Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 523.034.43

ВУ ТХАНЬ ХИЕТ

ЛОКАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Исходя из концепции относительного гравитационного поля [1], подсчитана локальная энергия некоторых типов слабых гравитационных волн и слабых статических полей вне материи в малых областях в окрестности опорной точки. Локальная энергия этих слабых полей положительна.

Введение

Гравитационное поле, определяемое согласно [19—22] как символ Кристоффеля, в отличие от других полей (например электромагнитного) не локализуемо *. Это значит, что гравитационное поле в данной точке пространства — времени может быть равно нулю или не равно нулю в зависимости от того, в какой системе координат это поле рассматривается. Однако описание поля по концепции относительного гравитационного поля [1] позволяет в некотором смысле локализовать гравитационное поле во всех точках по отношению к опорной точке. Ценным свойством такой локализации является то, что она не противоречит принципу эквивалентности.

В работе [1] показано, что при описании гравитационного поля физически существенным является только относительное гравитационное поле, т. е. гравитационное поле в точке X по отношению к полю в опорной точке X'. Относительное гравитационное поле представляет собой двухточечный тензор

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma}(X, X') = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X, X'), \tag{1}$$

где $\gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}(X)$ суть скобки Кристоффеля в пространстве—времени V_4 в некоторой системе координат K, а $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(XX')$ суть скобки Кристоффеля в плоском пространстве $E_{x'}$, соприкасающемся с V_4 в точке X', в системе координат K' при отображении V_4 на $E_{x'}$. Способ отображения V_4 на $E_{x'}$ зависит от выбора опорной точки X'. При отображении V_4 на $E_{x'}$ геодезические в V_4, проходящие через X', отображаются в прямые в $E_{x'}$, проходящие через X', углы, образуемые геодезическими в точке X', остаются неизменными, а интервалы от произвольной точки M в V_4 и ее образа M^* в $E_{x'}$ до точки X', измеренные вдоль геодезических, в V_4 и $E_{x'}$ одинаковы. При этом метрический тензор $G_{\mu\nu}$ пространства $E_{x'}$ оказывается тесно связанным [2] с мировой функцией Синга [3].

* Некоторые авторы [3, 4] определяют гравитационное поле как тензор кривизны Римана, и по этому определению гравитационное поле локализуемо.

Согласно [1], 4-импульс гравитационного поля относительно опорной точки X' определяется соотношением

$$P_{\beta'} = P_{\beta'}(X') = \int_{\Sigma} \theta^{\alpha}_{g\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_{\alpha},$$

где $P_{\beta'}$ — относительный 4-импульс гравитационного поля, являющийся вектором в точке X', $D_x = \det \| G_{\mu\nu} \|$, Σ — произвольная бесконечная пространственно-подобная гиперповерхность, $\theta^{\alpha}_{g\beta'} = P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}\theta^{\alpha}_{g\gamma}$, $P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}$ — тензор параллельного переноса в $E_{x'}$, а $\theta^{\alpha}_{g\gamma}$ — тензор энергии-импульса гравитационного поля относительно точки X', даваемый соотношением

$$\Lambda\theta^{\alpha}_{g\beta} = -\frac{1}{2\varkappa}\{g^{\rho\sigma}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\delta} - g^{\mu\delta}g^{\alpha\nu})(Q_{\sigma\nu\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\nu\sigma\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\sigma\rho\beta}Q_{\delta\mu\nu}) - \delta^{\alpha}_{\beta}L_g\},$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{D_x}{g}}, \quad g = \det \| g_{\mu\nu} \|, \quad Q_{\sigma\nu\beta} = g_{\sigma\mu}Q^{\mu}_{\nu\beta}. \tag{2}$$

Здесь L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля относительно точки X', взятая в виде

$$L_g = L_g(X, X') = g^{\mu\beta}(Q^{\alpha}_{\gamma\beta}Q^{\gamma}_{\alpha\mu} - Q^{\alpha}_{\mu\beta}Q^{\gamma}_{\alpha\gamma}), \tag{3}$$

$\varkappa = \dfrac{8\pi\gamma}{c^4}$, γ — гравитационная постоянная Ньютона. В том случае, если в качестве Σ выбрана гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, получим

$$P_{\beta'} = \int_{\Sigma} \Lambda\overset{\circ}{\theta}_{g\beta'} \sqrt{-g}\, d^3x, \quad d^3x = dx^1dx^2dx^3.$$

Локальная энергия гравитационного поля, находящегося внутри некоторой области в некоторый момент времени, относительно опорной точки X' определяется следующим образом:

$$P_{0'} = \int_{\Sigma} \Lambda\overset{\circ}{\theta}_{g0'} \sqrt{-g}\, d^3x, \quad d^3x = dx^1dx^2dx^3, \tag{4}$$

где Σ — гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, ограничивающая 3-объем рассматриваемой области.

Локальная энергия слабых полей в свободном пространстве

Согласно [1],

$$g_{\mu\beta}G^{\beta} - G_{\mu\beta}G^{\beta} = 0. \tag{5}$$

Продифференцируя (5) касательно по x^{ν} и, учитывая, что [1]

$$G_{\mu\beta||\nu} = 0, \quad G^{\beta}_{||\nu} = \delta^{\beta}_{\nu},$$

получаем

$$g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} = -g_{\mu\beta||\nu}G^{\beta}. \tag{6}$$

Это соотношение выражает отклонение $g_{\mu\nu}$ от плоской метрики $G_{\mu\nu}$. Для слабого поля $g_{\mu\nu}$ очень мало отличается от $G_{\mu\nu}$ или

$$h_{\mu\nu} = -g_{\mu\beta||\nu}G^{\beta} \ll g_{\mu\nu},\ G_{\mu\nu}. \tag{7}$$

В случае слабого поля будем пользоваться координатами x^i, для которых

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{8}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор плоского мира Минковского [$\eta_{\mu\nu} = diag\,(1,\ -1,\ -1,\ -1)$], а $\varepsilon_{\mu\nu}$ и его производные — малые величины ($|\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1$). Для большей наглядности будем рассматривать x^i как прямоугольные декартовы координаты в четырехмерном пространстве ($x^0 = t$, скорость света выбрана за единицу, $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$).

(Заметим, что при любых малых преобразованиях $x^{i'} = x^i + \delta x^i$, $\left|\dfrac{\partial(\delta x^i)}{\partial x^j}\right| \ll 1$, мы получим снова $|\varepsilon_{\mu'\nu'}| \ll 1$).

Найдем выражение для $h_{\mu\nu}$ в случае слабого поля. (Из (7) и (8) видно, что $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.)
Согласно [2]

$$g_{\mu\beta\|\nu} = g_{\mu\gamma} g_{\beta\delta} G^{\gamma\alpha'} G^{\delta\lambda'} F_{\nu\rho\alpha'\lambda'} G^{\rho},$$

и, по определению [1],

$$P^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu} = -\,g_{\mu\gamma} G^{\gamma\alpha'}.$$

Отсюда

$$h_{\mu\nu} = -\,P^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu} P^{\lambda'\cdot}_{\cdot\beta} F_{\nu\rho\alpha'\lambda'} G^{\rho} G^{\beta}, \qquad (9)$$

где $F_{\nu\rho\alpha'\lambda'}$ — двухточечный тензор кривизны.

Разлагая $P^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu}$, $F_{\nu\rho\alpha'\nu'}$ в ряды в окрестности точки X' и используя символ

$$[Q] = \lim_{x \to x'} Q,$$

имеем [1,2]

$$P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta'} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \left[\frac{\partial P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta'}}{\partial x\mu}\right] \zeta\mu + \ldots,$$

$$F_{\nu\rho\alpha'\lambda'} = f_{\alpha\lambda\nu\rho}(X') + \left[\frac{\partial F_{\nu\rho\alpha'\lambda'}}{\partial x^{\mu}}\right] \zeta\mu + \ldots,$$

где $\zeta^{\mu} = x^{\mu} - x^{\mu'}$,

$$f_{\alpha\lambda\nu\rho}(X') = \frac{1}{3}\{r_{\alpha\nu\rho\lambda}(X') + r_{\alpha\rho\nu\lambda}(X')\},$$

$r_{\alpha\nu\rho\lambda}$ — тензор кривизны Римана.
Отсюда в низшем приближении получаем из (9)

$$h_{\mu\nu} = -\,\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\beta} f_{\alpha\lambda\nu\rho}(X') G^{\rho} G^{\beta} = -\,\frac{1}{3} r_{\mu\rho\nu\lambda}(X') G^{\rho} G^{\lambda}. \qquad (10)$$

Предполагаем, что рассматриваемая область мала (или тензор кривизны меняется очень медленно из одной точки в другую). Заметим, что (10) справедливо для любой немалой области, когда поле симметричное [4, 10], т. е. когда $r_{\mu\rho\nu\lambda};\ \delta = 0$.

Из (10) видим, что $h_{\mu\nu}$ есть тензор и поэтому соотношение

$$g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} \approx -\,\frac{1}{3} r_{\mu\rho\nu\lambda}(X') G^{\rho} G^{\lambda} \qquad (11)$$

справедливо для любой системы координат в X'. Наше соотношение (11) совпадает с тем, которое получили и другие авторы [4, 17] в системе нормальных координат в X', в которой [1]

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},\quad G^{\rho} = \xi^{\rho}.$$

В нашей системе координат имеем в нулевом приближении по $\varepsilon_{\mu\nu}$

$G^{\rho} \approx \zeta^{\rho}$,

и, поэтому, в первом приближении по $\varepsilon_{\mu\nu}$ получим

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} r_{\mu\rho\nu\lambda}^{-}(X') \xi^{\rho}\xi^{\lambda}, \tag{12}$$

где

$$r_{\mu\rho\nu\lambda} = \frac{1}{2}\{g_{\mu\lambda,\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu,\lambda} - g_{\mu\nu,\rho,\lambda} - g_{\rho\lambda,\mu,\nu}\}.$$

(Здесь и в дальнейшем обычные производные будем обозначать запятой перед соответствующим индексом.) Итак, для слабого поля

$$\left| -\frac{1}{3} r_{\mu\rho\nu\lambda}(X') \xi^{\rho}\xi^{\lambda} \right| \ll 1.$$

Из соотношений [1]

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} G^{\alpha m}\{G_{m\beta,\gamma} + G_{m\gamma,\beta} - G_{\beta\gamma,m}\},$$

$$\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha m}\{g_{m\beta,\gamma} + g_{m\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,m}\}$$

и (1)

получим в первом приближении по $\varepsilon_{\mu\nu}$

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(h_{\alpha\beta,\gamma} + h_{\alpha\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha}). \tag{13}$$

В низшем приближении имеем

$$\Lambda\theta^{\alpha}_{g\beta'} = P^{\cdot\gamma}_{\beta'}.\Lambda\theta^{\alpha}_{g\gamma} \approx \Lambda\theta^{\alpha}_{g\beta}.$$

С помощью (4), (2), (3), (12) и (13) подсчитаем локальную энергию в малых областях, находящихся в окрестности опорной точки для слабых полей в свободном пространстве (для которых $r_{\mu\nu}=0$). Для удобства в приложении в качестве рассматриваемой области выбираем либо сферу с центром (x', y', z') и радиусом d, либо цилиндр с центром (x', y', z'), осью, параллельной оси z длиной $2l$ и радиусом d. Для P получаем:

в первом случае

$$P_{0'} = \frac{2\pi d^3}{3\varkappa}\left\{(b_{11} + b_{22} + b_{33})\frac{d^2}{5} + b_{00}(\xi^0)^2\right\} \tag{14}$$

и во втором случае

$$P_{0'} = \frac{\pi d^2 l}{2\varkappa}\left\{(b_{11} + b_{22})\frac{d^2}{4} + b_{33}\frac{l^2}{3} + b_{00}(\xi^0)^2\right\}, \tag{15}$$

где $\xi^0 = t - t'$,

$$9b_{00} = (r_{1010})^2 + (r_{2020})^2 + (r_{3030})^2 + 3(r_{1012})^2 + 3(r_{1013})^2 + 3(r_{2021})^2 + \\ + 3(r_{2023})^2 + 3(r_{3031})^2 + 3(r_{3032})^2 + 2(r_{1020})^2 + 2(r_{2030})^2 + 2(r_{3010})^2 + \\ + (r_{1023} + r_{1320})^2 + (r_{1032} + r_{1230})^2 + (r_{2031} + r_{2130})^2;$$

$$9b_{11} = (r_{1010})^2 + 3(r_{1020})^2 + 3(r_{1030})^2 + 3(r_{1212})^2 + 3(r_{1313})^2 + (r_{1220})^2 + \\ + (r_{1330})^2 + (r_{1323})^2 + (r_{1232})^2 + 6(r_{1213})^2 - 4(r_{1012})^2 - 4(r_{1013})^2 + \\ + 2(r_{1023} + r_{1320})(r_{1230} + r_{1032});$$

наконец и b_{22}, b_{33} получаются из b_{11} заменой $1 \rightleftarrows 2$, $1 \rightleftarrows 3$, при $r_{\mu\rho\nu\lambda} = s_{\mu\rho\nu\lambda}(X')$.

Если $g_{\mu\nu}$ есть функции от только переменной t, то

$$r_{ijk0} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

и поэтому $P_{0'} > 0$.

В качестве примера рассмотрим волны Петрова и Вавилова [4, 5], метрика которых имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - (1 + kt)^{\frac{4}{3}} (dx^2 + dy^2) - (1 + kt)^{-\frac{2}{3}} dz^2,$$

где k — константа, которая очень мала для слабых волн [5]. Это поле I типа (по классификации Петрова [4]). Для этих волн из (14) и (16) получаем

$$P_{0'} \approx \frac{22k^4d^3}{3635\varkappa} \{3d^2 + 5(\xi^0)^2\} > 0.$$

Для статических полей вне материи [3, 4] (например, сферически-симметрическое поле Шварцшильда), $g_{\mu\nu}$ не зависят от времени t и

$$g_{0i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

и поэтому

$$r_{ijk0} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Тогда в случае слабых полей (см. (14) и (16)) локальная энергия положительна. Для сферических волн [6, 7, 8] в общем случае (см. (14) и (16)) локальная энергия наверняка положительна, если $\xi^0 \geqslant \sqrt{\frac{2}{5}}\, d$.

Локальная энергия плоских волн

Для плоских волн Такено [9], Синга [3] и Петрова [4, 10] $g_{\mu\nu}$ есть функции от переменной $z \pm t$. Поэтому в случае слабых волн из (15) и (16) видим, что локальная энергия положительна или равна нулю в зависимости от того, является ли рассматриваемая область искривленной или плоской.

Робинсону и Бонди удалось показать [11, 12], что уравнения поля допускают существование плоских волновых зон конечной протяженности между двумя областями плоского пространства—времени. Они взяли метрику в виде

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2n(y\,dy - x\,dx)\,du + \left[\frac{2n}{u}(y^2 - x^2) + n^2uv\right] du^2,$$

где $u = z - t$, $v = z + t$, $n = n(u)$ — произвольная, дважды дифференцируемая функция от u.

В случае $n = 0$ везде, кроме области конечных положительных значений u, между двумя областями плоского пространства существует область искривленного. Амплитуда волны определяется величиной n. В общем случае n имеет вид

$$n = \frac{A}{a^2} f\left(\frac{u}{a}\right),$$

где a — приближенная мера ширины волновых пакетов.

$$\left(\text{Например,} \quad n = \frac{Au^4 \exp\left(-\frac{2u}{a}\right)}{a^6}. \right)$$

Для слабых волн $\frac{A}{a} \ll 1$.

Тогда из (15) и (16) (полагая $\pi d^2 = 1$), получаем

$$P_{0'} = \frac{8B^2 l}{27\varkappa} \{l^2 + 3(\xi^0)^2\},$$

где

$$B = \frac{\partial n(u')}{\partial t'} - \frac{2n(u')}{u'}, \quad u' = z' - t'.$$

Итак, локальная энергия положительна или равна нулю в зависимости от того, является ли рассматриваемая область искривленной или плоской.

Перес [13] нашел другой класс волновых решений уравнений $r_{\mu\nu} = 0$, обладающий меньшей симметрией, чем плоские и цилиндрические волны. Его метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2f(x, y, z+t)(dz + dt)^2.$$

Уравнения поля сводятся к следующей системе:

$$r_{00} = r_{03} = r_{33} = f_{,1,1} + f_{,2,2} = 0$$

и поэтому удовлетворяются, если f — гармоническая функция от x, y. Итак, мы можем написать

$$f = \mathrm{Re}\,[F(x + iy, \ z + t)],$$

где F — произвольная функция от обоих параметров.

В случае $f = (x^2 - y^2)\sin(z+t)$ мы имеем плоскую волну. Решение в виде волнового пакета имеет вид

$$f = xy(x^2 + y^2)^{-2} \exp\{[b^2 - (z+t)^2]^{-2}\} \quad \text{при } |z+t| < b,$$

$$f = 0 \quad \text{при } |z+t| > b.$$

В общем случае имеем

$$f = F_1(x + iy) F_2(z + t).$$

Для слабых волн $f \ll 1$. Тогда из (15) и (16) (полагая $\pi d^2 = 1$) получаем

$$P_{0'} = \frac{8B^2 l}{27\varkappa} \{l^2 + 3(\xi^0)^2\},$$

где

$$B^2 = (f_{,1,1})^2 + (f_{,2,2})^2 + 2(f_{,1,2})^2.$$

Локальная энергия, как мы видели, положительна или равна нулю в зависимости от того, является ли рассматриваемая область искривленной или плоской.

Локальная энергия цилиндрических волн

Эйнштейн и Розен [14, 15] получили некоторые точные решения уравнений поля $r_{\mu\nu}=0$ в виде цилиндрических волн. Они брали метрику

$$ds^2 = \exp(2\gamma - 2\psi)(dt^2 - d\rho^2) - \rho^2 \exp(-2\psi)\, d\varphi^2 - \exp(2\psi)\, dz^2,$$

где функции γ и ψ зависят только от ρ и t. Большой интерес представляет случай импульса излучения. Тогда имели [14, 15]

$$\psi = A\{[(a-it)^2+\rho^2]^{-\frac{1}{2}} + [(a+it)^2+\rho^2]^{-\frac{1}{2}}\},$$

$$\gamma = \frac{A^2}{2}\{a^{-2} - \rho^2[(a-it)^2+\rho^2]^{-2} - \rho^2[(a+it)^2+\rho^2]^{-2} -$$

$$- a^{-2}(t^2+a^2-\rho^2)[t^4+2t^2(a^2-\rho^2)+(a^2+\rho^2)^2]^{-\frac{1}{2}}\},$$

где a — приближенная мера ширины импульса, A — амплитуда «масштабной функции» ψ. Из этих уравнений следует, что при отрицательных значениях t «импульс» сходится в направлении к оси z. Он вновь расходится от нее при положительных значениях t. Таким образом, мы имеем «симметричное во времени» решение поля. Для слабых волн

$$\frac{A}{a} \ll 1,$$

в первом приближении имеем

$$\gamma \approx 0,$$
$$ds^2 = (1-2\psi)\, dt^2 - (1-2\psi)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) - (1+2\psi)\, dz^2.$$

Переходя к декартовым координатам

$$x^0 = t = t,\ x^1 = x = \rho\cos\varphi,$$

$$x^2 = y = \rho\sin\varphi, \quad x^3 = z = z,$$

получаем

$$ds^2 = (1-2\psi)\, dt^2 - (1-2\psi)(dx^2+dy^2) - (1+2\psi)\, dz^2.$$

Подсчитаем локальную энергию с помощью (15) и (16).

Рассмотрим два случая:

1. При $\rho', t' \ll a$

$$P_{0'} \approx \frac{2\pi}{9\varkappa}\left(\frac{A}{a}\right)^2\left(\frac{d}{a}\right)^2 l\left\{16\left(\frac{d}{a}\right)^2 + \frac{20}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 172\left(\frac{\xi^0}{a}\right)^2\right\}.$$

2. При $\rho', t' \approx a$

$$P_{0'} \approx \frac{2\pi}{9\varkappa}\left(\frac{A}{a}\right)^2\left(\frac{d}{a}\right)^2 l\left\{2{,}3\left(\frac{d}{a}\right)^2 + 0{,}9\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 28{,}7\left(\frac{\zeta^2}{a}\right)^2\right\}.$$

Итак, локальная энергия положительна.

Выводы

Мы доказали, что для слабых статистических полей вне материи и некоторых типов слабых волн локальная энергия в малых областях в окрестности опорной точки положительна.

Пирани [16] вычислил среднее значение плотности канонического псевдотензора энергии-импульса:

$$t^\mu_\nu = L\delta^\mu_\nu - g_{\rho\sigma,\mu}\frac{\partial l}{\partial g_{\rho\sigma,\nu}},$$

где

$$L = (-g)^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} (\gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \gamma^{\beta}_{\nu\alpha})$$

в окрестности точки нормальной координатной системы. Усреднением по малой двумерной сфере он получил инвариантное выражение для среднего

$$\bar{t}^{\mu}_{\nu} = \lim_{r \to 0} \left[(4\pi r^4)^{-1} \int t^{\mu}_{\nu}\, d^2 S \right].$$

К сожалению, это среднее значение не имеет размерности плотности энергии. Оно представляет собой подобную энергии конструкцию, характеризующую меру энергии, которой может оперировать наблюдатель, движущийся со скоростью U^{ν} при выполнении условий для нормальной системы координат. Для плоских волн это среднее значение энергии ($\bar{t}^0_0$) положительно. Этот результат в некотором смысле совпадает с нашим результатом. Но наш результат яснее, потому что мы рассматривали локальную энергию (а не величину, подобную плотности энергии). Пирани [16] предложил связать излучение волн только с полями II и III типов Петрова [4]. Для полей I типа Петрова (например, поля Шварцшильда) это среднее значение энергии ($\bar{t}^0_0$) отрицательно. Однако Петров и Вавилов [4, 5] отыскали волновое решение и в случае метрики I типа Петрова, и мы доказали, что локальная энергия этих волн Петрова и Вавилова и статических полей вне материи (среди них есть поле Шварцшильда) положительна в случае слабых полей. Все приведенные выводы справедливы только вблизи опорной точки. Как следует из [18], в общем случае, знак и значение локальной энергии зависят от положения опорной точки. Эти два результата не находятся во взаимном противоречии.

В заключение выражаю глубокую признательность проф. Я. П. Терлецкому за интерес и внимание к моей работе и Ю. А. Рылову за помощь и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rylov Yu. A., Ann. der Physik., 7, 12, 329—353, 1964.
2. Рылов Ю. А. «Изв. вузов», математика, № 3, 131, 1962.
3. Synge T. L. Relativity the general theory. Amsterdam, 1960. См. перевод: Синг Дж. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
4. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
5. Вавилов Б. Т. «Изв. вузов», физика, № 2, 73, 1959.
6. Robinson I., Trautman A., Phys. Rev. Lett., 4; No. 8, 431, 1960; Proc. Roy. Soc., A265, No. 1323, 463, 1962.
7. Petrov A. Z. Cahiero de Physique, **18**, No. 161, 1, 1964.
8. Рябушко А. П. «Изв. вузов», физика, № 1, 88, 1964.
9. Takeno H., Tensor, **6**, No. 1, 15, 1956; Tensor, **8**, No. 1, 59, 1958.
10. Петров А. З. «Изв. вузов», математика, № 2, 189, 1959.
11. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I. Proc. Roy, Soc., A251, 519, 1959.
12. Bondi H. Nature, 179, 1072, 1957.
13. Peres A. Phys. Rev. Lett., **3**, No. 12, 1959.
14. Einstein A., Rosen N. J. Frank. Inst., **223**, 43, 1937.
15. Rosen N. Phys. Zs. Sowjetunion, 12, 366, 1937; Suppl. Helv, Phys. Acta, **4**, 171, 1956.
16. Pirani F., Phys. Rev., **105**, 1089—1099, 1957.
17. Moller C. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **31**, No. 14, 1959.
18. Vu thanh Khiet. Ann. der Physik.
19. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955.
20. Паули В., Теория относительности. М. — Л., ИЛ, 1947.
21. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. М., ИЛ, 1947.
22. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1955.

Поступила в редакцию
29. 10 1964 г.

Кафедра
теоретической физики