Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 538.3 : 530.145

В. Г. БАГРОВ, О. Ф. ДОРОФЕЕВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, НАХОДЯЩИХСЯ НА НИЗКИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЯХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Методами квантовой теории рассматривается излучение электронов с ориентированным спином, движущихся в магнитном поле и находящихся на низких энергетических уровнях. Показано, что классическая и квантовая теории приводят к результатам, отличающимся тем существеннее, чем меньше главное квантовое число.

Как известно [1, 2], интенсивность излучения релятивистского электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле, с учетом квантовых поправок имеет вид

$$W = W^{\text{кл}}\left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{24}\xi + \frac{64}{3}\xi^2 - \dots\right),$$

где

$$\xi = \frac{3}{2}\cdot\frac{\hbar}{mcR}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{H}{H_0}\left(\frac{E}{mc^2}\right),$$

а энергия E удовлетворяет соотношению

$$mc^2 \ll E \ll E_{\frac{1}{2}} = mc^2\left(\frac{mcR}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4$$

величина интенсивности излучения релятивистского электрона, полученная в классической теории (см. [3]), m — масса покоя электрона, $e=-e_0$ — заряд электрона, R — радиус устойчивой орбиты,

$$H_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{m^2c^3}{e_0\hbar} = 2{,}943\cdot 10^{13}\,Oe.$$

В случае $E \ll E_{1/2}$ величина $\xi \ll 1$ и квантовые эффекты проявляются в малых поправках к классической величине.

При очень больших энергиях $E \gg E_{1/2} (\xi \gg 1)$ квантовые эффекты существенно влияют на излучение и для интенсивности излучения выражение имеет вид (см. [4, 2])

$$W = W^{\text{глоб}} = \frac{8}{27} \cdot \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \frac{2^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\xi^{\frac{4}{3}}}.$$

Таким образом, квантовые эффекты начинают играть заметную роль в излучении при очень высоких энергиях электронов $E > E_{1/2}$.

Область энергии $E \gg mc^2$ соответствует чрезвычайно большим значениям квантового числа n электрона. Действительно [5], энергия электрона, движущегося в магнитном поле, определяется главным квантовым числом

$$E = c\hbar K = c\hbar \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4\gamma n}, \tag{1}$$

где $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$, $\hbar k_3$ — импульс электрона вдоль поля, $\gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar}$. Если вдоль поля электрон не движется ($k_3 = 0$), то формулу (1) можно переписать в виде

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{H}{H_0} n \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$n = \frac{3}{4} \cdot \frac{H_0}{H} \left\{ \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 \right\}.$$

Для реальных полей ($H \sim 10^4$ *Ое*) и энергии в ускорителях ($E \sim 500$ *Мэв*) величина $n \sim 10^{15} \gg 1$. Очевидно, что спектр энергии в этом случае квазинепрерывен и его дискретность слабо сказывается на интенсивности излучения.

Однако при малых значениях n дискретность энергетического спектра может существенно повлиять на величину интенсивности излучения. Следует заметить, что для $n = 1, 2 \ldots$ из формулы (2) получается $E \sim mc^2$, т. е.

$$\beta = \frac{V}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2} \ll 1,$$

где V — скорость электрона, поэтому можно ограничиться случаем нерелятивистского электрона. Тогда ($\beta \ll 1$) классическая теория приводит к следующему результату для величины интенсивности излучения [3]

$$W = W^{\text{кл}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ce^2}{R^2} \beta^4. \tag{3}$$

В квантовой теории для интенсивности излучения электрона, движущегося в магнитном поле, известно следующее выражение:

$$W_i = \frac{ce^2}{2\pi} \int d^3 \varkappa \delta (K - K' - \varkappa) S_i, \tag{4}$$

в котором величины S_i определяют поляризацию излучения ($i = 2$, 3 соответствуют двум компонентам линейной поляризации излучения, $i = \pm 1$ — двум компонентам круговой поляризации). Нет надобности приводить довольно громоздкие формулы для S_i, так как они хорошо известны (см. [2], формулы (18)—(23)). Величины S_i зависят от ориентации электронного спина и выражаются через обобщенные функции Лагерра [5]

$$I_{n,n'}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-n'}{2}} Q_{n'}^{n-n'}(x), \tag{5}$$

где аргумент

$$x = \frac{\varkappa^2 \sin^2\theta}{4\gamma},$$

а

$$\varkappa = K - K' = \frac{K}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}\beta^2 \sin^2\theta}\right),$$

$$\nu = n - n'.$$

Произведя замену переменной

$$\sin^2\theta = \frac{(1+x_0)^2 t}{(1+x_0 t)^2},$$

где

$$x_0 = \frac{\frac{\nu}{n}\beta^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}\beta^2}\right)},$$

можно интенсивность излучения (4) привести к виду

$$W_i = \frac{4x_0^2}{(1+x_0)^4} \cdot \frac{W_0}{1-\beta^2} \int_0^1 dt \, \frac{(1+x_0 t)\,[1 - x_0^2 t + x_0^2(1-t)]}{\sqrt{(1-t)(1-x_0^2 t)}} S_i, \tag{6}$$

$$x = \nu x_0 t.$$

$$W_0 = \frac{m^2 e^2 c^3}{\hbar^2}.$$

При $\beta \ll 1$ имеем $x_0 \ll 1$, тем самым $x \ll 1$, поэтому в функциях Лагерра (5) нужно удержать низшие степени x. Отсюда вытекает, что наиболее существенны квантовые переходы $n' = n - 1$, т. е. частота, на которую падает максимум излучения,

$$\omega = c\varkappa = \beta c \sqrt{\frac{\gamma}{n}} = \frac{\beta c}{R}.$$

В согласии с классической теорией [3] получается, что в нерелятивистском приближении максимум излучения приходится на основной тон (дипольное излучение).

Ориентацию спина электрона, движущегося в магнитном поле, можно описывать, как известно (см. [2]), двумя способами: либо рассматривать ориентацию по отношению к направлению движения электрона — продольная поляризация, либо по отношению к направлению магнитного поля — поперечная поляризация.

Рассматривая *продольную поляризацию* электронного спина, для линейных компонентов поляризации излучения получаем из формулы (6) в приближении $\beta \ll 1$:

$$W_2 = \frac{3}{16} W^{\text{кл}} \sum_{\zeta'} \left(1 + \zeta\zeta' \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2,$$

$$W_3 = \frac{1}{16} W^{\text{кл}} \sum_{\zeta'} \left(1 + \zeta\zeta' \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2,$$

причем $W^{\text{кл}}$ определено формулой (3), $\zeta = \pm 1$ — начальная ориентация электронного спина (если $\zeta = 1$, то спин направлен по скорости частицы, а если $\zeta = -1$, то против), $\zeta' = \pm 1$ — конечная ориентация спина электрона. Суммируя по конечным и усредняя по начальным состояниям спина, получим

$$\overline{W}_2 = \frac{3}{4} W^{\text{кл}} \frac{2n - 1}{2n}, \quad \overline{W}_3 = \frac{1}{4} W^{\text{кл}} \frac{2n - 1}{2n},$$

$$\overline{W} = \overline{W}_2 + \overline{W}_3 = \frac{2n - 1}{2n} W^{\text{кл}}. \tag{7}$$

При малых значениях n интенсивность излучения отличается от классической величины. Например, при $n = 1$

$$\overline{W} = \frac{1}{2} W^{\text{кл}},$$

т. е. электрон излучает лишь половину того, что предсказывает классическая теория.

Расчет круговой поляризации приводит к выражению

$$W_l = \frac{\overline{W}}{2} + l\zeta \frac{\beta}{4} W^{\text{кл}},$$

где $l = 1$ соответствует правой круговой поляризации, а $l = -1$ — левой. При усреднении по начальному значению спина круговая поляризация исчезает. В отличие от классической теории, где круговая поляризация отсутствует, продольно-поляризованный электрон излучает свет, поляризованный по кругу.

Необходимо отметить, что переходы с переворотом спина ($\zeta = -\zeta'$) при малых n вносят заметный вклад в излучение

$$\eta = \frac{W(\zeta = -\zeta')}{W(\zeta = \zeta')} = (\sqrt{n} - \sqrt{n - 1})^4.$$

При $n = 1$ вклады переходов с переворотом спина и без переориентации равны ($\eta = 1$), однако с ростом n величина η быстро уменьшается и уже, например, для $n = 3$ $\eta = 0{,}01$.

Аналогичные расчеты для *поперечной поляризации* спина электрона приводят к следующим результатам:
переходы без переориентации спина ($\zeta = \zeta'$)

$$W_2 = \frac{3}{4} W^{\text{кл}} \left(1 - \frac{1 + \zeta}{2} \cdot \frac{1}{n}\right),$$

$$W_3 = \frac{1}{4} W^{\text{кл}} \left(1 - \frac{1 + \zeta}{2} \cdot \frac{1}{n}\right),$$

переходы с переориентацией спина ($\zeta = -\zeta'$)

$$W_2 = W^{\text{кл}} \left(\frac{\beta}{4n}\right)^2 \left\{\frac{1 + \zeta}{2} + \frac{1 - \zeta}{2} \beta^4 \frac{51}{560}\right\},$$

$$W_3 = W^{\text{кл}} \left(\frac{\beta}{4n}\right)^2 \left\{\frac{1 + \zeta}{2} + \frac{1 - \zeta}{2} \beta^4 \frac{47}{1680}\right\},$$

Круговая поляризация излучения отсутствует.

Как видно, в этом случае переходы с переориентацией спина не вносят существенного вклада в излучение, а интенсивность излучения зависит от начальной ориентации спина. В частности, при $\zeta=-1$

$$W = W_2 + W_3 = W^{\text{кл}},$$

т. е. излучение электрона со спином, ориентированным против поля, соответствует классической величине. Усреднение по спину приводит снова к результатам (7).

Из формул (7) следует, что в нерелятивистском приближении излучение заметно поляризовано: $\frac{3}{4}$ интенсивности приходится на компонент W_2 и лишь $\frac{1}{4}$ на W_3. Круговая поляризация выражена слабо, так как член, определяющий круговую поляризацию, пропорционален β (см. (8)).

Если рассчитать для поперечной поляризации вероятность переходов с переворотом спина, то получим

$$w = \frac{1}{T_0}\left(\frac{H}{H_0}\right)^3 \left\{\frac{1+\zeta}{2} + \frac{1-\zeta}{2}\,\beta^4\,\frac{25}{546}\right\},$$

где

$$T_0 = \frac{80}{117}\cdot\frac{\hbar c}{e^2}\cdot\frac{\hbar}{mc^2} = 1.197\cdot 10^{-19}\ \textit{сек}.$$

Вероятность зависит от начальной ориентации спина, поэтому возможна вследствие излучения преимущественная поляризация электрона, однако среднее время переворота спина чрезвычайно велико (для

$$\left(H \sim 10^4\ Oe \quad T = \frac{1}{w} \sim 10^{11}\ \textit{сек}.\right).$$

В заключение отметим, что при малых квантовых числах квантовая теория приводит к выводам, существенно отличающимся от выводов классической. С другой стороны, при очень высоких энергиях $E \gg E_{1/2}$, т. е. при очень больших квантовых числах квантовая теория также приводит к результатам, отличающимся от классических.

Таким образом, пределы применимости классической теории ограничены не только областью высоких энергий частицы $E \sim E_{1/2}$, но и случаем малых квантовых чисел $n \sim 1$.

Заметим, что в этих условиях частица движется по окружности весьма малого радиуса

$$R \sim \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2c\hbar}{eH}},$$

имеющего порядок (для полей $H \sim 10^4\ Oe$) 10^{-5} *см*.

Авторы благодарят проф. И. М. Тернова за внимание к работе и полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. ЖЭТФ, **23**, 632, 1952.
2. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. ЖЭТФ, **46**, 374, 1964.
3. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1951.
4. Клепиков Н. П. ЖЭТФ, **26**, 19, 1954.
5. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
25. 11 1964 г.

Кафедра
теоретической физики