Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1966

УДК 538.3 : 530.145

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Г. К. ЧЕПУРНЫХ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СПИНОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим статические сферически-симметричные решения нелинейного спинорного уравнения

$$i\gamma^{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\mu}} - m\left[1 - n\lambda\left(\overline{\Psi}\Psi\right)^{n-1}\right]\Psi = 0. \qquad [1,2,3]$$

Чтобы получить уравнения относительно радиальных функций, воспользуемся решением уравнения Дирака применительно к атому водорода [4]. Полагая

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix} = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

представим это уравнение, аналогично [4], в форме

$$iW'\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix} = (\nabla\sigma)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad iW\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = (\nabla\sigma)\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где

$$W = \omega - m + 3\lambda m l_0^2, \quad W' = \omega + m - 3\lambda m l_0^2, \quad I_0 = \overline{\Psi}\Psi.$$

Полагая, согласно [4],

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = F\Omega^{(1)}_{l,m}, \quad \begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix} = iG\Omega^{(2)}_{l+1,m}, \qquad (2')$$

где F и G — функции только r, а $\Omega^{(1)}_{l,m}$ и ${}^{(1)}_{l,m}$ — шаровые спиноры, определяемые (46.70) из [3].

Полагая в (46.70) $l=0$, $m=1$ и используя (46.72), из [4] преобразуем уравнения (2):

$$F' + (\omega + m)G - 3\gamma m\left(F^2 - G^2\right)^2 G = 0,$$

$$G' + \frac{2}{r}G - (\omega - m)F - 3\gamma m\left(F^2 - G^2\right)^2 F = 0. \qquad (3)$$

Полагая

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = F\Omega^{(2)}_{l,m}, \quad \begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix} = -iG\Omega^{(1)}_{l-1,m}$$

и используя (46.72) и (46.70) упомянутых работ при $l=1$ и $m=1$, перепишем уравнения (2):

$$F' + \frac{2}{r}F - (\omega + m) + 3\gamma m(F^2 - G^2)^2 = 0,$$
$$G' + (\omega - m)F + 3\gamma m(F^2 - G^2)^2 F = 0 \tag{4}$$

$\left(\gamma = \frac{\lambda}{(4\pi)^2}\right)$. Использование всех остальных значений l и m не позволяет исключить угловые переменные. Используя (1), (2′) и (46.70) (при $l=0$, $m=(1)$, получим радиальный лагранжиан L_r. Используя вместо решения Ψ, решение $\Psi^c = c\Psi^m$, соответствующее другому знаку энергии *, получим радиальный лагранжиан $L_r^c = -L_r$. Оба лагранжиана L_r и L_r^c с помощью уравнений Эйлера—Лагранжа ((32а)—(32б) [5]) приводят к одним и тем же уравнениям (3). Аналогичным путем можно получить и уравнения (4). Следовательно, частицеподобные решения систем (3) и (4) дают два симметричных спектра масс, соответствующих двум знакам энергии. Оба лагранжиана L_r и L_r^c приводят к одним и тем же уравнениям относительно $F(r)$ и $G(r)$ в случае, если нелинейный член $\lambda m(\bar{\Psi}\Psi)^n = \lambda m\left(\frac{F^2 - G^2}{4\pi}\right)^n$ входит в лагранжиан при нечетном n.

Полагая $x = mr$, $\omega = \beta m$, $F(r) = f(x)\left(\frac{1}{3\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $G(r) = g(x)\left(\frac{1}{3\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, приведем (3) и (4) к виду

$$g' = -\frac{2}{x}g - (1 - \beta)f + (f^2 - g^2)^2 f,$$
$$f' = -(1 + \beta)g + (f^2 - g^2)g \tag{3'}$$

с граничными условиями $g(0) = \alpha_1$ и $g(0) = 0$, ($g(0) = 0$ из-за наличия в (3′) члена $\frac{2}{x}g$)

$$g' = (1 - \beta)f - (f^2 - g^2)^2 f,$$
$$f' = -\frac{2}{x}f + (1 + \beta)g - (f^2 - g^2)^2 g \tag{4'}$$

с граничными условиями $g(0) = \alpha_2$ и $f(0) = 0$. Известно [6], что линейные члены системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка определяют поведение интегральных кривых системы нелинейных уравнений в случае, если корни уравнения

$$(a_{ik} - \lambda\delta_{ik}) = 0 \tag{5}$$

(a_{ik} — коэффициент при линейных членах) имеют действительные части, отличные от нуля. Для систем (3′) и (4′) уравнение (5) имеет решение

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{2}{x} \pm \sqrt{\frac{4}{x^2} + 4(1 - \beta^2)}}{2}.$$

Отсюда следует, что $f \to 0$ и $g \to 0$ при $x \to \infty$ в случае, если $\beta^2 < 1$. Если пренебречь нелинейными членами при $x \to \infty$, то системы (3′) и (4′) имеют квадратично-интегрируемые решения (при $\beta^2 < 1$). При $x \to \infty$ между g и f системы (3′) существует связь

$$g = \frac{1}{1 + \beta}\left(\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{x}\right)f;$$

между f и g системы (4′) существует связь:

$$f = -\frac{1}{1 - \beta}\left(\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{x}\right)g.$$

* с — инвариантность спинорных уравнений в классическом случае означает симметрию относительно знака энергии [1].

Чтобы выяснить зависимость поведения решений уравнений (3′) от α_1 и β, находим

$$g'(0) = -\frac{\alpha_1}{3}(1-\beta-\alpha^4), \tag{6}$$

и поскольку $f'(0)=0$, то при достаточно малом x_0 с учетом разложения $f(x_0)$ в ряд Тэйлера и малости $g(x_0)$ получим

$$f'(x_0) = -(1+\beta)g + \alpha^4 g. \tag{7}$$

Рассмотрим случай $\alpha_1^4 > 1+\beta$. Тогда из (6) и (7) следует, что f и g увеличиваются с ростом x в окрестности нуля и дальнейшее поведение f и g зависит от того, будет ли $[(f^2-g^2)^2]'>0$ или* больше нуля. При этом

$$[(f^2-g^2)^2]^1 = 4(f^2-g^2)(ff'-gg'). \tag{8}$$

Из (3) находим

$$ff'-gg' = 2g^2\left(\frac{1}{x}-\beta\frac{f}{g}\right). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что при $x > \frac{1}{\beta}, \frac{g}{f}$, $[(f^2-g^2)^2]' < 0$ и, следовательно, при некотором $x=\bar{x}$, $g=f$, и в силу (9), $|f'|>|g'|$. Поэтому при некотором $x'>\bar{x}$, $g>f$.

Тогда из (9) и (8) следует, что $[(f^2-g^2)^2]'>0$. Следовательно, после пересечения f и g, g' и f', а затем g и f неограниченно возрастают и тогда при $\alpha_1^4 > 1+\beta$ частицеподобных решений нет.

Рассмотрим случай: $1-\beta < \alpha_1^4 < 1+\beta$. В окрестности нуля f, f', g' — убывают с ростом x, а g — увеличивается. Убывание g' следует из того, что с увеличением g и убыванием f при некотором $\bar{x}$ возможен случай $f=g$ и тогда $g'<0$. При $g<f$ всегда можно найти $x'<\bar{x}$, когда $f'<0$ и $g'<0$. Здесь возможны три случая: 1) f и g пересекаются, 2) $f\to 0$ и $g\to 0$ при $x\to\infty$ (причем $f>g$ и $|f'|>|g'|$) и 3) g — уходит в область отрицательных значений, если при $g=0$, $1-\beta>(f^2-g^2)^2$, и тогда $f'>0$. Чтобы g находилось в области положительных значений, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $1-\beta<(f^2-g^2)^2$, т. е. можно найти такое β, чтобы $f\to 0$ и $g\to 0$ при $x\to\infty$, т. е. мы будем иметь безузловые частицеподобные решения. Одноузловые решения возможны при пересечении f и g в области положительных значений. Для (4′) (способом аналогичным для (3′)) можно показать, что при $\alpha_2^4 > 1+\beta$, $|f|$ и g, $|f'|$ и g' — неограниченно увеличиваются с ростом** x. Используя (1), (2′) находим выражение для массы:

$$M = \int T^{00}dV = \frac{1}{m^2\sqrt{3\gamma}}\left[\beta\int_0^\infty (f^2+g^2)x^2dx + \frac{2}{3}\int_0^\infty (f^2-g^2)^3\times\right.$$

$$\left.\times x^2dx = \frac{1}{m^2\sqrt{3-\gamma}}I_2. \tag{10}$$

Используя (1), (2′) и проинтегрировав по угловым переменным, находим ($l=0$, $m=1$):

$$S_z = \int(x'T^{\overset{\text{metr}}{20}} - x^2T^{\overset{\text{metr}}{10}})\,dV =$$

$$= \frac{1}{m^2\sqrt{3\gamma}}\left[\beta\int_0^\infty (fgx^3dx + \int_0^\infty g^2x^2dx\right] = \frac{1}{3m\sqrt[3]{3-\gamma}}I_1 \tag{11}$$

и $S_y = S_x = 0$.

Учитывая, что максимальное абсолютное значение S_z совпадает со значением спина S, запишем

$$\frac{M}{S} = 3m\frac{I_2}{I_1} \quad \text{или} \quad M = 3m\frac{I_2}{I_1}S. \tag{12}$$

---

* Т. е. от того, будет ли функция $(f^2-g^2)^2$ увеличиваться или уменьшаться с ростом x.

** Отмеченное поведение решений f и g уравнений (3′) и (4′) при $\alpha_1^4>1+\beta$ и $\alpha_2>1+\beta$ относится только к уравнениям (1) при нечетном n.

На электронной машине для четырех значений α были найдены безузловые частицеподобные решения и следующие значения для β и интегралов I_1 и I_2.

α	β	I_1	I_2	I_2/I_1
1,0	0,9987446	25,2	17	0,67
0,95	0,9994189	39,2	25,5	0,65
0,9	0,9997315	63	42,1	0,67
0,85	0,9998764	103,6	69,3	0,67

Подставляя найденное значение для I_2/I_1 в (12), получаем (для значений спина от $\frac{1}{2}$ до $\frac{7}{2}$) соотношение: $M=2mS$. Поскольку в квантовой механике S принимает полуцелые значения, то полученное соотношение имеет физический смысл только для этих допустимых значений.

Автор благодарен проф. Я. П. Терлецкому за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепурных Г. К. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, 1964.
2. Чепурных Г. К. ЖЭТФ, **29**, 1779, 1965.
3. Чепурных Г. К. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон. № 3, 1965.
4. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
5. Finkelstein R., Levier L., Ruderman M. Phys. Rev., **83**, 326—332, 1951.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1947.

Поступила в редакцию
27. 5 1965 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.21

И. П. БАЗАРОВ

ПРАВИЛО ПОЛОВИНЫ

Известен ряд работ [1—3], в которых обосновывается неприменимость метода самосогласованного поля в теории твердого тела. Хотя в этих работах и правильно указывается на некорректность применения этого метода в некоторых исследованиях по теории кристаллического состояния, тем не менее сам метод оказывается хорошим приближением в теории твердого тела.

Как будет нами показано в другой работе, правильное пременение метода самосогласованного поля в теории кристалла позволяет развить статистическую теорию фазового равновесия и перехода кристалл—жидкость, а также получить целый ряд других физически важных результатов. Мы приведем один из таких результатов, который можно назвать «правилом половины». Согласно этому правилу абсолютная температура плавления $T_{пл}$ (при атмосферном давлении) веществ с критическим давлением в несколько (до 46) атмосфер равна половине критической температуры $T_к$:

$$T_{пл}=\frac{1}{2}T_к.$$