Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 530.145.6

Ю. П. ПЫТЬЕВ

ПЯТИМЕРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СХЕМА (I)

Рассматривается классическая пятимерная теория.

В предыдущих работах была исследована возможность представления классических частиц в виде полевых образований [1, 2]. При этом частице сопоставлялось сингулярное решение уравнений поля, на которые накладывалось дополнительное условие, сводящееся к тому, что их характеристические многообразия должны были описываться уравнением эйконала во внешних электромагнитном A^i и гравитационном g^{ik} полях *

$$G^{\sigma\mu}\varphi_\sigma\varphi_\mu = 0, \quad G^{\sigma\mu} = \begin{vmatrix} g^{ik} & -g^i \\ -g^k & 1+g_n g^n \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} \varphi_\sigma = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}, \ x^0 = ct, \ x^{1\div 4}, \\ g^i = \dfrac{e}{m_0c^2} A^i, \ i, k = 0 \div 3. \end{array} \tag{1}$$

При таком дополнительном условии кинематика сингулярности автоматически описывалась уравнением (1) (т. е. совпадала с кинематикой классической частицы), а именно сингулярность была локализована на поверхности $\varphi(x^\sigma) = \text{const}$ и перемещалась вдоль характеристик уравнения (1)

$$\frac{dx^\sigma}{d\tau} = G^{\sigma\mu}\varphi_\mu, \qquad \frac{d\varphi_\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\varphi_\alpha\varphi_\beta, \tag{2}$$

т. е. классических траекторий.

В дальнейшем для нас будет важно, что полная скорость частицы—сингулярности в пространстве $x^{1\div 4}$ равна предельной скорости c (вне зависимости от того, находится ли частица во внешнем поле A^i, g^{ik} или является свободной). Этот факт следует из равенства нулю элемента пятимерного интервала

$$-d\sigma^2 = G_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad G_{\alpha\beta}G^{\beta\mu} = \delta_\alpha^\mu \tag{3}$$

вдоль мировой линии частицы (см. (1), (2)), а также равенств $dl^2 = (G_{ik} - G_{i0}G_{k0}/G_{00})\,dx^i dx^k$, $cdt = (G_{\sigma 0}/G_{00})dx^\sigma$, $i, k = 1 \div 4$,

* Греческие индексы изменяются от нуля до четырех.

определяющих расстояние в пространстве $x^{1\div 4}$ и элемент собственного времени.

Что касается динамических переменных частицы, то в упомянутых работах они были определены как динамические переменные сингулярной части поля. Проведенные вычисления показали, что определенные таким образом динамические переменные находятся в точном соответствии с динамическими переменными классической частицы. При этом уравнения движения частицы следовали из уравнений поля.

В настоящей работе рассматривается вопрос о физическом смысле пятимерного пространства $x^{0\div 4}$, использованного в цитированных выше работах, в простейшем случае, когда отсутствуют электромагнитное и гравитационное поля и метрика (3) имеет вид

$$-d\sigma^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \tag{4}$$

Ниже рассматриваются свободные частицы в этом пространстве и будет показано, что масса покоя частицы зависит от состояния движения наблюдателя (равно как и другие ее динамические переменные).

При обсуждении задач о столкновениях будет показано, что, вообще говоря, не имеет места закон сохранения 5-ти импульса частиц. В задаче о распаде частицы время жизни оказывается связанным с массой покоя.

В заключение рассматривается вопрос об измерении расстояний и синхронизации часов в предлагаемой релятивистской схеме. С этой целью могут быть использованы любые частицы, что же касается фотонов, то с их помощью невозможно получить никаких сведений о пятой координате.

Свободные частицы

Импульс частицы, описываемой уравнением эйконала (1) (в котором $G^{\sigma\mu} = \mathrm{diag}(-1111)$), определяется равенством $P_\sigma = \varphi_\sigma$ и, как следует из (1), является ковариантным изотропным вектором. Его контравариантные компоненты даются первым равенством (2), в котором τ — некоторый инвариантный (канонический) параметр на мировой линии частицы.

Рассмотрим свободную частицу с массой покоя m_0. Ее пятивектор импульса $P^\sigma = \dfrac{dx^\sigma}{d\tau}$ можно переписать в виде $P^\sigma = \dfrac{dx^\sigma}{ds}\cdot\dfrac{ds}{d\tau}$, где $-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ — элемент обычного релятивистского интервала. Первые четыре компонента мы отождествляем с компонентами обычного релятивистского импульса частицы, поэтому равенство $\dfrac{ds}{d\tau} = m_0 c$ следует считать определяющим массу покоя (инвариантную в обычной релятивистской схеме). Из равенства $d\sigma = 0$ находим, что $\dfrac{dx^4}{d\tau} = P^4 = m_0 c\,\dfrac{dx^4}{ds} = \pm\, m_0 c$, так что окончательное выражение для вектора импульса частицы (вектора энергии — импульса — массы, [2]) имеет вид

$$P^\sigma = \left(m_0 c\,\frac{dx^0}{ds},\ m_0 c\,\frac{dx^1}{ds},\ m_0 c\,\frac{dx^2}{ds},\ m_0 c\,\frac{dx^3}{ds},\ \pm\, m_0 c \right). \tag{5}$$

Рассмотрим эту же частицу в системе отсчета наблюдателя, равномерно движущегося относительно системы, в которой выписан импульс (5). Мировая линия наблюдателя является времениподобной геодезической, локальная ось собственного времени задается единичным вектором его скорости *

$$\lambda^{\mu}_{(0)} = \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} = \dot{x}^{\mu}. \tag{6}$$

Заметив это, нетрудно построить и весь репер, связанный с наблюдателем: оставшиеся четыре единичных пространственноподобных вектора, образующие вместе с (6) систему отсчета, определяются условиями нормировки и ортогональности. В дальнейшем мы ограничимся движением частиц и наблюдателей в пространстве x^1x^4 (что соответствует движению вдоль x^1 в обычной релятивистской схеме). Исключив пространственные повороты (в x^1x^4) системы отсчета наблюдателя, т. е. ограничившись чистыми преобразованиями Лоренца, искомый репер можно записать следующим образом:

$$\lambda^{\mu}_{(0)} = (\dot{x}^0, \dot{x}^1, \dot{x}^4), \quad \lambda^{\mu}_{(1)} = \left(\dot{x}^1, \dot{x}^0 - \frac{(\dot{x}^4)^2}{\dot{x}^0+1}, \frac{\dot{x}^1\dot{x}^4}{\dot{x}^0+1}\right),$$

$$\lambda^{\mu}_{(4)} = \left(\dot{x}^4, \frac{\dot{x}^1\dot{x}^4}{\dot{x}^0+1}, \dot{x}^0 - \frac{(\dot{x}^1)^2}{\dot{x}^0+1}\right).$$

Следовательно, в системе отсчета наблюдателя частица (5) характеризуется вектором импульса вида

$$P_{(\alpha)} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)} P_{\mu}. \tag{7}$$

Рассмотрим выражение (7) в некоторых простейших случаях. Пусть ни частица (5), ни наблюдатель не движутся вдоль оси x^1 (покоятся при обычном релятивистском рассмотрении). В этом случае в согласии с (5) в исходной системе отсчета частица имеет вектор импульса $P^{\lambda} = (m_0c, 0, \pm m_0c)$. Репер наблюдателя может быть записан в виде $\lambda^{\mu}_{(0)} = (\dot{x}^0, 0, \dot{x}^4)$, $\lambda^{\mu}_{(1)} = (0, 1, 0)$, $\lambda^{\mu}_{(4)} = (\dot{x}^4, 0, \dot{x}^0)$. Таким образом, как это вытекает из (7), в своей системе отсчета наблюдатель зафиксирует частицу со следующим вектором импульса $P^{(0)} = m_0c(\dot{x}^0 \mp \dot{x}^4)$, $P^{(1)} = 0$, $P^{(4)} = \pm m_0c(\dot{x}^0 \mp \dot{x}^4)$, $P^{(0)} = -P_{(0)}$. Это значит, что в системе отсчета наблюдателя частица обладает другой массой покоя**

$$m_0' = m_0 \sqrt{\frac{1 \mp \beta_4}{1 \pm \beta_4}}, \quad \beta_4 = \frac{dx^4}{dx^0}. \tag{8}$$

Если частица в исходной системе координат характеризуется вектором

$$P^{\sigma} = \left(\frac{E}{c}, p^1, \pm m_0c\right), \frac{E}{c} = \frac{m_0c}{\gamma_1}, P^1 = p^1 = \frac{E\beta_1}{c}, \beta_1 = \frac{dx^1}{dx^0}, \gamma_1 = \sqrt{1-\beta_1^2},$$

то этому же наблюдателю она представится обладающей пятиимпульсом вида:

$$P^{(\sigma)} = \left(\frac{E'}{c}, p^1, \pm m_0'c\right) = \left(\frac{E}{c}\frac{1 \mp \beta_4\gamma_1}{\gamma_4}, p^1, \pm m_0c\frac{\gamma_1 \mp \beta_4}{\gamma_1\gamma_4}\right).$$

При этом $\gamma_1' = (\gamma_1 \mp \beta_4)/(1 \mp \beta_4\gamma_1)$, так что в системе отсчета наблюдателя в согласии с обычной релятивистской схемой $P^{(0)} = \dfrac{E'}{c} = \dfrac{m_0'c}{\gamma_1'}$, $P^{(1)} = $

$$= p'^1 = p^1 = \frac{E\beta_1}{c} = \frac{E'\beta_1'}{c}.$$

---

* Индексы в скобках сопоставляются величинам в системе отсчета движущегося наблюдателя.

** Штрихом отмечаются обычные (четырехмерные) динамические переменные в системе отсчета движущегося наблюдателя.

Что касается общего случая движения частицы и наблюдателя, описываемого формулой (7), то в системе отсчета последнего полная энергия частицы:

$$\frac{E'}{c} = -P_{(0)} = -\lambda^{\mu}_{(0)} P_{\mu},$$

импульс вдоль оси x^j:

$$p'^j = P_{(j)} = \lambda^{\mu}_{(j)} P_{\mu}, \; j = 1 \div 3, \qquad (9)$$

масса покоя:

$$\pm m_0' c = P_{(4)} = \lambda^{\mu}_{(4)} P_{\mu}, \; m_0' = \frac{1}{c} |P_{(4)}|,$$

скорость вдоль оси x^j:

$$\beta_j' = -P_{(j)} / P_{(0)}; \; j = 1 \div 3.$$

Кроме того, $\gamma' = |P_{(4)} / P_{(0)}|$, так что в согласии с изотропностью вектора P^{σ} имеет место равенство $1 - \frac{P^2_{(1)}}{P^2_{(0)}} - \frac{P^2_{(2)}}{P^2_{(0)}} - \frac{P^2_{(3)}}{P^2_{(0)}} = \frac{P^2_{(4)}}{P^2_{(0)}} = (\gamma')^2$. Отсюда следует, что в согласии с обычной релятивистской схемой $E' = \frac{m_0' c}{\gamma'}$ и $p'^j = \frac{E' \beta_j'}{c}$.

Обсудим полученные результаты, сосредоточив свое внимание вначале на покоящихся в $x^1 x^2 x^3$ частицах и наблюдателях. Представим себе частицу и двух наблюдателей, покоящихся в упомянутом пространстве. Пятимерная релятивистская схема позволяет каждому из наблюдателей приписать рассматриваемой частице по произволу некоторые значения масс покоя, скажем m_0 и m_0'. В этом случае, однако, наблюдатели вынуждены считать себя движущимися по отношению друг к другу по пятому измерению со скоростью, определяемой из (8). Они, кроме того, должны сделать вывод о необходимости пересчета показаний часов в согласии с обычной релятивистской формулой, в которой лишь будет фигурировать скорость по пятому измерению. В частности, промежутки времени они должны пересчитать в согласии с формулой

$$t = t' \sqrt{1 - \beta_4^2} = t' \gamma_4. \qquad (10)$$

Формула (8), связывающая массы, зависит от знака скорости β_4, т. е. масса кажется большей, если наблюдатель приближается к частице. Этот факт нетрудно осмыслить, заметив, что по существу в пятимерной схеме мы приняли оптическое определение массы (масса пропорциональна составляющей волнового вектора волны, соответствующей частице, по оси x^4, точно так же, как энергия пропорциональна составляющей волнового вектора вдоль оси x^0, импульс — вдоль оси x^j, $j = 1 \div 3$) и закон преобразования массы покоя является следствием эффекта Допплера по пятому измерению. Помня, что полная скорость любой частицы по отношению к наблюдателю равна c, нетрудно представить аналогичную ситуацию в обычной релятивистской схеме: два наблюдателя движутся по оси x^1 и наблюдают один и тот же фотон. Если наблюдатели зафиксируют разные частоты, они сделают вывод о своем относительном движении.

Остановимся теперь на втором случае, когда частица с массой m_0 в исходной системе координат перемещается вдоль оси x^1, наблюдатели же по-прежнему не двигаются друг относительно друга вдоль оси x^1 и двигаются только вдоль x^4. Если скорость одного из наблюдателей удовлетворяет соотношению $\gamma_1 \mp \beta_4 = 0$, то, как это следует из (9), наблюдатель зафиксирует частицу, масса покоя которой равна нулю и которая движется со скоростью света вдоль оси x^1 наблюдателя: $\beta_1' = \frac{P^{(1)}}{P^{(0)}} = \beta_1 \frac{\gamma_4}{1 \mp \beta_4 \gamma_1} = = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \pm 1$. Иными словами, наблюдатель зафиксирует фотон, энергия и импульс которого в согласии с обычной релятивистской схемой имеют вид $E' = c\,|p'^1|$, $p'^1 = p^1$.

Остановимся в заключение коротко на поворотах в плоскости $x^1 x^4$. Нетрудно проверить, что для компонентов вектора P^σ имеют место следующие формулы преобразования: $P^{(1)} = P^1 \cos\varphi + P^4 \sin\varphi$, $P^{(0)} = P^0$, $P^{(4)} = P^4 \cos\varphi - P^1 \sin\varphi$.

В этом случае также поворот на угол $0 = P^4 \cos\varphi - P^1 \sin\varphi$ приводит к тому, что в этой новой системе координат частица является фотоном $m_0' = 0$, $\beta_1' = \pm 1$, энергия и импульс которого связаны обычным релятивистским соотношением $|p'^1| = \frac{E'}{c}$, $E' = E$, $P^{(1)} = p^1 = \pm \frac{m_0 c}{\gamma_1}$.

В общем случае произвольных преобразований Лоренца, для которых форма (4) является инвариантом, динамические переменные частицы в новой системе координат определяются формулой (7), в которой $\overset{\sigma}{\lambda}_{(\mu)}$ — произвольная матрица Лоренца. При этом энергия, импульс, масса покоя и скорость частицы в новой системе координат могут быть найдены из соотношений (9).

Как следует из полученных результатов, в пятимерной релятивистской схеме нет принципиальной разницы между частицами с массой покоя, равной нулю, и частицами с отличной от нуля массой покоя (точно так же, как нет принципиальной разницы между частицами с тем или иным импульсом, энергией в обычной релятивистской схеме). Обычный четырехмерный интервал не является более инвариантом в предлагаемой релятивистской схеме.

К задачам о столкновениях

В рассматриваемой пятимерной теории вектор импульса любой свободной частицы лежит на изотропном конусе в $x^{0\div 4}$. Векторы частиц с $m_0=0$ расположены на изотропном конусе в пространстве $x^{0\div 3}$, который получается пересечением конуса в $x^{0\div 4}$ с пространством $x^4=0$. Векторы частиц, покоящихся в пространстве $x^{1\div 3}$, расположены на пересечении конуса в $x^{0\div 4}$ плоскостью $x^0 x^4$. Составляющая вектора импульса вдоль оси x^0 соответствует энергии частицы, проекции на оси x^1, x^2, x^3 равны компонентам пространственного импульса обычной релятивистской теории, наконец, составляющая вдоль оси x^4 равна $\pm m_0 c$.

При столкновениях импульсы частиц до и после столкновения лежат на одном и том же изотропном конусе в $x^{0\div 4}$. Число частиц до и после столкновения — произвольно. Упругое столкновение частиц описывается законом сохранения полного импульса частиц $\sum_i P^\sigma_{(i)} = \sum_j P^\sigma_{(j)}$.

Закон сохранения, формулируемый этим уравнением, соответствует законам сохранения энергии, импульса и массы покоя в релятивистской механике (левая и правая суммы распространяются на частицы до и после столкновения).

Неупругие столкновения в релятивистской механике характеризуются законами сохранения энергии и импульса. При этом, как известно, масса покоя частиц не сохраняется. В пятимерной теории такие столкновения описываются уравнением $\sum_i P^\sigma_{(i)} = \sum_j P^\sigma_{(j)} + \delta_4^\sigma \varepsilon$, в котором ε — дефект массы реакции. Теперь, однако, в силу принципа пятимерной релятивистской инвариантности мы обязаны сделать вывод, что при неупругих столкновениях не сохраняется пятимерный импульс (т. е. может не сохраняться энергия P^0, импульс вдоль оси x^1—P^1 и т. п.), и описывать неупругие столкновения уравнением $\sum_i P^\sigma_{(i)} = \sum_j P^\sigma_{(j)} + \varepsilon^\sigma$.

Следует подчеркнуть, что при этом не учитываются регулярные части полей, соответствующих частицам; для полного поля вместе с сингулярностями — частицами упомянутый закон сохранения всегда выполняется.

Рассмотрим с точки зрения пятимерного принципа относительности простейшую задачу на неупругие столкновения — задачу о распаде. Пусть наблюдатель обнаружил, что в результате реакции возникла частица с массой покоя m_0 и, просуществовав по его часам время T, распалась. Для другого наблюдателя эта частица имела другую массу покоя m_0' и, в случае если оба наблюдателя вместе с частицей покоятся в пространстве $x^{1\div 3}$, ее время жизни связано с m_0, m_0' и T формулой $T' = \frac{1}{2} T \left(\frac{m_0'}{m_0} + \frac{m_0}{m_0'} \right)$ (см. (8), (10)). Из этого равенства, в частности, следует, что частицы с массой покоя, равной нулю, всегда устойчивы.

Расстояния и промежутки времени

Для решения задачи синхронизации часов и измерения расстояний поступим по аналогии с процедурой, используемой в обычной релятивистской схеме, с той лишь разницей, что для измерений будем пользоваться не фотонами, а частицами с отличной от нуля массой покоя. Пусть для определенности это будут электроны. Геометрически дело обстоит следующим образом: в нашем распоряжении имеются частицы, векторы импульсов которых лежат на изотропном конусе. Концы этих векторов лежат на пересечении конуса с плоскостью $x^4 = m_0 c$ (для простоты мы нигде не делаем различия между координатным и импульсным пространствами). Нашей задачей является синхронизация произвольно расположенных часов с нашими часами, а также измерение их пяти координат.

Для решения задачи мы снабдим часы электронным зеркалом и выпустим электрон определенной энергии в направлении часов. Таким образом, зафиксировав момент возвращения электрона, мы найдем время его движения τ и, разделив его пополам, прибавим ко времени отправления — это время должны показывать часы в момент, когда там оказался электрон. Теперь мы можем вычислить координату часов: $x^1 = \frac{v_1 \tau}{2}$, где v_1 — скорость электрона, соответствующая его энергии, а за направление x^1 мы приняли направление, в котором движущийся фотон попадает на зеркало. Так как при этом электрон двигался в пятимерном пространстве со скоростью c, то полное расстояние до часов равно $\frac{c\tau}{2}$ и в момент столкновения с зеркалом электрон имел следующее значение пятой координаты: $x^4 = \frac{\sqrt{c^2 - v_1^2}\,\tau}{2}$. Таким образом, в результате измерения пять координат часов имеют следующие значения: $\frac{c\tau}{2}, \frac{v_1\tau}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{c^2 - v_1^2}\,\tau}{2}$ (моментом отправления электрона считаем $t=0$). Иными словами, x^4-длине мировой линии электрона до зеркала.

Продолжив измерения с электронами той же энергии, мы сможем установить значения координат часов и синхронизировать их вдоль прямой на полуплоскости $x^4 < 0$ с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\theta = \frac{x^4}{x^1} = \frac{m_0 c}{P^1}$. Если далее воспользоваться электронами другой энергии, то та же процедура позволит синхронизировать часы и промерять расстояния вдоль другой прямой, а вслед за этим — и на всей полуплоскости $x^4 > 0$ (в дальнейшем будет показано, что отражение $x^4 \to -x^4$ соответствует замене частиц на античастицы) *.

Заметим, что если бы с аналогичной целью мы решили применить фотоны, как это делается в обычной релятивистской схеме, то получили бы для пятой координаты часов полностью неопределенное значение, сумев найти лишь их x^1 координату. Можно сказать, что поэтому мы *не видим* движения частиц по пятому измерению. Поясним этот вывод с волновой точки зрения. В этом случае вместо свободных частиц для измерений следует использовать соответствующие им плоские волны $\exp\left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)$ [1, 2]. Здесь $\varphi = P_\sigma x^\sigma = \varphi_\sigma x^\sigma$ — фаза, пятимерный инвариант. Пользуясь такой волной, мы нашли бы полное расстояние до зеркала с точностью порядка длины используемой волны (четырехмерной, в $x^1 x^4$) $\lambda = \frac{h}{|P|} = \frac{hc}{E}$**. При этом x^1 координата зеркала была бы найдена с точностью порядка $\lambda_1 = \frac{h}{|P^1|} = \frac{hc}{\beta_1 E}$, т. е. с точностью порядка длины волны де Бройля. Координата x^4 зеркала была бы найдена с точностью до комптоновской длины волны $\lambda_4 = \frac{h}{|P^4|} = \frac{h}{m_0 c}$. Отсюда видно, что если используемая для измерений частица — фотон, то x^1 координата часов будет найдена с точностью до длины волны фотона $\lambda_1 = \frac{h}{|P|} = \frac{hc}{E} = \frac{c}{\nu}$, а x^4 координата останется полностью неопределенной, так как для фотона $\lambda_4 = \infty$.

---

* $|P| = \sqrt{P_i P^i} = P^0, \quad i = 1 \div 4$

** Используя электроны различных энергий и рассматривая часы на оси x^1, для которых $\tau = \text{const}$, мы должны мысленно разместить их на окружности $(x^1)^2 + (x^4)^2 = \left(\frac{c\tau}{2}\right)$ в плоскости $x^1 x^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. ДАН СССР, **149**, 298—301, 1963.
2. Пытьев Ю. П. Журн. вычисл. мат. и мат. физ., **4**, 871—879, 1964.

Поступила в редакцию
28. 11 1964 г.

Кафедра
математики