Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1966

УДК 621.384.6.04

М. М. ХАПАЕВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВИНТОВЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Рассматриваются тороидальные винтовые поля, для быстрых частиц методами усреднения построена нелинейная теория движения с учетом тороидальных искажений. Получены формулы, определяющие параметры жестко фокусирующей системы и системы канализации частиц, построенных на базе винтового поля.

В работе [1] изучалось движение заряженной частицы в прямом винтовом магнитном поле, предполагалось, что скорость частицы в основном направлена по оси винтовой симметрии поля. Была установлена возможность удержания частицы винтовым полем.

В предлагаемой работе рассматриваются винтовые поля, свернутые в тор, средний радиус которого R много больше радиуса поперечного сечения σ_0; шаг винтового поля L предполагается большим радиуса σ_0. Методами усреднения построены адиабатические инварианты, описывающие нелинейные колебательные движения, аналогичные бетатронным колебаниям. Уравнения, описывающие эти колебания, линеаризованы для малых амплитуд колебаний и для их частот получены формулы, с помощью которых найдены основные линейные резонансы системы. В статье рассмотрено движение частицы в винтовом тороидальном поле при наличии заворачивающего поля и без него. Получены необходимые соотношения, связывающие параметры системы: радиус поперечного сечения тора σ_0, средний радиус тора R, шаг винтового поля L, величину винтового поля H и заворачивающего поля H_0.

Винтовым тороидальным полям посвящено много работ, в которых подробно исследована сложная геометрическая структура этих полей и свойства, позволяющие рассматривать их как ловушки заряженных частиц (в книгах, например, [2], можно найти подробную библиографию). Мы предлагаем использовать винтовые поля для другой цели: для удержания быстрых частиц, движущихся вблизи осевой линии тора. Это определяет требование $L > \sigma_0$; и отпадает необходимость знать структуру магнитных поверхностей поля.

Введем координаты, σ, χ, φ: σ и χ — полярные координаты в поперечном сечении тора, угол φ азимутальный угол, отсчитывается по дуге окружности радиуса R. Подробно рассмотрим винтовые поля, возрастающие линейно по σ, они позволяют наиболее эффективно осуществить фокусировку частиц. Используемый метод позволяет аналогично рассмотреть случай нелинейного возрастания поля по σ; для сравнения приведены результаты, относящиеся к этому случаю.

1. Вывод уравнений движения. Основная гармоника потенциала 2-заходного тороидального винтового поля представляется формулой [2]

$$\Phi_0 = \left(1 - \frac{\sigma}{2R}\cos\chi\right) I_2\left(\frac{n\sigma}{R}\right)\sin(2\chi - n\varphi). \tag{1}$$

Возьмем только первый член разложения функций Бесселя I_2 мнимого аргумента, малость добавки определяется малостью отношения $\left(\frac{\pi\sigma_0}{L}\right)^2 = \varepsilon_1$ и быстротой сходимости ряда для I_2. Компоненты винтового поля вместе с заворачивающим полем H_0 с учетом возмущений порядка $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_0}{R}$, вызванных тороидальностью поля, будут иметь вид

$$H_\sigma = H\rho\sin(2\chi - n\varphi)\left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon_2\rho\cos\chi\right) + H_0\sin\chi,$$

$$H_\chi = H\rho\left[\cos(2\chi - n\varphi) - \frac{1}{4}\varepsilon_2\rho\,(2\cos\chi\cos(2\chi - n\varphi) - \sin(2\chi - n\varphi))\right] + $$

$$+ H_0\cos\chi, \tag{2}$$

$$H_\varphi = -H\rho^2\frac{\pi\sigma_0}{L}\cos(2\chi - n\varphi),$$

где $\sigma_0\rho = \sigma$, n — число периодов винтового поля на торе $\frac{2\pi}{L} = \frac{n}{R}$.

В систему уравнений движения

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{cm}[\vec{v}\vec{H}] \tag{3}$$

введем следующие переменные и обозначения: $v_\perp = \sqrt{\dot{\sigma}^2 + (\sigma\dot{\chi})^2}$, $v = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^2 + v_\perp^2}$ — полная скорость частицы, m — релятивистская масса, e — заряд электрона, в плоскости (σ, χ); введем переменные $v_\perp$, α, где α — угол, образованный вектором скорости $\vec{v}_\perp$ с направлением $\chi = 0$. Тогда уравнение (3) с точностью до членов порядка $\frac{v_\perp^2}{v^2}$ запишется в виде

$$v_\perp\dot{\alpha} = \frac{ev}{cm}\left[H_\chi\sin(\alpha - \chi) + H_\sigma\cos(\alpha - \chi) - H_\varphi\frac{v_\perp}{v}\right] - R\dot{\varphi}^2\sin\alpha,$$

$$\dot{v}_\perp = \frac{ev}{cm}[-H_\chi\cos(\alpha - \chi) + H_\sigma\sin(\alpha - \chi)] + R\dot{\varphi}^2\cos\alpha,$$

$$\dot{\sigma} = v_\perp\cos(\alpha - \chi), \quad \sigma\dot{\chi} = v_1\sin(\alpha - \chi), \tag{4}$$

$$R\ddot{\varphi} = \frac{ev}{em}\left[\frac{\dot{\sigma}}{v}H_\chi - \frac{\sigma\dot{\chi}}{v}H_\sigma\right].$$

Быстрая частица, т. е. частица, скорость которой в основном направлена вдоль оси винтовой симметрии поля (следовательно: $\frac{v_\perp}{v} \ll 1$), пролетая последовательно периоды винтового поля, оказывается в поле быстро вращающейся силы. Быстрота вращения силы означает, что за время одного оборота поля частица совершает некоторые быстрые движения, амплитуда которых много меньше поперечных размеров камеры. Величина этой вращающейся силы зависит от σ, поэтому она вызовет медленное систематическое движение частицы (дрейф), которое аналогично бетатронным колебаниям в сильнофокусирующем ускорителе.

Естественным методом построения нелинейной теории движения частиц в таких полях будет усреднение действия этих быстропеременных сил. Изложенные соображения относительно выбора параметров системы определяют малость безразмерного параметра

$$\varepsilon = \frac{evH}{c m \sigma_0}\left(\frac{L}{2\pi v}\right)^2 = a\left(\frac{L}{2\pi v}\right)^2. \tag{5}$$

Для дальнейшего удобно ввести новые переменные: угол $\psi = 2\chi - m\varphi$, имеющий смысл фазы поля в точке, где находится частица; угол $\theta = \psi + \alpha - \chi$; безразмерное время $\tau = t\,\frac{v 2\pi}{L}$, имеющее смысл угла поворота поля вдоль траектории частицы. Дифференцирование по τ будем обозначать нулем вверху, безразмерную скорость w по формуле $v_\perp = \sqrt{a\varepsilon}\, w \sigma_0 \rho$; обозначим

$$\delta = \frac{L^2}{\varepsilon (2\pi)^2 R \sigma_0} - \frac{H_0}{H}.$$

В новых переменных система (4) запишется в удобном для усреднения виде:

$$w\overset{\circ}{\theta} = -w + \sin\theta + \varepsilon w^2 \sin(\theta - \psi) + \varepsilon_2 \frac{\rho}{4}\left[-2\cos\chi\cos\theta - \sin\psi\cos\alpha\right] +$$

$$+ \varepsilon\cdot\varepsilon_1 2\rho^2 w \cos\psi - \delta\,\frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{\varepsilon_1}{3}\,\rho\left[\sin\theta + \sin\psi\cos(\alpha - \chi)\right], \tag{6}$$

$$\overset{\circ}{w} = -\cos\theta - \varepsilon w^2 \cos(\theta - \psi) + \varepsilon_2\,\frac{\rho}{4}\left[2\cos\chi\cos\theta - \sin\psi\sin\alpha\right] +$$

$$+ \delta\,\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\varepsilon_1}{3}\,\rho\left[-\cos\theta + \sin\psi\sin(\alpha - \chi)\right],$$

$$\overset{\circ}{\psi} = -1 + \varepsilon 2 w \sin(\theta - \psi), \quad \overset{\circ}{\rho} = \varepsilon\rho w\cos(\theta - \psi),$$

$$\overset{\circ}{\chi} = \varepsilon w \sin(\theta - \psi), \quad \overset{\circ\circ}{\varphi} = 2\varepsilon^2\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1}\,\rho w.$$

В системе удобно оставить также уравнения для χ. Члены порядка $0\left(\frac{v_\perp^2}{v^2}\right) \cong \varepsilon^2\varepsilon_1$ опущены. В системе (6) переменные θ, w и ψ будем называть быстрыми, в отличие от них ρ и χ — медленными, так как их производные имеют порядок ε. Из последнего уравнения следует, что величина $\overset{\circ\circ}{\varphi}$ имеет весьма высокий порядок малости ($\sim\varepsilon^3$), т. е. $\overset{\circ}{\varphi}$ сохраняется в первых приближениях. Это позволяет разделить движения, считая движение по азимуту равномерным с большой точностью. Отсюда следует также, что в первых приближениях нет обмена энергией между поперечным и продольным движением.

2. Усреднение системы (6). Вырожденная система

$$\overset{\circ}{\psi} = -1, \quad \overset{\circ}{\theta} = -1 + \frac{\sin\theta}{w}, \quad \overset{\circ}{w} = -\cos\theta$$

описывает движение частицы в поле вращающейся силы, постоянна по величине и имеет интегралы p и Φ:

$$p = w^2 - 2w\sin\theta$$

$$\Phi = \theta - \psi - \begin{matrix}\text{arc} \\ \text{Arc}\end{matrix}\sin\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+p}} \quad \begin{matrix}\text{для} & p > 0 \\ \text{для} & p < 0.\end{matrix} \tag{7}$$

Интегралы p и Φ вместе с медленными переменными ρ и χ выберем в качестве новых переменных. Интегралы p и Φ, сохраняясь вдоль интегральных кривых вырожденной системы, будут медленно изменяться вдоль траекторий системы (6). Таким образом, система (6) будет сведена по методу работы [3] к системе медленных движений, для которых построена полная асимптотическая теория в книге [4].

Для того чтобы выполнить такую замену, продифференцируем формулы (7), и в силу системы (6) получим

$$\begin{aligned} \mathring{p} &= \frac{\partial p}{\partial w}\mathring{w} + \frac{\partial p}{\partial\theta}\mathring{\theta}, \\ \mathring{\Phi} &= \frac{e\Phi}{\partial w}\mathring{w} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathring{\theta}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\frac{\partial p}{\partial w} = 2w - 2\sin\theta, \quad \frac{\partial p}{\partial\theta} = -2w\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \pm w\frac{\sqrt{p+\sin^2\theta}}{1+p}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial w} = \frac{\cos\theta}{1+p}.$$

Усреднение совершается при постоянных p, Φ, ρ, χ, т. е. вдоль интегральных кривых вырожденной системы. Не приводя громоздких выкладок, связанных с усреднением, запишем усредненную систему, сохранив для переменных те же обозначения.

$$\rho = \varepsilon\rho\sqrt{1+p}\cos\Phi, \quad \mathring{\chi} = \varepsilon\sqrt{1+p}\sin\Phi,$$

$$\mathring{p} = -\varepsilon 2\sqrt{1+p}(2+\varepsilon_1\rho^2+p)\cos\Phi + 2\delta\frac{\sqrt{1+p}}{\rho}\cos(\Phi+\chi).$$

$$\mathring{\Phi} = -\varepsilon\frac{p-\varepsilon_1 p^2}{\sqrt{1+p}}\sin\Phi - \delta\frac{\sin(\Phi+\chi)}{\rho\sqrt{1+p}}. \tag{9}$$

3. Исследование усредненной системы (9) при $\varepsilon_1 = 0(\varepsilon)$ и $\delta = 0(\varepsilon^2)$. В этом случае члены, пропорциональные ε_1 и δ, можно не рассматривать в первом приближении.

Подробно опишем процесс движения для этого случая, чтобы в дальнейшем изучать возмущения этого процесса.

Получим интегралы усредненной системы

$$\begin{aligned} &\mathring{\rho} = \varepsilon\rho\sqrt{1+p}\cos\Phi, \quad \mathring{\chi} = \varepsilon\sqrt{1+p}\sin\Phi, \\ &\mathring{p} = -\varepsilon 2\sqrt{1+p}(2+p)\cos\Phi, \\ &\mathring{\Phi} = \varepsilon\frac{-p}{\sqrt{1+p}}\sin\Phi, \end{aligned} \tag{10}$$

которые называются адиабатическими инвариантами:

$$(2+p)\rho^2=\lambda, \ \sin^2\Phi\rho^2(\rho^2-\lambda)=\gamma. \tag{11}$$

Как это следует из инварианта γ, интегральные кривые на плоскости $\rho^2\Phi$ будут представлять два семейства вложенных друг в друга выпуклых гладких фигур, содержащих точки $\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}$. Эти точки являются особыми точками типа центр, так что вблизи точек $\Phi=\pm\frac{\pi}{2}$; $\rho^2=\frac{\lambda}{2}$; $p=0$ система (10) допускает линеаризацию и переменные ρ^2, p и Φ совершают гармонические колебания вида $\rho^2=\frac{\lambda}{2}+\Delta\cos(2\tau\varepsilon+\beta)$ малой амплитуды Δ. Частота этих колебаний Ω не зависит от λ, а значит и от начальных условий, и определяется лишь параметрами системы

$$\Omega=\frac{eHL}{cm\sigma_0\pi}. \tag{12}$$

Если переменные ρ^2, p, Φ являются колебательными переменными, то χ — вращательная переменная в том же приближении

$$\chi=\varepsilon\tau+\chi. \tag{13}$$

С ростом времени угол χ возрастает линейно. За то время, когда угол χ совершит полный оборот, ρ^2 закончит два периода колебаний. Таким образом получается четкая картина движения в поперечном сечении тора: частица медленно перемещается по кругу радиуса $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$, и на этой окружности укладываются два периода малых гармонических колебаний, кроме того, частица совершает быстрые движения с частотой вращения поля в ε-окрестности траектории медленного движения. Величины инвариантов λ и γ определяются через начальные параметры частицы, поэтому можно, требуя, чтобы эти движения совершались в пределах камеры, получить ограничения на начальные параметры частиц.

Если частота колебаний $\Omega=k\omega$, где k — целое число, ω — частота обращения, то малое возмущение поля может вызвать раскачивание колебаний и убывание инварианта γ, в результате чего колебания станут нелинейными. Однако в линейном приближении будем иметь дело с основным линейным резонансом. Для того чтобы избежать резонанса, необходимо поддерживать поле с точностью ΔH, которая определяется формулой

$$\Delta H\cdot\frac{eL}{cm\sigma_0\pi}=\omega. \tag{14}$$

Картина движения частицы в n-заходном, $n\geqslant3$ винтовом поле будет похожей. Существенное отличие состоит в том, что не только радиус окружности медленного движения зависит от λ, но и частота Ω также. Поэтому всегда найдутся частицы, которые попадут в резонанс, но они выйдут из него, перейдя на окружность большего радиуса. Таким образом, будут существовать «резонансные кольца»; частица, попавшая в такое кольцо, оказывается вблизи резонанса и переходит на более далекий от центра уровень.

Асимптотическая теория [3] и [4] гарантирует близость истинного решения и решения усредненной системы на конечном числе медленных циклов.

4. Учет влияния продольного поля H_φ в системе (9). Возмущение порядка ε_1, т. е. влияние продольного поля, можно учесть путем введения параметра ε_1 в адиабатические инварианты

$$\sin^2\Phi(\lambda-\rho^2)\rho^2\left(1+\frac{\varepsilon_1}{2}\rho^2\right)=\gamma, \tag{15}$$

$$\rho^2(p+2)=\lambda-\frac{\varepsilon_1}{2}\rho^4.$$

Это приведет к некоторому искажению картины движения, описанной в 3. В линейном приближении можно учесть в системе (9) малые возмущения порядка ε_1 следующим образом. Ввести инварианты λ и γ в систему (9) в качестве медленных переменных и усреднить влияние возмущений порядка ε_1 вдоль интегральных кривых системы (10). Переменные ρ^2, Φ и p совершают гармонические колебания, что приводит к нулевому результату, т. е. в среднем компонент винтового поля H_φ не влияет на движение частиц.

5. Влияние тороидального искривления поля. В правых частях системы уравнений (6) содержатся члены порядка $\varepsilon_2=\frac{\sigma_0}{R}$. В результате усреднения этих членов и членов $\sim\varepsilon_1$ получился нуль, этим доказано, что если радиус тора достаточно велик, ε_2 имеет одинаковый с ε порядок малости или более высокий, то тороидальные возмущения самого винтового поля не оказывают влияния на усредненное движение. Но тороидальное искривление описывается в системе (9) еще членами порядка δ. Выбрав заворачивающее поле из условия

$$H_0=H\frac{L^2}{\varepsilon(2\pi)^2R\sigma_0}, \tag{16}$$

добьемся обращения в нуль членов порядка δ.

Итак, если заворачивающее поле выбрано по формуле (16), радиус тора R ограничен снизу требованием, чтобы отношение $\varepsilon_2=\frac{\sigma_0}{R}$ по порядку величины было равно $\varepsilon\left(\frac{\sigma_0}{R}\lesssim\varepsilon\right)$.

В случае отсутствия заворачивающего поля приходится в основном увеличением R добиваться малости $\delta=\frac{\sigma_0}{\varepsilon R}\left(\frac{L}{2\pi\sigma_0}\right)^2$, так как $\varepsilon_1=\left(\frac{\pi\sigma_0}{L}\right)^2$ также подчиняется условию $\varepsilon_1<1$. Введем $\delta_1=\frac{\delta}{\varepsilon}$ и рассмотрим систему (10), возмущенную членами порядка

$$\rho'=\rho\sqrt{1+p}\cos\Phi,\quad \chi'=\sqrt{1+p}\sin\Phi,$$

$$p'=-2\sqrt{1+p}(2+p)\cos\Phi+\delta_1\frac{2}{p}\sqrt{1+p}\cos(\Phi+\chi),$$

$$\Phi'=\frac{-p}{\sqrt{1+p}}\sin\Phi-\delta_1\frac{\sin(\Phi+\chi)}{\rho\sqrt{1+p}}, \tag{17}$$

где штрих означает дифференцирование по $\varepsilon\tau$.

Для малых линейных колебаний вблизи окружности $\rho^2=\frac{\lambda}{2}$ можно учесть влияние возмущений порядка δ_1. Рассматривая интегралы λ и γ как новые медленные переменные, а ρ, χ, p, Φ как быстрые, совершим в системе (17) замену переменных и для λ и γ получим систему медленных движений. Выпишем только уравнение для λ

$$\lambda' = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial \lambda}{\partial p} p' = \delta_1 2\rho \sqrt{1+p} \cos(\Phi + \chi). \tag{18}$$

Усредняя правую часть вдоль кривых системы (10) (см. 4), получим нуль, так как χ — вращательная переменная $\chi = \varepsilon\tau + \chi_0$. Аналогично можно показать, что будет сохраняться в среднем и инвариант γ. Тем самым доказано, что возможна жесткая фокусировка тороидальным волновым полем без заворачивающего поля, если параметры системы подчиняются условию

$$\delta_1 < 1, \text{ т. е. } \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\sigma_0}{R} \left(\frac{L}{2\pi\sigma_0} \right)^2 < 1. \tag{19}$$

На основании полученных результатов можно предложить новую конструкцию для канализации заряженных частиц, «магнитный шланг», основанный на использовании винтовых полей. В винтовом поле могут перемещаться быстрые частицы широкого диапазона скоростей, необходимо только, чтобы сохранялась малость параметра ε. С помощью адиабатических инвариантов λ и γ, учитывая характеристики источника частиц, можно выбирать параметры системы с тем, чтобы потери частиц были минимальны. «Магнитный шланг», т. е. камеру с винтовым полем, можно изгибать произвольно, необходимо только, чтобы радиус изгибания не был слишком мал, он должен подчиняться условию (19).

Особенно эффективно можно использовать предложенные системы для канализации легких частиц (электронов), так как будет достаточно слабых полей и небольших токов. Для нерелятивистских электронов такие системы могут быть довольно компактными: поперечник ~ 1 *мм*, шаг винтового поля ~ 1 *см*, радиус искривления ~ 1 *м*.

Для частиц большой энергии нужны большие винтовые поля, и без заворачивающего поля радиус тора будет весьма велик. Однородное заворачивающее поле внутри тороидальной камеры может быть образовано проводами, уложенными вдоль камеры с радиусом поперечного сечения r_0 так, чтобы плотность тока имела вид $i = i_0 \cos \chi$. Скалярный потенциал такого поля равен $\frac{i_0 2\pi}{c r_0} r \sin \chi$. Величина заворачивающего поля может регулироваться путем изменения r_0, таким путем можно построить магнитный канал с переменным радиусом кривизны R. Как видно из формулы (16), r_0 изменяется пропорционально R.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хапаев М. М. «Журн. ядерной физики», **1**, вып. 2, 1965.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича, вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.
3. Волосов В. М. «Усп. матем. наук», **18**, вып. 6(108), 3—126, 1962.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
5. Коломенский А. А., Лебедев А. И. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
15. 12 1964 г.

Кафедра
математики