Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1966

УДК 531.51

ВУ ТХАНЬ ХИЕТ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ПЛОСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Исходя из концепции относительного гравитационного поля, выдвинутой Ю. А. Рыловым [1], подсчитаны энергии плоских гравитационных волн Синга [3] относительно отдельных опорных точек. Получено, что знак и значение энергии зависят от положения опорной точки.

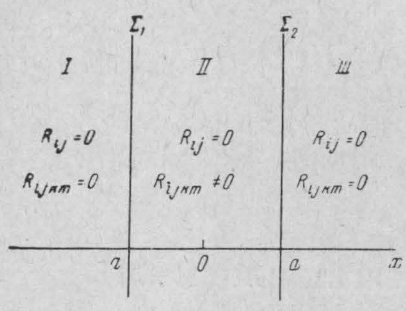
Плоские гравитационные волны рассматривались рядом авторов. Тауб [4] и Мак-Витти [5] показали, что неполяризованных плоских волн не существует. Робинсону и позднее Бонди удалось показать [6, 7], что уравнения поля допускают существование плоских волновых зон конечной протяженности между двумя областями плоского пространства. Синг [3] рассмотрел объемные плоские гравитационные волны. Энергия плоских волн Робинсона — Бонди подсчитана Кучаром, Лангером [8] и Каэном [9] с помощью выражения для псевдотензора энергии-импульса Меллера [10, 11, 12] и Лангером [13] с помощью выражения для псевдотензора Плебанского; эти авторы показали, что энергия этих волн равна нулю. Араки [14] доказал существование и единственность решения уравнений тяготения в линейном приближении слабого поля для случая, когда пространственная часть метрики является регулярной и сводится к плоской, и показал, что это решение определяет гравитационные волны, энергия которых положительно определена.

В настоящей работе исходя из концепции относительного гравитационного поля, выдвинутой Ю. А. Рыловым [1], подсчитаем относительную энергию плоских гравитационных волн Синга [3]. В работе [1] показано, что при описании гравитационного поля физически существенным является только относительное гравитационное поле, т. е. гравитационное поле в точке X по отношению к полю в опорной точке X'. Относительное гравитационное поле представляет собой двухточечный тензор

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma}(X, X') = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X, X'), \tag{1}$$

где $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X)$ суть скобки Кристоффеля в пространстве-времени V_4 в некоторой системе координат K, а $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(X, X')$ суть скобки Кристоффеля в плоском пространстве $E_{x'}$, соприкасающемся с V_4 в точке X', в системе координат K', полученной при отображении V_4 на $E_{x'}$. Способ отображения V_4 на $E_{x'}$ зависит от выбора опорной точки X'. При отображении V_4 на $E_{x'}$ -геодезические в V_4, проходящие через X', отображаются в прямые в $E_{x'}$, проходящие через X', причем при отображении сохраняются углы между геодезическими в точке X' и длины геодезических, проходящих через точку X'. При этом метрический тензор $G_{x'}$ пространства $E_{x'}$ оказывается тесно связанным [2] с мировой функцией Синга [3].

Исходя из концепции относительного гравитационного поля оказывается возможным ввести плотность энергии, импульса и другие величины для гравитационного поля [1], причем все величины, относящиеся к гравитационному полю, оказываются относительными (зависящими от опорной точки X'). Это можно трактовать как некую общую относительность, присущую гравитационному полю. Согласно [1], 4-импульс гравитационных волн относительно опорной точки определяется соотношением



$$P_{\beta'} = P_{\beta'}(X') = \int\limits_{\Sigma} \theta^{\alpha}_{g\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_{\alpha},$$

где $P_{\beta'}$ — относительный 4-импульс гравитационных волн, являющийся вектором в точке X', $D_x = det\,\| G_{\mu\nu} \|$, Σ — произвольная бесконечная пространственно-подобная гиперповерхность $\theta^{\alpha}_{g\beta'} = P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}\theta^{\alpha}_{g\gamma}$, $P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}$ — тензор параллельного переноса в $E_{x'}$, а $\theta^{\alpha}_{g\gamma}$ — тензор энергии-импульса гравитационного поля относительно точки X', даваемый соотношением

$$\Lambda\theta^{\alpha}_{g\beta} = -\frac{1}{2\varkappa}\{g^{\rho\sigma}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\delta} - g^{\mu\delta}g^{\alpha\nu})(Q_{\sigma\nu\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\nu\sigma\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\sigma\rho\beta}Q_{\delta\mu\nu}) - \delta^{\alpha}_{\beta}L_g\},$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{D_x}{g}}, \quad g = det\,\| g_{\mu\nu} \|, \quad Q_{\sigma\nu\beta} = g_{\sigma\mu}Q^{\mu}_{\nu\beta}. \tag{2}$$

Здесь L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля относительно X', взятая в виде

$$L_g = L_g(X, X') = g^{\mu\beta}(Q^{\alpha}_{\gamma\beta}Q^{\gamma}_{\alpha\mu} - Q^{\alpha}_{\mu\beta}Q^{\gamma}_{\alpha\gamma}), \tag{3}$$

$\varkappa = \dfrac{8\pi\gamma}{c^4}$, γ — гравитационная постоянная Ньютона.

В том случае, если в качестве Σ выбрана гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, получим

$$P_{\beta'} = \int\limits_{\Sigma} \Lambda\theta^{0}_{g\beta'} \sqrt{-g}\, d^3x, \quad d^3x = dx^1dx^2dx^3. \tag{4}$$

На рисунке показана объемная гравитационная волна в пространстве-времени [3]. Две трехмерные гиперповерхности Σ_1 и Σ_2 делят пространство-время на три области: I, II и III. Материя отсутствует во всем пространстве, и повсюду мы имеем $R_{ij}=0$. Гравитационное поле в областях I и III отсутствует, и, следовательно, здесь $R_{ijkm}=0$.

Область II представляет собой объемную гравитационную волну. Здесь по крайней мере один из компонентов тензора Римана не равен нулю, что мы отметим, записав

$$R_{ijkm} \neq 0.$$

Напомним, что для допустимых координат $g_{\mu\nu}$ и $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^k}$ непрерывны, а $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^m}$ могут терпеть разрыв (условие Лишнеровича [15]). Существенная особенность объемной гравитационной волны состоит в существовании неплоской области, «втиснутой» между двумя плоскими. Чтобы построить гравитационную волну с линейным элементом [3]

$$ds^2 = dt^2 - \exp(2P)(dx^1)^2 - \exp(2Q)(dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{5}$$

где $x^0 = t$, скорость света выбрана за единицу, P и Q — произвольные функции от $x = (x^3 - x^0)/\sqrt{2}$ в областях I и III, необходимо удовлетворить уравнениям

$$P'' + P'^2 = 0, \quad Q'' + Q'^2 = 0, \tag{6}$$

где штрихи означают производные, так что

$$P = \ln m(x + \alpha), \quad Q = \ln n(x + \beta), \tag{7}$$

где α, β, m и n — постоянные (различные в областях I и III), а в области II нужно удовлетворить уравнению

$$P'' + P'^2 + Q'' + Q'^2 = 0, \tag{8}$$

не заботясь о том, чтобы удовлетворялись оба уравнения (6).

Вычислим тензор энергии-импульса этих плоских гравитационных волн. Величины $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ можно найти исходя из соотношения (1). $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связаны с мировой функцией Синга следующим образом [2]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\alpha\mu'} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} G_{\beta\mu'}, \tag{9}$$

где $G = G(X, X')$ — мировая функция Синга, $G_{\alpha\mu'} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\alpha}}$, а $G^{\alpha\mu'}$ — тензор с матрицей, обратной $G_{\alpha\mu'}$. Штрих у индекса означает, что индекс относится к точке X'. Мировая функция определяется соотношением

$$G(X, X') = \frac{1}{2} S^2(X, X'), \quad S(X, X') = \int_{x'}^{x} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}},$$

где интеграл берется вдоль геодезической, соединяющей точки X и X'. Тензор переноса $P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}$ имеет вид [2]

$$P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot} = -g_{\alpha'\sigma'}(X') G^{\sigma'\beta}, \quad P^{\cdot\alpha'}_{\beta\cdot} = -g^{\alpha'\sigma'}(X') G_{\sigma'\beta}, \tag{10}$$

где $P^{\cdot\alpha'}_{\beta\cdot}$ — тензор обратный $P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}$. Из (9) и (10) следует

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = P^{\cdot\sigma}_{\mu'\cdot} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (P^{\cdot\mu'}_{\beta\cdot}). \tag{11}$$

Мировая функция для метрики (5) имеет вид (см. [3])

$$G(X, X') = \frac{1}{2}(\xi^0 - \xi^3)\left\{(\xi^0 + \xi^3) + \frac{(\xi^1)^2}{\sqrt{2}\, I_1} + \frac{(\xi^2)^2}{\sqrt{2}\, I_2}\right\}, \tag{12}$$

где

$$\xi^i = x^i - x^{i'}, \quad I_1 = \int_{x'}^{x} \exp[-2P(x)]\, dx, \quad I_2 = \int_{x'}^{x} \exp[-2Q(x)]\, dx. \tag{13}$$

Отсюда для $P_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha'}$ получим

$$P_{0\cdot}^{\cdot 0'} = 1 + P_{0\cdot}^{\cdot 3'},$$

$$P_{0\cdot}^{\cdot 3'} = -P_{3\cdot}^{\cdot 0'} = \frac{(\xi^1)^2 (m_1 + m_1' - 2m_1 m_1')}{4I_1 (x - x')} + \frac{(\xi^2)^2 (m_2 + m_2' - 2m_2 m_2')}{4I_2 (x - x')},$$

$$P_{3\cdot}^{\cdot 3'} = 1 - P_{0\cdot}^{\cdot 3'}, \quad P_{1\cdot}^{\cdot 1'} = m_1', \quad P_{2\cdot}^{\cdot 2'} = m_2',$$

$$P_{0\cdot}^{\cdot 1'} = -P_{3\cdot}^{\cdot 1'} = \frac{(\xi^1)\, m_1' (m_1 - 1)}{\sqrt{2}\,(x - x')}, \quad P_{0\cdot}^{\cdot 2'} = -P_{3\cdot}^{\cdot 2'} = \frac{(\xi^2)\, m_2' (m_2 - 1)}{\sqrt{2}\,(x - x')},$$

$$P_{1\cdot}^{\cdot 0'} = P_{1'}^{\cdot 3'} = \frac{(\xi')(1 - m_1')}{\sqrt{2}\, I_1}, \quad P_{2\cdot}^{\cdot 0'} = P_{2\cdot}^{\cdot 3'} = \frac{(\xi^2)(1 - m_2')}{\sqrt{2}\, I_2}, \tag{14}$$

$$P_{1\cdot}^{\cdot 2'} = P_{2\cdot}^{\cdot 1'} = 0,$$

где $x - x' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi^3 - \xi^0)$,

$$m_1 = \frac{(x - x') \exp[-2P(x)]}{I_1}, \quad m_1' = \frac{(x - x') \exp[-2P(x')]}{I_1},$$

$$m_2 = \frac{(x - x') \exp[-2Q(x)]}{I_2}, \quad m_2' = \frac{(x - x') \exp[-2Q(x')]}{I_2}.$$

Вычислив $P_{\alpha'\cdot}^{\cdot\beta}$, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ и $\gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, для относительного гравитационного поля, получаем

$$Q_{j0}^{i} = -Q_{j3}^{i}, \ Q_{ij}^{3} = Q_{ij}^{0}, \ Q_{12}^{i} = Q_{2i}^{1} = Q_{1i}^{2} = 0, \ (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

$$Q_{00}^{0} = \frac{(\xi^1)^2 m_1}{2\sqrt{2}\,(x - x')^2 I_1} \{m_1 (1 + m_1') + P'(x - x')(1 + 2m_1') - 2\} +$$

$$+ \frac{(\xi^2)^2 m_2}{2\sqrt{2}\,(x - x')^2 I_2} \{m_2 (1 + m_2') + Q'(x - x')(1 + 2m_2') - 2\},$$

$$Q_{10}^{0} = \frac{(\xi^1)(m_1 m_1' - 1)}{2(x - x') I_1}, \quad Q_{20}^{0} = \frac{(\xi^2)(m_2 m_2' - 1)}{2(x - x') I_2},$$

$$Q_{00}^{1} = \frac{(\xi^1)\, m_1}{(x - x')^2} \{1 - m_1 - P'(x - x')\}, \tag{15}$$

$$Q_{00}^{2} = \frac{(\xi^2)\, m_2}{(x - x')^2} \{1 - m_2 - Q'(x - x')\},$$

$$Q_{10}^{1} = \frac{1 - m_1}{\sqrt{2}\,(x - x')} - \frac{P'}{\sqrt{2}}, \quad Q_{20}^{2} = \frac{1 - m_2}{\sqrt{2}\,(x - x')} - \frac{Q'}{\sqrt{2}},$$

$$Q_{11}^{0} = \frac{m_1' - 1}{\sqrt{2}\, I_1} - \frac{P' \exp[2P]}{\sqrt{2}}, \quad Q_{22}^{0} = \frac{m_2' - 1}{\sqrt{2}\, I_2} - \frac{Q' \exp[2Q]}{\sqrt{2}},$$

$$Q_{11}^{1} = Q_{22}^{2} = 0,$$

где

$$P' = \frac{dP}{dx}, \quad Q' = \frac{dQ}{dx}.$$

Из (3) и (15) получим

$$L_g = 0. \tag{16}$$

Поэтому из (2) и (15) для тензора энергии-импульса имеем

$$\Lambda\theta^{0}_{g\beta} = -\frac{g^{00}}{2\varkappa}\{(g^{11})^2 Q_{11\beta}(3Q_{011} - Q_{110}) + (g^{22})^2 Q_{22\beta}(3Q_{022} - Q_{220}) +$$
$$+ g^{11} g^{22} [Q_{11\beta}(Q_{022} - Q_{220}) + Q_{22\beta}(Q_{011} - Q_{110})]\}. \quad (17)$$

Отсюда, из соотношения $\Lambda\theta^{0}_{g\beta'} = P^{\cdot\nu}_{\beta'}\cdot\Lambda\theta^{0}_{\nu}$ и (10) получаем

$$\Lambda\theta^{0}_{g0'} = \Lambda\theta^{0}_{g0} = -\Lambda\theta^{0}_{g3'},$$
$$\Lambda\theta^{0}_{g1'} = \Delta\theta^{0}_{g2'} = 0, \quad (18)$$

$$\Lambda\theta^{0}_{g0'} = \frac{1}{4\varkappa}\left\{\left(\frac{m_1 - 1}{x - x'} + P'\right)\left(\frac{4m_1 + 2m_2 - 3m_1 m_1' - m_2 m_2' - 2}{x - x'} + 4P' + 2Q'\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m_2 - 1}{x - x'} + Q'\right)\left(\frac{4m_2 + 2m_1 - 3m_2 m_2' - m_1 m_1' - 2}{x - x'} + 4Q' + 2P'\right)\right\}, \quad (19)$$

где

$$x - x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^3 - \xi^0), \quad \xi^i = x^i - x^{i'},$$

$$P \equiv P(x) \equiv P\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^0)\right], \quad P' = \frac{dP}{dx},$$

$$Q \equiv Q(x) \equiv Q\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^0)\right], \quad Q' = \frac{dQ}{dx},$$

$$m_1 = \frac{(x - x')\exp[-2P]}{I_1}, \quad I_1 = \int_{x'}^{x}\exp[-2P]\,dx,$$

$$m_1' = \frac{(x - x')\exp[-2P(x')]}{I_1},$$

$$m_2 = \frac{(x - x')\exp[-2Q]}{I_2}, \quad I_2 = \int_{x'}^{x}\exp[-2Q]\,dx,$$

$$m_2' = \frac{(x - x')\exp[-2Q(x')]}{I_2}.$$

Теперь вычислим $P_{\beta'}$. Для $P_{\beta'}$ получаем согласно (4) и (18)

$$P_{1'} = P_{2'} = 0,$$

$$P_{0'} = -P_{3'} = \int_{\Sigma}\Lambda\theta^{0}_{g0'}\sqrt{-g}\,d^3x = \sqrt{2}\int dx^1\,dx^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda\theta^{0}_{g0'}\sqrt{-g}\,dx$$

$$P_{0'} = -P_{3'} = \sqrt{2}\,S\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda\theta^{0}_{g0'}\sqrt{-g}\,dx,$$

где

$$S = \int dx^1\,dx^2, \quad (20)$$

так как выражение $\Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}$ не зависит от x^1, x^2, а $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^0)$. Рассмотрим интеграл

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx. \tag{21}$$

Сначала заметим, что если этот интеграл сходится, то $\int\limits_{-\infty}^{-a} \Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx = 0$ для опорной точки, находящейся в области I (см. рис.), и $\int\limits_{a}^{\infty} \Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx = 0$ для опорной точки, находящейся в области III, из (7) и (19) получаем

$$\frac{m_1 - 1}{x - x'} + P' = \frac{m_2 - 1}{x - x'} + Q' = 0, \quad m_1' = m_2' = 1.$$

Эти результаты физически очевидны, потому что области I и III плоские. Но $\int\limits_{a}^{\infty} \Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx \neq 0$ для опорной точки, находящейся в области I, и $\int\limits_{-\infty}^{-a} \Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx \neq 0$ для опорной точки, находящейся в области III. Теперь найдем условие сходимости интеграла (21). Этот интеграл зависит от положения опорной точки $x' = d$. В общем случае для любой опорной точки (для любых d) этот интеграл не сходится и интеграл (21) сходится только для отдельных опорных точек. Отметим, что все приведенные выше рассуждения справедливы для любых функций P и Q, удовлетворяющих уравнениям (6) и (8).

Пусть Σ_1 и Σ_2 задаются соответственно уравнениями $x = -a$ и $x = a$. Тогда область II определяется неравенством $-a < x < a$ и в ней мы удовлетворим (8), требуя, чтобы P и Q удовлетворяли уравнениям

$$P'' + (P')^2 = -k^{-2}, \quad Q'' + (Q')^2 = k^{-2}, \quad k \gg a. \tag{22}$$

В качестве частного решения выбираем

$$P = \ln\cos\frac{x}{k}, \qquad Q = \frac{x}{k}.$$

В нашем приближении

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\exp[2P] = -\cos^2\frac{x}{k} \approx -\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \\ g_{22} &= -\exp[2Q] = -\exp\left[\frac{2x}{k}\right] \approx -\left(1 + \frac{2x}{k} + \frac{2x^2}{k^2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

$\left(\text{Это справедливо при } \frac{a}{k} \leqslant \frac{1}{10}.\right)$

Теперь необходимо определить в областях I и III функции P и Q в форме (7), требуя непрерывности этих функций и их первых производных на Σ_1 и Σ_2. Получаем в области I

$$\exp[P]=\left(1+\frac{a^2}{2k^2}+\frac{ax}{k^2}\right),\quad \exp[Q]=\exp\left[-\frac{a}{k}\right]\cdot\left(1+\frac{a}{k}+\frac{x}{k}\right), \tag{24}$$

в области III

$$\exp[P]=\left(1+\frac{a^2}{2k^2}-\frac{ax}{k^2}\right),\quad \exp[Q]=\exp\left[\frac{a}{k}\right]\cdot\left(1-\frac{a}{k}+\frac{x}{k}\right) \tag{25}$$

(заметим, что (12) получено из (11) заменой a на $-a$).

Итак, мы видим, что формальные сингулярности появляются в точках

$$x=-\frac{k_2}{a}-\frac{a}{2},\quad x=-k-a \quad \text{в области I}$$

и

$$x=\frac{k^2}{a}+\frac{a}{2} \quad \text{в области III.} \tag{26}$$

Исследуем случай, когда $x'=d<-a$ (опорная точка находится в области I). Тогда для A имеем

$$A=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\,dx=\int\limits_{-a}^{+\infty}\Lambda\theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\,dx=$$

$$=C+\lim_{x\to\infty}\{B\ln(x+\alpha)\},$$

где C, B — постоянные, зависящие от d, а α — постоянная, не зависящая от d. В нашем случае (функции P и Q имеют вид (23), (24) и (25)) из условия сходимости этого интеграла $B=0$ получим уравнение для d

$$\left(\frac{d}{k}\right)^7+a_1\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)^6+a_2\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)^5+a_2\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)^4+$$

$$+a_4\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)^3+a_5\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)^2+a_6\left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{d}{k}\right)+a_7\left(\frac{a}{k}\right)=0,$$

где $a_i\left(\frac{a}{k}\right)$ — функции от $\frac{a}{k}$. Решая это уравнение, получаем для его решений, удовлетворяющих условиям $d<-a$:

$$d=-82{,}50\,k\quad\left(\text{при }\ \frac{a}{k}=\frac{1}{100}\right)$$

и

$$d=-8{,}25\,k\quad\left(\text{при }\ \frac{a}{k}=\frac{1}{10}\right). \tag{27}$$

Аналогично получаем следующие значения d, для которых интеграл (21) сходится

$$d=82{,}50\,k\quad\left(\text{при }\ \frac{a}{k}=\frac{1}{100}\right),$$

$$d=8{,}25\,k\quad\left(\text{при }\ \frac{a}{k}=\frac{1}{10}\right)$$

и

$$d=0{,}34\,\frac{a^2}{k} \tag{28}$$

(заметим, что эти опорные точки находятся около формальных сингулярностей метрики $x=\frac{k^2}{a}+\frac{a}{2}$ в области III и $x=-\frac{k^2}{a}-\frac{a}{2}$, $x=-k-a$ в области I).

Теперь вычислим плотность энергии $E=\frac{P_0'}{S}$ (энергия на единицу площади в плоскости x^1x^2) для отдельных опорных точек (27), (28).

В силу (19), (10), (23), (24) и (25) получим в случае, когда опорная точка находится в области I ($d<-a$),

при

$$d=-82{,}50\,k \quad \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{100}\right)$$

$$a\varkappa E=-8{,}80\cdot 10^{-2} \tag{29}$$

и при

$$d=-8{,}25\,k \quad \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{10}\right)$$

$$a\varkappa E=-0{,}65. \tag{30}$$

В случае, когда опорная точка находится в области II

$$(|d|<a),$$

при

$$d=0{,}0034\,a \quad \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{100}\right)$$

$$a\varkappa E=0{,}06\cdot 10^{-8} \tag{31}$$

и при

$$d=0{,}034\,a \quad \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{10}\right)$$

$$a\varkappa E=0{,}06\cdot 10^{-4}. \tag{32}$$

В случае, когда опорная точка находится в области III

$$(d>a),$$

при

$$d=82{,}50\,k \quad \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{100}\right)$$

$$a\varkappa E=9{,}02\cdot 10^{-2} \tag{33}$$

и при

$$d=8{,}25\,k \left(\frac{a}{k}=\frac{1}{10}\right)$$

$$a\varkappa E=0{,}73. \tag{34}$$

Мы видели, что в случае $\frac{a}{k}=\frac{1}{10}$ абсолютные значения энергии становятся большими, чем в случае $\frac{a}{k}=\frac{1}{100}$(ср. (29), (31), (33) с (30), (32) и (34)). Это очевидно, потому что в случае $\frac{a}{k}=\frac{1}{10}$ волны сильнее, чем в случае $\frac{a}{k}=\frac{1}{100}$. Мы видели также, что $\int\limits_a^\infty \Lambda\theta^0_{q0'}\sqrt{-g}dx\neq 0$ для опорной точки, находящейся в области I, и $\int\limits_{-\infty}^{-a} \Lambda\theta^0_{go'} \sqrt{-g}dx \neq 0$ для опорной точки, находящейся в области III. Это показывает, что область I «кривая» по отношению к области III и, наоборот, область III «кривая» по отношению к области I (несмотря на то, что обе области I и III плоские). Если рассмотрим две системы нормальных координат (см., например, [3]) K_{I} и K_{III} в области I и III соответственно, то увидим, что в общем прямые в K_{I} (их уравнения имеют вид $x_i = u_i s + x_{i0}$, где u_i, x_{i0} — постоянные и s — длина прямого) преобразуются в кривые (их уравнения нелинейны) при переходе из K_{I} в K_{III}.

Интересно, что для опорных точек, находящихся в области I, относительная энергия отрицательна, а для опорных точек, находящихся в области III, относительная энергия положительна. Это показывает относительность энергии гравитационного поля: знак и значение энергии гравитационного поля оказываются относительными, т. е. зависящими от опорных точек X'. Полученные результаты показывают, что с одинаковым основанием мы можем считать энергию гравитационного поля и положительной и отрицательной.

Автор глубоко признателен профессору Я. П. Терлецкому за внимание и интерес к работе и Ю. А. Рылову за постановку задачи, помощь и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rylov Yu. A. Ann. Phys., **7**, 12, 1964.
2. Рылов Ю. А. «Изв. вузов», математика, № 3, 131, 1962.
3. Synge J. L. Relativity: the general theory, Amsterdam, 1960. Перевод. Синг Дж. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
4. Taub A. H. Ann. d. Math., **53**, 472, 1951.
5. Mc Vittie G. C. J. Rat. Mech. a. Anal., **4**, 201, 1955.
6. Bondi H. Nature, **179**, 1072, 1957.
7. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I., Proc. Roy. Soc., **A 251**, 519, 1959.
8. Kuchar K., Langer J. «Чехосл. физич. журнал», **B13**, 233, 1963.
9. Cahen M., Sengier—Diels J. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., **49**, No. 1, 43—53, 1963.
10. Möller C. Ann. Phys., **4**, 347, 1958.
11. Möller C. Kgl. Danske Vidensk. selsk. Mat—Fys., Medd, **31**, No. 14, 1959.
12. Möller C. Ann. Phys., **12**, 118, 1961.
13. Langer I. «Чехосл. физич. журнал», **B13**, 789, 1963.
14. Araki H. Ann. Phys., **7**, 456, 1959.
15. Lichnerowicz A. Theories Relativistes de la gravitahon et de l'Electromagnetisme, Paris, 1955.

Поступила в редакцию
7. 10 1965 г.

Кафедра
теоретической физики