Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 538.56 : 530.145

Б. А. ЛЫСОВ, А. Н. САФРОНОВ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КВАНТОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Рассмотрено взаимодействие простой классической (не квантовой) системы, обладающей тремя степенями свободы — пространственного осциллятора — с квантовым электромагнитным полем. Показано, что взаимодействие приводит к квантованию всех динамических переменных, характеризующих его движение.

Известно, что взаимодействием классической системы с квантованным электромагнитным полем можно объяснить не только вакуумные поправки [1], но и сам факт квантования классических систем [2, 3, 4].

Поведение таких систем имеет много общего с движением релятивистского электрона в магнитном поле, представляющего собой в некотором роде «макроатом», на что было указано А. А. Соколовым, Д. Д. Иваненко и И. М. Терновым [5, 6]. Более того, применение такого квазиклассического подхода к простейшим системам (например, гармоническому осциллятору [3, 4], заряженной частице в однородном магнитном поле [7]) показывает, что присутствие членов взаимодействия с квантованным полем в классическом уравнении движения приводит при описании определенного круга явлений к численному совпадению результатов в первом приближении с результатами соответствующего квантовомеханического расчета.

Учет силы радиационного трения обеспечивает естественное обрезание интегралов, фигурирующих в теории.

Как показано в работах [3, 4], благодаря взаимодействию с полем виртуальных фотонов, координата и импульс электрона становятся операторами, не коммутирующими друг с другом, а также появляется нулевая энергия, учитывающая даже вакуумное воздействие.

Ниже в духе этих идей рассмотрим простую механическую систему с тремя степенями свободы — пространственный изотропный осциллятор.

Запишем уравнение движения пространственного гармонического осциллятора в поле фотонов

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0 \vec{r} = \frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{E}^i), \tag{1}$$

где $\vec{E}^i = \frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\dddot{\vec{r}}$ можно рассматривать как электрическое поле самодействия «продольных фотонов» [8], а $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, причем векторный потенциал $\vec{A}$, взятый в представлении вторичного квантования, удовлетворяет уравнению Даламбера и условиям поперечности поля

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{\varkappa}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\left\{\vec{a}(\vec{\varkappa})\,e^{-i\omega t+i\vec{\varkappa}\vec{r}} + \vec{a}^{+}(\vec{\varkappa})\,e^{i\omega t-i\vec{\varkappa}\vec{r}}\right\} \qquad (2)$$

$$(\vec{\varkappa}\vec{a}) = (\vec{\varkappa}\vec{a}^{+}) = 0.$$

Между проекциями квантованных амплитуд на декартовы оси координат справедливы коммутационные соотношения

$$[a_s, a'^{+}_{s'}] = (\delta_{ss''} - \varkappa^0_s\,\varkappa^0_{s''})\,\delta_{\vec{\varkappa}\vec{\varkappa}'}\,. \qquad (3)$$

Уравнение (1) может быть решено делением на оператор, если ограничиться дипольным приближением, т. е. при подстановке (2) в (1) взять значение векторного потенциала $\vec{A}$ в начале координат.

Вследствие того что правая часть (1) представляет собой операторную величину, это уравнение следует рассматривать как операторное, а физическим величинам, характеризующим систему, поставить в соответствие операторы, действующие на вектор состояния в гильбертовом пространстве.

Так, оператор энергии $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{\vec{r}}^2, \qquad (4)$$

оператор момента

$$\hat{\vec{M}} = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}], \qquad (5)$$

где $\hat{\vec{r}}$ представляет собой частное решение уравнения (1):

$$\hat{\vec{r}} = -i\frac{e}{mc}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{\varkappa}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\,\omega\left\{\vec{a}(\vec{\varkappa})f(\omega) - \vec{a}^{+}(\vec{\varkappa})f^{*}(\omega)\right\}, \qquad (6)$$

причем

$$f(\omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + \gamma\omega^3}, \quad \omega = c\varkappa, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}.$$

Импульс частицы $\hat{\vec{p}}$ удобно задать в виде

$$\hat{\vec{p}} = m\dot{\hat{\vec{r}}} + \frac{e}{c}\vec{A} - m\gamma\ddot{\vec{r}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{\varkappa}}\frac{e\omega_0^2}{c}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\left\{a(\vec{\varkappa})f(\omega) + a^{+}(\vec{\varkappa})f^{*}(\omega)\right\}, \qquad (7)$$

а не считать его равным $m\hat{\dot{\vec{r}}}$: нулевая энергия при этом автоматически содержит необходимые вычитательные члены, в то время как спектр возбуждения системы не меняется.

Для дальнейшего удобно выделить совокупность коммутирующих операторов, через комбинации которых можно выразить операторы интересующих нас величин.

Указанные операторы можно определить, например, на сфере радиуса k в пространстве $\vec{\varkappa}$:

$$
\begin{aligned}
a_1(k) &= \sqrt{\delta_0} \sum_{|\vec{\varkappa}|=k} \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \{a_x(\vec{\varkappa}) + i a_y(\vec{\varkappa})\}, \\
a_2(k) &= \sqrt{\delta_0} \sum_{|\vec{\varkappa}|=k} \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \{a_x(\vec{\varkappa}) - i a_y(\vec{\varkappa})\}, \qquad (8) \\
a_3(k) &= \sqrt{\delta_0} \sum_{|\vec{\varkappa}|=k} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_z(\vec{\varkappa}),
\end{aligned}
$$

где δ_0 — элементарные ячейки, на которые разбито двумерное пространство телесных углов $\left(\Delta = \frac{(2\pi)^3}{V} = k^2 \delta_0 \delta\right)$.

Принимая во внимание выражение (3), видим, что определенные таким образом операторы $a_1(k)$, $a_2(k)$, $a_3(k)$ подчиняются перестановочным соотношениям

$$[a_i,\ a_j'^{+}] = \delta_{ij} \delta_{kk'}. \qquad (9)$$

Используя явный вид разложения (6) и (7) операторов координат и импульса по амплитудам фотонного поля, можно получить выражения для операторов момента и энергии.

Оператор момента, величину которого мы будем считать измеренной в единицах $\hbar$, имеет вид

$$\hat{\vec{L}} = \frac{ie^2\omega_0^2 4\pi}{m} \frac{1}{V} \sum_{\vec{\varkappa}, \vec{\varkappa}'} f(\omega) f^*(\omega') [\vec{a}(\vec{\varkappa}), \vec{a}^{+}(\vec{\varkappa})]. \qquad (10)$$

Компоненты момента в первом приближении по γ подчиняются квантовомеханическим перестановочным соотношениям.

Покажем, например, что

$$[L_x,\ L_y] = iL_z. \qquad (11)$$

Учитывая соотношения (3) и замечая, что можно переставлять амплитуды a_s и $\overset{+}{a}_s$, соответствующие проекциям на различные оси декартовой системы координат под знаком суммы по $\vec{\varkappa}$ так, как если бы они были коммутирующими, с точностью до членов порядка $O(\gamma\omega_0)$ имеем

$$[L_x,\ L_y] = -\frac{1}{V^2} \left(\frac{4\pi e^2 \omega_0^2}{m}\right)^2 \sum_{\vec{\varkappa}_1, \vec{\varkappa}_2, \vec{\varkappa}_3, \vec{\varkappa}_4} f(\omega_1) f^*(\omega_2) f(\omega_3) f^*(\omega_4) \times$$

$$\times \{a_y(\vec{\varkappa}_1)\,a_x(\vec{\varkappa}_4)\,[a_z(\vec{\varkappa}_2),\,a_z(\vec{\varkappa}_3)] + [a_z(\vec{\varkappa}_1),\,a_z^+(\vec{\varkappa}_4)]\,a_y^+(\vec{\varkappa}_2)\,a_x(\vec{\varkappa}_3)\} \cong$$

$$\cong -\left(\frac{e^2\omega_0^2 4\pi}{m}\right)\frac{1}{V}\sum_{\vec{\varkappa}_1,\vec{\varkappa}_2} f(\omega_1)\,f^*(\omega_2)\,\{a_x(\vec{\varkappa}_1)\,a_y^+(\varkappa_2) - a_y(\vec{\varkappa}_1)\,a_x^+(\vec{\varkappa}_2)\}. \quad (12)$$

Выше принято во внимание, что

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{(y^2-1)^2 + \gamma^2\omega_0^2 y^6} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\gamma\omega_0} + O(\gamma\omega_0). \quad (13)$$

Поэтому в первом приближении по γ соотношение (11) действительно справедливо.

Заметим, что при записи операторов, соответствующих наблюдаемым, выражения для них могут быть разбиты на две части: не зависящую от времени часть, состоящую из билинейной комбинации операторов рождения и уничтожения с одним и тем же значением $\varkappa$, и «флуктуационную» часть, члены которой характеризуются наличием осциллирующего множителя вида $e^{i\omega t}$. Поскольку нас интересуют стационарные состояния, матричные элементы членов последнего типа в таких состояниях должны обратиться в ноль.

Формально мы можем избавиться от этих членов, вводя операцию усреднения $\frac{1}{T}\int_0^T dt$ за достаточно большой промежуток времени T для операторов, соответствующих наблюдаемым.

Учитывая это, для оператора энергий $\widehat{H}$ получаем выражение

$$\widehat{H} = \frac{\gamma\hbar\omega_0}{\pi}\,\delta\sum_\omega \omega^2\left(\omega + \frac{\omega_0^2}{\omega}\right) f(\omega)\,f^*(\omega)\times$$

$$\times\left\{a_1^+(\omega)\,a_1(\omega) + a_2^+(\omega)\,a_2(\omega) + a_3^+(\omega)\,a_3(\omega) + \frac{3}{2}\right\}. \quad (14)$$

В качестве наблюдаемой можно выбрать также проекцию момента на ось z; соответствующий оператор можно представить в виде

$$\widehat{L}_z = \frac{2}{\pi}\,\gamma\omega_0^2\delta\sum_\omega \omega^2 f(\omega)\,f^*(\omega)\,\{a_2^+(\omega)\,a_2(\omega) - a_1^+(\omega)\,a_1(\omega)\}. \quad (15)$$

Таким образом, мы видим, что $\widehat{H}$ и $\widehat{L}_z$ выражаются через коммутирующие между собой операторы

$$\widehat{n}_1 = a_1^+ a_1,\quad \widehat{n}_2 = a_2^+ a_2,\quad \widehat{n}_3 = a_3^+ a_3.$$

Определим состояние, в котором собственные значения операторов $\widehat{n}_1$, $\widehat{n}_2$, $\widehat{n}_3$ соответственно равны n_1, n_2, n_3 (в силу (9) они целочисленны) и не зависят от ω.

Переходя в выражениях (14) и (15) от суммирования к интегрированию, получим собственные значения операторов энергии и импульса

$$H = \frac{\gamma\hbar\omega_0^2}{\pi}\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) I_2, \quad (16)$$

$$L_z = \frac{2}{\pi} \gamma\omega_0 (n_2 - n_1) I_1, \tag{17}$$

где интеграл I_1 определен выше (см. (13)), а значение I_2 дается выражением

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{(y^3 + y)\, dy}{(y^2 - 1)^2 + \gamma^2\omega_0^2 y^6} = \frac{\pi}{\gamma\omega_0} + \ln\left(\frac{1}{\gamma\omega_0} - 1\right) + O(\gamma\omega_0). \tag{18}$$

В пределе $\gamma \to 0$ имеем

$$H = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{3}{2}\right), \quad L_z = n_2 - n_1, \tag{19}$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Оператор квадрата момента удобно записать, вводя операторы $L_+ = L_x + iL_y$ и $L_- = L_x - iL_y$:

$$\hat{L}_+ = -\gamma \frac{2}{\pi} \omega_0^2 \sqrt{2}\delta \sum_{\omega,\omega'} f(\omega) f^*(\omega') \{a_3(\omega) a_2^+(\omega') - a_1(\omega) a_3^+(\omega')\},$$

$$\hat{L}_- = -\gamma \frac{2}{\pi} \omega_0^2 \sqrt{2}\delta \sum_{\omega,\omega'} f(\omega) f^*(\omega') \{a_2(\omega) a_3^+(\omega') - a_3(\omega) a_1^+(\omega')\}. \tag{20}$$

Тогда выражение для $\vec{L}^2$ с точностью до членов порядка $o(\gamma\omega_0)$ имеет вид

$$\vec{L}^2 = \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z + \hat{L}_- \hat{L}_+. \tag{21}$$

В состоянии с заданными n_1, n_2, n_3 среднее значение квадрата момента равно

$$\langle n_1, n_2, n_3 | \vec{L}^2 | n_1, n_2, n_3 \rangle = (n_2 - n_1)^2 + n_1 + n_2 + 2n_3 (n_1 + n_2 + 1). \tag{22}$$

Известно, что в квантовой механике решения уравнения Шредингера для пространственного (изотропного) гармонического осциллятора в цилиндрических координатах ρ, z, φ имеют вид

$$\Psi_{k,n,m}(\xi, \eta, \varphi) = c e^{-\frac{\xi}{2} - \frac{\eta^2}{2} + im\varphi} \xi^{\frac{m}{2}} L_n^m(\xi) H_k(\eta), \tag{23}$$

где $\xi = \frac{\mu\omega_0}{\hbar} \rho^2$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu\omega_0}{\hbar}} z$, H_k — полиномы Эрмита L_n^m — полиномы Лагерра.

Вычисляя диагональные матричные элементы оператора квадрата момента с помощью функций (23), получим выражение

$$\langle n, k, m | \vec{L}^2 | n, k, m \rangle = m^2 + 2n + m + 2k(2n + m + 1). \tag{24}$$

Энергия при этом выражается следующим образом:

$$H = \hbar\omega_0 \left(2n + m + k + \frac{3}{2}\right). \tag{25}$$

Сравнивая выражения (25) и (19), (24) и (22), видим, что состояние $\Psi_{n_3,n_1,n_2-n_1}(\xi, \eta, \varphi)$ совпадает при $\gamma = 0$ с состоянием, в котором $\widehat{n}_1$, $\widehat{n}_2$, $\widehat{n}_3$ имеют собственные значения n_1, n_2, n_3 соответственно.

Таким образом, в случае пространственного осциллятора так же, как и для одномерного осциллятора [3], взаимодействие с квантованным электромагнитным полем приводит к квантованию всех динамических переменных, характеризующих его движение.

В заключение авторы искренне благодарны проф. А. А. Соколову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Welton T. Phys. Rev., **74**, 1157, 1948.
2. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля, ч. 1. М., Физматгиз, 1952.
3. Соколов А. А., Туманов В. С. ЖЭТФ, **30**, 802, 1956.
4. Sokolov A. A., Lysov B. A. Phys. Rev., **128**, 2422, 1962.
5. Соколов А. А., Иваненко Д. Д., Тернов И. М. ДАН СССР, **111**, 334, 1956.
6. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику, 1958, гл. II..
7. Адирович Э. И., Подгорецкий М. И. ЖЭТФ, **26**, 150, 1954.
8. Соколов А. А. «Вестн. Моск. ун-та», № 2, 1947; ЖЭТФ, **18**, 280, 1948.

Поступила в редакцию
11. 11 1964 г.

Кафедра
теоретической физики