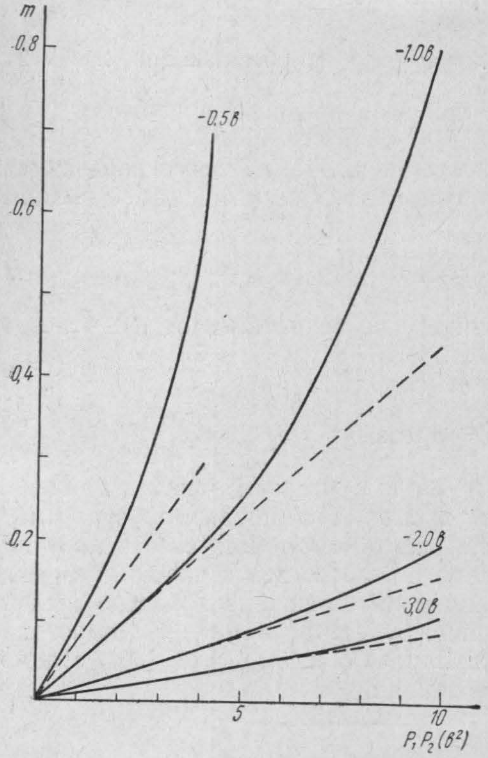

Рис. 2. Теоретическая зависимость коэффициента модуляции параметра m от амплитуд воздействующих сил p_1 и p_2 $(p_1=p_2)$

Аналогично для p_1 и p_2 существуют ограничения со стороны максимальных значений. Потолок p_1 и p_2 определяется в основном зависимостью от p_1 и p_2 расстройки ξ.

Наконец, теоретическое рассмотрение справедливо для систем, в которых используются диоды как с резким, так и с плавным переходом.

Основные результаты эксперимента

Комбинационное параметрическое возбуждение изучалось в балансной схеме (рис. 1, *а*), в которой использовались промышленные типы сплавных кремниевых и германиевых диодов.

В данном опыте добротность схемы должна была быть достаточно большой. Этого требовали следующие предпосылки. Коэффициент модуляции параметра зависит от коэффициента β, который на порядок меньше α, определяющего вклад энергии в системе с одной накачкой. Следовательно, в данном случае требуются бóльшие амплитуды p_1 и p_2. Из-за несвязанности же фаз амплитуды воздействующих сил в некоторые моменты времени могут складываться, т. е. общее напряжение их может быть соизмеримым или даже больше величины отрицательного напряжения смещения, а это приводит к большой проводимости диодов, т. е. к резкому ухудшению добротности схемы. Исходя из сказанного рабочий диапазон частот выбирался с учетом необходимости получения максимально возможной в данной схеме добротности. В настоящем опыте она составляла величину порядка 100—200.

В эксперименте были изучены все основные характеристики возбуждения (резонансные кривые, амплитудные характеристики, область возбуждения и др.). Результаты опыта были сопоставлены с данными расчетов, полученных из решения уравнения (7). Обнаружено удовлетворительное их качественное и количественное согласование. Были выявлены некоторые особенности, присущие рассматриваемому явлению. Подробно об эксперименте см. [5]. Здесь же приведем только сравнение экспериментальных и расчетных данных для коэффициента модуляции параметра m (табл. 1) и для значений амплитуд возбужденных колебаний A (табл. 2) и остановимся на особенностях комбинационного возбуждения, которые получены при экспериментальном исследовании.

Таблица 1

u_0, в	ω_1/ω_2	m_{min} (теор.)	m_{max} (теор.)	m_{min} (эксп.)	m_{max} (эксп.)
—3,0	0,080	0,0170	0,040	0,040	0,080
—3,0	0,220	—	—	0,0170	0,040
—2,50	0,080	—	—	0,040	0,080
—2,50	0,260	—	—	0,220	0,430
—2,0	0,0850	—	—	0,0380	0,080
—2,0	0,260	—	—	0,0220	0,0420
—0,50	0,10	—	—	0,030	0,10
—0,50	0,370	—	—	0,0250	0,0470

Потери в контуре считаются постоянными, расстройка резонансного контура равна нулю.

Таблица 2

u_0, в	ω_1/ω_2	$A_{теор.}$	$A_{эксп.}$
—3,0	0,0750	5,0	6,0
—3,0	0,240	5,0	5,0
—2,50	0,080	6,0	6,60
—2,50	0,260	6,0	6,20
—0,50	0,10	2,50	3,0
—0,50	0,320	2,50	2,0

Расстройка резонансного контура постоянна.

Помимо обычной для параметрических систем области возбуждения $m(\xi)$, которая в данном эксперименте определялась как $p_1p_2(\xi)$, существует область возбуждения (p_1, p_2), представляющая собой совокупность совместных значений p_1 и p_2 (при $u_0=\text{const}$ и $\omega=\text{const}$), для которых возможно получение комбинационного возбуждения.

Область (p_1, p_2) (рис. 3) ограничена замкнутой кривой (фактически: кривая пороговых и кривая потолочных значений). При сравнении областей (p_1, p_2) для фиксированного ξ и различных u_0 видно, что область стягивается в точку при том минимальном смещении, при котором колебания уже не возбуждаются. При увеличении смещения область расширяется, достигая при некотором смещении максимальной величины. Этой области соответствует максимальная амплитуда возбужденных колебаний. С дальнейшим увеличением смещения площадь области медленно уменьшается и исчезает при некотором u_0 (учитываем конечную мощность генераторов).

Для максимальной области имеем наиболее благоприятное соотношение параметров, определяющих вложение и расход энергии в системе. Увеличение p_1 и p_2 при малых смещениях увеличивает проводимость и величину расстройки. Если увеличивать смещение, то проводимость падает, но уменьшается и нелинейность (β). Компенсацию можно получить за счет увеличения p_1 и p_2, но в известных пределах, так как мощность генераторов ограничена.

На рис. 4 приведена зависимость $p_1p_2(\xi)$ на уровне максимальных амплитуд возбужденных колебаний для различных напряжений смещения. Вследствие зависимости ω_0 от p_1 и p_2 минимум каждой кривой приходится на значение ξ, отличное от нуля. Эта же зависимость в известном смысле определяет вид кривых (несимметричность).

Две области (p_1, p_2) и $p_1p_2(\xi)$ являются частными случаями трехмерной области возбуждения (рис. 5).

Выявлена зависимость изученных характеристик от отношения частот воздействующих сил ω_1/ω_2 (и как следствие, «неравноправность» амплитуд p_1 и p_2). Естественно, что при теоретическом рассмотрении этой особенности не было обнаружено, поскольку силы представлялись равноправными. Поэтому, например, в выражение для m амплитуды p_1 и p_2 входят симметрично.

Подробно об указанной зависимости см. [5]. Отметим только, что зависимость характеристик от величины ω_1/ω_2, проявляющаяся, напри-

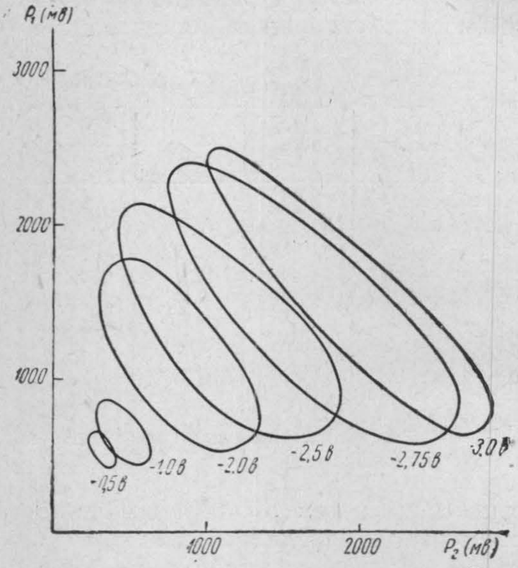

Рис. 3. Область возбуждения (p_1, p_2). Диод Д — 808, $\omega_1=\mathrm{const}$, $\xi=\mathrm{const}$

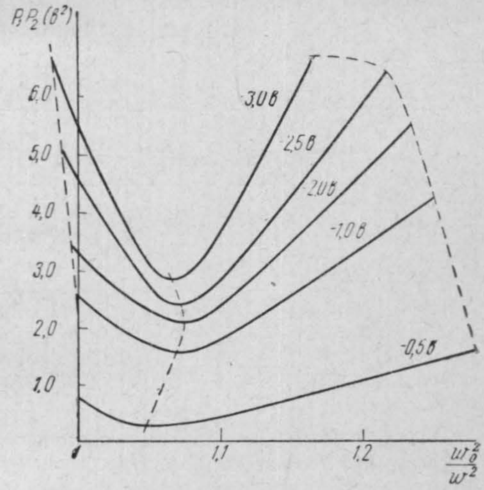

Рис. 4. Зависимость p_1p_2 от расстройки ξ на уровне максимальных амплитуд возбужденных колебаний. Диод Д — 808, $\omega_1=\mathrm{const}$

Рис. 5. Общий вид экспериментальной области возбуждения. $u_{\text{см}}=\mathrm{const}$, $\Delta\xi_0(p_1p_2)$ — вносимое за счет P_1 и P_2 смещение начала координат и пороговых значений P_1 и P_2 при $u_0\xi=0$

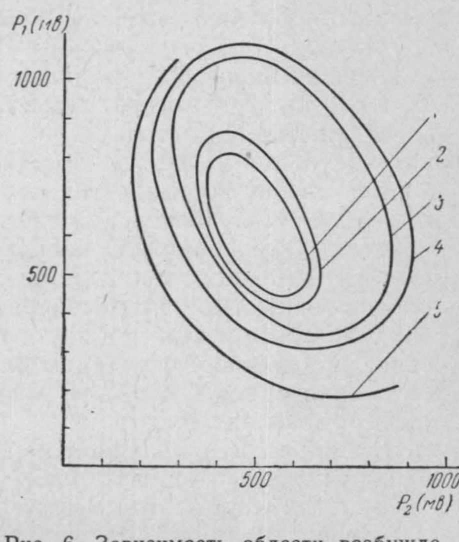

Рис. 6. Зависимость области возбуждения (p_1p_2) от величины отношения частот воздействующих сил ω_1/ω_2. Диод Д — 808, $\omega=\mathrm{const}$, $u_{\text{см}}=1{,}75$ *в*, $\xi=0{,}06$. *1* — $\omega_1/\omega_2=0{,}2180$, *2* — $\omega_1/\omega_2=0{,}1750$, *3* — $\omega_1/\omega_2=0{,}1350$, *4* — $\omega_1/\omega_2=0{,}0840$, *5* — $\omega_1/\omega_2=0{,}0460$

мер, в том, что при уменьшении отношения ω_1/ω_2 растет амплитуда возбужденных колебаний (вместе с тем ухудшается их форма), увеличивается площадь области возбуждения, подымается порог возбуждения по p_1 и p_2 и др., на опыте отчетливо наблюдается не при всех значениях ω_1/ω_2. Так, при использовании в схеме диодов Д-304 зависимость становится заметной при $\omega_1/\omega_2 \cong 0{,}270$ и ниже.

Рис. 6 в качестве примера иллюстрирует зависимость области (p_1, p_2) от ω_1/ω_2. С уменьшением отношения ω_1/ω_2 площадь области увеличивается и при некотором малом ω_1/ω_2 со стороны потолочных значений переходит в область возбуждения на частоте $\omega_2/2$.

Сказанное выше становится ясным, если учесть, что добротность схемы зависит от частоты. С увеличением ω_2 от ω_0 до $2\omega_0$ изменение добротности в данной схеме для колебания с частотой ω_1 было не более чем в два раза. Тогда как при изменении ω_1 от ω_0 до нуля добротность для колебания с частотой ω_1 изменялась на порядок и больше. Отсюда следует, что в данной системе, где частоты ω_1 и ω_2 расположены по разные стороны относительно собственной частоты, воздействующие колебания будут заведомо «неравноправными».

Выводы

Проведенное сопоставление приближенных теоретических результатов с данными эксперимента (для коэффициента модуляции параметра, амплитуды генерируемых колебаний, условия возбуждения и др.) показывает достаточно удовлетворительное их согласование в широком интервале изменения отношения ω_1/ω_2 и напряжения смещения. Отсюда следует, что допущения, сделанные при теоретическом рассмотрении явления, не внесли существенных ошибок.

Значительные отклонения наблюдаются при малых отношениях ω_1/ω_2 и при малых напряжениях смещения. Эти отклонения являются следствиями того, что, во-первых, не учитывалась неодинаковая реакция системы на воздействие сил с различными частотами, во-вторых, не учитывался значительный рост проводимости при малых отрицательных смещениях.

В заключение искренне благодарю проф. В. В. Мигулина за предоставление темы и ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», **7**, 11, 1962.
2. Мигулин В. В., Альперт Я. Л. ЖТФ, **6**, 5, 812, 1936.
3. Bloom S., Chang K. N. J. Appl. Phys., **29**, 594, 1958.
4. Chang K. K. N., Bloom S. Proc. IRE, **46**, 1383, 1958.
5. Кузнецов Ю. П. Дипломная работа. МГУ, 1963.

Поступила в редакцию
22. 10 1964 г.

Кафедра
физики колебаний