Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1966

УДК 531.5

В. А. КРАСНИКОВ

К УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ КЛАССИЧЕСКОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

С помощью разложения по малому параметру получены на основе классической статистической механики уравнения гидродинамики многокомпонентной идеальной жидкости.

В настоящей статье получены на основе классической механики совокупности частиц уравнений гидродинамики для многокомпонентных систем. Ограничимся приближением идеальной жидкости. Для однокомпонентных классических систем этот вопрос исследовался в работах [1] и [2] и для квантовых — в [3, 4]. Случай многокомпонентной системы другим методом исследовался в работе [5].

Рассмотрим макроскопическую систему, частицы которой принадлежат M различным сортам и взаимодействие между которыми осуществляется через центральные силы с потенциалом $\Phi_{a_1a_2}(|q-q'|)$*. Введем функции распределения $F_{a_1\ldots a_s}(t, q_1\ldots q_s, p_1\ldots p_s)$, для которых в [6] было получено асимптотическое уравнение

$$\frac{\partial F_{a_1\ldots a_s}}{\partial t} = [H_{a_1\ldots a_s}, F_{a_1\ldots a_s}] +$$

$$+ \sum_{1\leqslant a_{s+1}\leqslant M} \frac{1}{v_{a_{s+1}}} \int \sum_{1\leqslant i\leqslant s} [\Phi_{a_i-a_{s+1}}, F_{a_1\ldots a_{s+1}}]\, dq_{s+1}\, dp_{s+1}, \qquad (1)$$

где квадратные скобки обозначают скобки Пуассона, гамильтониан изолированного комплекса из s-молекул равен

$$H_{a_1\ldots a_s} = \sum_{1\leqslant i\leqslant s}\left\{\frac{|p_i|^2}{2m_{a_i}} + U_{a_i}(t, q)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant s}\Phi_{a_ia_j}(|q-q'|),$$

$U_{a_i}(t, q)$—потенциал внешнего поля, а $v a_{s+1}$ — объем на одну частицу сорта a_{s+1} ($a_s = 1, 2\ldots M$).

---

* Под знаком функциональной зависимости мы не ставим стрелки над векторными величинами.

Уравнения гидродинамики представляют собой уравнения эволюции во времени средней плотности $n_{a_1}(t, q)$, средней массовой скорости $V(t, q)$ и средней энергии $n(t, q)$, $\varepsilon(t, q)$, которые определяются следующим образом:

$$n_{a_1}(t, q) = \frac{1}{v_{a_1}} \int F_{a_1}(t, q, p)\, d\vec{p}, \tag{2}$$

$$V^\alpha(t, q) = \frac{1}{\rho} \sum_{a_1} \frac{1}{v_{a_1}} \int p^\alpha F_{a_1}(t, q, p)\, d\vec{p}, \tag{3}$$

$$n\varepsilon(t, q) = \sum_{a_1} \frac{1}{v_{a_1}} \int \frac{|p - m_{a_1} V|^2}{2m_{a_1}} F_{a_1}\, d\vec{p} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{v_{a_1} v_{a_2}} \int \Phi_{a_1 a_2} F_{a_1 a_2}(t, q, q', p, p')\, d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}', \tag{4}$$

$$n = \sum_{a_1} n_{a_1}, \; \rho = \sum_{a_1} m_{a_1}, n_{a_1}.$$

Здесь $\varepsilon(t, q)$ — средняя внутренняя энергия на одну частицу.

Перейдем к вычислению производных по времени от этих величин. Прежде всего из (2) и (1) получим

$$\frac{\partial n_{a_1}(t, p)}{\partial t} = \sum_\alpha \frac{\partial (n_{a_1} V^\alpha)}{\partial q^\alpha} - \sum_\alpha \frac{\partial I^\alpha_{a_1}}{\partial q^\alpha}, \tag{5}$$

где мы воспользовались равенством

$$\int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F_{a_1 a_2}}{\partial p^\alpha}\, d\vec{p} = 0$$

и выражением для диффузионных потоков

$$I^\alpha_{a_1}(t, q) = \frac{1}{v_{a_1}} \int (p^\alpha - m_{a_1} V^\alpha) F_{a_1}(t, q, p)\, d\vec{p}. \tag{6}$$

Дифференцируя по времени (3), с учетом (1) получим

$$\frac{\partial (\rho V^\alpha)}{\partial t} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta} \int p^\alpha p^\beta F_{a_1}\, d\vec{p} +$$

$$+ \sum_{a_1} \frac{1}{v_{a_1}} \sum_\beta \int p^\alpha \frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\beta} \frac{\partial F_{a_1}}{\partial p^\beta}\, d\vec{p} +$$

$$+ \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{v_{\alpha_1} v_{\alpha_2}} \sum_\beta \int p^\alpha \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial q^\beta} \frac{\partial F_{a_1 a_2}}{\partial p^\beta}\, d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}'.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{\partial (\rho V^\alpha)}{\partial t} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta} \int p^\alpha p^\beta F_{a_1}\, d\vec{p} - \sum_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\alpha} n_{a_1} -$$

$$- \sum_{a_1, a_2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial q^\alpha} F_{a_1 a_2}\, d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}'.$$

Удобно ввести новую величину:

$$D_{a_1a_2}(t, q, q'-q) = \frac{1}{v_{a_1}v_{a_2}} \int F_{a_1a_2}(t, q, q', p, p')\, d\vec{p}\, d\vec{p}' = D_{a_2a_1}(t, q', q-q').$$

Здесь мы воспользовались свойством симметрии функции распределения относительно одновременной перемены сразу всех индексов

$$\frac{\partial(\rho V^\alpha)}{\partial t} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta} \int p^\alpha p^\beta F_{a_1} d\vec{p} - \sum_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\alpha} n_{a_1} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{a_1, a_2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial q^\alpha} \{D_{a_1a_2}(t, q, q'-q') + D_{a_2a_1}(t, q'q-q'). \quad (7)$$

Получим выражение для $\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t}$. Из (4) и (1) с учетом (3) следует

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} = \sum_{a_1} \frac{1}{v_{a_1}} \sum_\alpha \int \frac{|p - m_{a_1}V|^2}{2m_{a_1}} \left(\frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F_{a_1}}{\partial p^\alpha} - \frac{p^\alpha}{m_{a_1}} \frac{\partial F_{a_1}}{\partial q^\alpha} \right) d\vec{p} +$$

$$+ \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2v_{a_1} v_{a_2}} \sum_\alpha \int \frac{|p - m_{a_1}V|^2}{m_{a_1}} \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F_{a_1a_2}}{\partial p^\alpha} d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}' -$$

$$-\sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2v_{a_1} v_{a_2}} \int \Phi_{a_1a_2} \sum_\alpha \left(\frac{p^\alpha}{m_{a_1}} \frac{\partial F_{a_1a_2}}{\partial q^\alpha} + \frac{p'^\alpha}{m_{a_2}} \frac{\partial F_{a_1a_2}}{\partial q'^\alpha} \right) d\vec{p}\, d\vec{p}' d\vec{q}'.$$

Интегрируя по частям, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1}} \sum_\alpha I^\alpha_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\alpha} -$$

$$-\sum_{a_1} \frac{1}{v_{a_1}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int \frac{|p - m_{a_1}V|^2}{2m_{a_1}} \times \frac{p^\alpha}{m_{a_1}} Fa_1\, d\vec{p} -$$

$$-\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial q^\alpha} \int (p^\alpha - m_{a_1}V^\alpha)(p^\beta - m_{a_1}V^\beta) F_{a_1} d\vec{p} -$$

$$-\sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2v_{a_1} v_{a_2}} \sum_\alpha \int \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial q^\alpha} \left(\frac{p^\alpha}{m_{a_1}} + \frac{p'^\alpha}{m_{a_2}} - 2V^\alpha \right) F_{a_1a_2}(t, q, q', p, p')\, d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}' -$$

$$-\sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2v_{a_1} v_{a_2}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int \Phi_{a_1a_2} \frac{p^\alpha}{m_{a_1}} F_{a_1a_2} d\vec{p}\, d\vec{p}'\, d\vec{q}'. \quad (8)$$

Введем величину

$$G^\alpha_{a_1a_2}(t, q, q'-q) = \frac{1}{v_{a_1} v_{a_2}} \int p^\alpha F_{a_1a_2}(t, q, q', p, p')\, d\vec{p}\, d\vec{p}'.$$

Тогда (8) примет вид

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1}} \sum_\alpha I^\alpha_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial q^\alpha} - \sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \int \frac{|p - m_{a_1}V|^2}{2m_{a_1}} p^\alpha F_{a_1} d\vec{p} -$$

$$-\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial q^\alpha} \int (p^\alpha - m_{a_1}V^\alpha)(p^\beta - m_{a_1}V^\beta) F_{a_1} d\vec{p} -$$

$$-\sum_{a_1,a_2}\frac{1}{2v_{a_1}v_{a_2}}\sum_{\alpha}\frac{\Phi_{a_1a_2}}{\partial q^\alpha}\left\{\frac{1}{m_{a_1}}G^\alpha_{a_1a_2}(t, q, q'-q)+\right.$$

$$+\frac{1}{m_{a_2}}G^\alpha_{a_2a_1}(t, q', q-q')-V^\alpha(D_{a_1a_2}(t, q, q'-q)+D_{a_2a_1}(t, q', q-q')-$$

$$-\sum_{a_1,a_2}\frac{1}{2v_{a_1}v_{a_2}}\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\int\Phi_{a_1a_2}\frac{1}{m_{a_1}}G^\alpha_{a_1a_2}(t, q, q'-q)\,d\vec{q}'. \qquad (9)$$

Перейдем непосредственно к получению уравнений гидродинамики. Рассматриваемые в гидродинамике средние типа

$$\mathfrak{A}_{a_1}(t,q)=\frac{1}{v_{a_1}}\int A_{a_1}(q,p)\,F_{a_1}(t,q,p)\,d\vec{p}, \qquad (10)$$

$$\mathfrak{B}_{a_1a_2}(t, q, q'-q)=\frac{1}{v_{a_1}v_{a_2}}\int B_{a_1a_2}(q,q',p,p')\,F_{a_1a_2}(t,q,q',p,p')\,d\vec{p}\,d\vec{p}',$$

а также внешнее поле U_{a_1} (t, q) меняются достаточно медленно при пространственных и временных трансляциях $t\to t+T$ и $q\to q+l$, где l и T — длина свободного пробега и время релаксации соответственно. Предположим, что величины типа (10), к которым принадлежат и введенные ранее функции $D_{a_1a_2}$ $(t, q, q'-q)$ и $G^\alpha_{a_1a_2}$ $(t, q, q'-q)$, достаточно мало отклоняются от соответствующих локально-равновесных значений:

$$\mathfrak{A}_{a_1}(\ldots\; n_{a_i}(t,q)\;\ldots,\; \theta(t,q),\; V(t,q)),$$

и

$$\mathfrak{B}_{a_1a_2}(q'-q\,|\ldots\, n_{a_i}(t,q)\;\ldots\;,\; \theta(t,q),\; V(t,q)), \qquad (11)$$

причем тем меньше, чем меньше градиенты n_{a_1} (t, q), $\theta(t, q)$, U_{a_1} (t, q) и $\vec{V}(t, q)$. Заметим, что последние величины определяются в соответствии с (2), (3) и (4), в которых взяты локально-равновесные функции распределения.

Для математической формулировки сделанных допущений удобно ввести малый параметр μ. Тогда средние рассматриваемого типа и внешнее поле можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{a_1}(t,q)&=\widetilde{\mathfrak{A}}_{a_1}(\tau,\xi;\mu),\\ \mathfrak{B}_{a_1a_2}(t,q,R)&=\widetilde{\mathfrak{B}}_{a_1a_2}(\tau,\xi,R;\mu),\\ U_{a_1}(t,q)&=\widetilde{U}_{a_1}(\tau,\xi),\end{aligned} \qquad (12)$$

где

$$\tau=\mu t,\quad \vec{\xi}=\mu\vec{q}\ \text{ и }\ \vec{R}=\vec{q}'-\vec{q}.$$

Предельный переход $\mu\to 0$ приводит к состоянию статистического равновесия. Допущение о слабом отклонении от локального статистического равновесия выразится в виде

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{a_1}(\tau,\xi;\mu)=\widetilde{U}^{(0)}_{a_1}(\tau,\xi)+\mu\widetilde{\mathfrak{A}}^{(1)}_{a_1}(\tau,\xi)+\mu^2\ldots$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{a_1a_2}(\tau,\xi,R;\mu)=\widetilde{\mathfrak{B}}^{(0)}_{a_1a_2}(\tau,\xi,R)+\mu\widetilde{B}^{(0)}_{a_1a_2}(\tau,\xi,R)+\mu^2\ldots \qquad (13)$$

Здесь первый член соответствует локальному равновесию, второй представляет линейную форму по градиентам $\widetilde{n}_{a_1}$, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{U}_{a_1}$ и т. д.

В новых переменных уравнения (5), (7) и (9) примут вид

$$m_{a_1} \frac{\partial \widetilde{n}_{a_1}}{\partial \tau} = -m_{a_1} \sum_{\alpha} \frac{\partial (\widetilde{n}_{a_1} \widetilde{V}^\alpha)}{\partial \xi^\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\partial \widetilde{I}^\alpha_{a_1}}{\partial \xi^\alpha}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial (\widetilde{\rho}\, \widetilde{V}^\alpha)}{\partial \tau} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \int p^\alpha p^\beta F_{a_1} d\vec{p} -$$

$$-\sum_{a_1} \frac{\partial \widetilde{U}_{a_1}}{\partial \xi^\alpha} \widetilde{n}_{a_1} - \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2\mu} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \{\widetilde{D}_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) +$$

$$+ \widetilde{D}_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R)\}\, d\vec{R}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial (\widetilde{n}\ \widetilde{\varepsilon})}{\partial \tau} = -\sum_{a_1} \frac{1}{m_{a_1}} \sum_{\alpha} \widetilde{I}^\alpha_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial \xi^\alpha} - \sum_{a_1} \sum_{\alpha} \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \times$$

$$\times \int \frac{|p - m_{a_1} V|^2}{2 m_{a_1}} p^\alpha F_{a_1} d\vec{p} - \sum_{a_1} \frac{1}{2\mu} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \widetilde{V}^\beta}{\partial \xi^\alpha} \int (p^\alpha - m_{a_1} \widetilde{V}^\alpha) \times$$

$$\times (p^\beta - m_{a_1} V^\beta) F_{a_1} d\vec{p} - \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2\mu} \sum_{\alpha} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial f^\alpha} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{m_{a_1}} \widetilde{G}^\alpha_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \frac{1}{m_{a_2}} \widetilde{G}^\alpha_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R) - \widetilde{V}^\alpha (D_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \right.$$

$$\left. + D_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R) \right\} d\vec{R} - \frac{1}{2} \sum_{a_1, a_2} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \int \Phi_{a_1 a_2} \frac{1}{m_{a_1}} \widetilde{G}^\alpha_{a_1 a_2}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R}. \tag{16}$$

Рассмотрим входящую в (15) и (16) величину

$$\sum_{a_1, a_2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \{\widetilde{D}_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \widetilde{D}_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R)\}\, d\vec{R}.$$

В подынтегральное выражение входит быстро убывающая при $|\vec{R}| \to \infty$ величина $\frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha}$ и функция $\widetilde{D}_{a_1 a_2}(\tau, \xi, R)$ с точностью до μ четная по $\vec{R}$. Тогда, проводя в соответствии с (13) разложение по степеням $\mu\vec{R}$, получим

$$\sum_{a_1, a_2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \{\widetilde{D}_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \widetilde{D}_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R)\}\, d\vec{R} =$$

$$= -\mu \sum_{a_1, a_2} \sum_{\beta} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} R^\beta \frac{\partial \widetilde{D}_{a_2 a_1}}{\partial \xi^\beta} d\vec{R} + 0(\mu^3).$$

Точно также будем иметь

$$\sum_{a_1, a_2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \left\{ \frac{1}{m_{a_1}} \widetilde{G}^\alpha_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \right.$$

$$+\frac{1}{m_{a_2}}\widetilde{G}^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi-\mu R, R)\Big\} d\vec{R} = -$$

$$\mu\sum_{a_1, a_2}\frac{1}{m_{a_2}}\sum_{\beta}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}R^{\beta}\frac{\partial\widetilde{G}^{\alpha}_{a_2a_1}}{\partial\xi^{\beta}}d\vec{R}+$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\sum_{a_1,a_2}\frac{1}{m_{a_2}}\sum_{\beta,\gamma}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}R^{\beta}R^{\gamma}\frac{\partial^2\widetilde{G}^{\alpha}_{a_2a_1}}{\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}}d\vec{R}+0(\mu^3).$$

Подставляя полученные разложения в (15) и (16) и отбрасывая члены порядка μ и выше, найдем

$$\frac{\partial\widetilde{n}_{a_1}}{\partial\tau}=-\sum_{\alpha}\frac{\partial(\widetilde{n}_{a_1}\widetilde{V}^{\alpha})}{\partial\xi^{\alpha}}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{\rho}\,\widetilde{V}^{\alpha})}{\partial\tau}=-\sum_{a_1}\frac{\partial\widetilde{U}_{a_1}}{\partial\xi^{\alpha}}\widetilde{n}_{a_1}+\sum_{\beta}\frac{\partial\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\beta}},$$

где

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}=-\sum_{a_1}\frac{1}{m_{a_1}v_{a_1}}\int p^{\alpha}p^{\beta}F_{a_1}d\vec{p}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{a_1,a_2}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}R^{\beta}\widetilde{D}_{a_2a_1}(\tau,\xi,R)\,d\vec{R} \tag{18}$$

и

$$\frac{\partial(\widetilde{n}\,\widetilde{\varepsilon})}{\partial\tau}=-\sum_{a_1}\sum_{\alpha}\frac{1}{m_{a_1}v_{a_1}}\frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}}\int\frac{|p-m_{a_1}\widetilde{V}|^2}{2m_{a_1}}p^{\alpha}F_{a_1}d\vec{p}-$$

$$-\sum_{a_1}\frac{1}{m_{a_1}v_{a_1}}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\widetilde{V}^{\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}\int(p^{\alpha}-m_{a_1}\widetilde{V}^{\alpha})(p^{\beta}-m_{a_1}\widetilde{V}^{\beta})\times$$

$$\times F_{a_1}d\vec{p}+\frac{1}{2}\sum_{a_1a_2}\frac{1}{m_{a_2}}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\widetilde{V}^{\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}\int(p^{\alpha}-m_{a_1}\widetilde{V}^{\alpha})\times$$

$$\times(p^{\alpha}-m_{a_1}\widetilde{V}^{\beta})F_{a_1}d\vec{p}+\frac{1}{2}\sum_{a_1a_2}\frac{1}{m_{a_2}}\sum_{\alpha,\beta}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}\times$$

$$\times R^{\beta}\frac{\partial^{(0)}\widetilde{G}^{\alpha}_{a_2a_1}}{\partial\xi^{\beta}}d\vec{R}-\frac{1}{2}\sum_{a_1,a_2}\sum_{\alpha,\beta}\widetilde{V}^{\alpha}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}R^{\beta}\frac{\partial\widetilde{D}^{(0)}_{a_2a_1}}{\partial\xi^{\beta}}d\vec{R}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{a_1,a_2}\frac{1}{m_{a_1}}\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}}\int\Phi^{(0)}_{a_1a_2}\widetilde{G}^{\alpha}_{a_1a_2}d\vec{R}. \tag{19}$$

Заметим, что разложения по μ диффузионных потоков (6) не содержат нулевых членов, так как в противном случае в состоянии статистического равновесия имели бы место диссипативные процессы диффузии.

Произведем в (19) и (18) замену $\vec{p}\to\vec{p}-m_a\vec{V}$. Поскольку в состоянии статистического равновесия функция распределения является четной функцией импульса, а средние рассматриваемого типа должны быть инвариантны относительно замены $\vec{R} \to -\vec{R}$ и так как в равновесном случае:

$$^{(0)}\widetilde{G}^{\alpha}_{a_1a_2}(\tau, \xi, R) = m_{a_1}\widetilde{V}^{\alpha}\widetilde{D}^{(0)}_{a_1a_2}(R \mid \ldots \widetilde{n}_{a_i} \ldots \widetilde{\theta}),$$

то (19) и (18) примут вид

$$\frac{\partial(\widetilde{\rho}\,\widetilde{V}^{\alpha})}{\partial\tau} = -\sum_{a_1}\frac{\partial\widetilde{U}_{a_1}}{\partial\xi^{\alpha}}\widetilde{n}_{a_1} + \sum_{\beta}\frac{\partial\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\beta}},$$

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta} = -\widetilde{\rho}\,\widetilde{V}^{\alpha}\widetilde{V}^{\beta} - \sum_{a_1}\frac{1}{m_{a_1}v_{a_1}}\int(p^{\alpha} -$$

$$-m_{a_1}\widetilde{V}^{\alpha})(p^{\beta} - m_{a_1}\widetilde{V}^{\beta})F_{a_1}d\vec{p} + \frac{1}{2}\sum_{a_1, a_2}\int\frac{\partial\Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}}R^{\beta}\widetilde{D}^{(0)}_{a_1a_2}d\vec{R} =$$

$$= \widetilde{\rho}\,\widetilde{V}^{\alpha}\widetilde{V}^{\beta} - \delta_{\alpha\beta}P(\ldots \widetilde{n}_{a_i} \ldots, \widetilde{\theta}), \qquad (20)$$

$$\frac{\partial(\widetilde{n}\,\widetilde{\varepsilon})}{\partial\tau} = -\sum_{\alpha}\frac{\partial(\widetilde{n}\,\widetilde{\varepsilon}\,\widetilde{V}^{a})}{\partial\xi^{a}} - P(\ldots \widetilde{n_{a_1}} \ldots, \widetilde{\theta})\sum_{\alpha}\frac{\partial\widetilde{V}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}. \qquad (21)$$

Нетрудно показать, что $P(\ldots \widetilde{n}_{al} \ldots, \widetilde{\theta})$ является обычным термодинамическим давлением. Для этого надо убедиться в справедливости соотношения:

$$P = -\frac{\partial(NF)}{\partial V} = -\frac{1}{V}\frac{\partial(NF)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=1} = -\frac{1}{V}\left\langle \frac{\partial H\lambda}{\partial\lambda}\bigg|^{\cdot}_{\lambda=1}\right\rangle,$$

где F — свободная энергия на одну частицу, λ — параметр одномерного «расширения» системы ($q^{\alpha} \to \lambda q^{\alpha}$, $q^{\beta} \to q^{\beta}$ при $\alpha \neq \beta$), скобки означают каноническое усреднение по «нерастянутому» фазовому пространству. Тогда соответствующий гамильтониан будет иметь вид

$$H_{\lambda} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_{a_i}}\left[\frac{(p_i^{\alpha})^2}{\lambda^2} + \sum_{\alpha\neq\beta}(p_i^{\beta})^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{i, j}\Phi_{a_ia_j}(|r_i - r_j|)$$

и после несложных вычислений получим

$$P(\ldots \widetilde{n}_{a_i} \ldots \widetilde{\theta}) = \widetilde{\theta}\,\widetilde{n} - \frac{2\pi}{3}\sum_{a_1,a_2}\widetilde{n}_{a_1}\widetilde{n}_{a_2}\int\Phi'_{a_1a_2}g_{a_1a_2} \times$$

$$\times(|R|, \ldots \widetilde{n}_{a_i} \ldots, \theta)R^3\,dR, \qquad (22)$$

где $g_{a_1a_2}$ — двухчастичная корреляционная функция. Это хорошо известное уравнение состояния.

Нетрудно свести (21) к уравнению для энтропии. Для этого удобно вместо переменных $\widetilde{n}_{a_i}(\tau, \xi)$ в качестве новых переменных взять полное число частиц в единице объема $\widetilde{n}(\tau, \xi)$ и концентрации $C_{a_i}\left(C_{a_i} = \frac{n_{a_i}}{n}\right)$. Поскольку в принятом приближении диффузия отсутствует, то при движении элемента объема его состав не меняется, т. е. концентрации остаются постоянными параметрами и мы их не будем выписывать. Тогда можно написать

$$d\varepsilon(n, \theta) = \theta\, ds + \frac{P}{n^2}\, dn, \quad \varepsilon(n, \theta) = F(n, \theta) - \theta \frac{\partial F}{\partial \theta}, \tag{23}$$

где $s = -\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$.

Уравнение (21) с помощью (17) можно привести к виду

$$\tilde{n} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} + \sum_{\alpha} \tilde{V}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \xi^{\alpha}} \right) + \left(P - \tilde{n}^2 \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{n}} \right) \sum_{\alpha} \frac{\partial \tilde{V}^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} = 0. \tag{24}$$

Из (23) следует, что $\dfrac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{\theta}} = \tilde{\theta} \dfrac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\theta}}$ и $\dfrac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{n}} = \tilde{\theta} \dfrac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{n}} + \dfrac{P}{\tilde{n}^2}$, и, пользуясь опять (17), получим

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} + \sum_{\alpha} \tilde{V}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \xi^{\alpha}} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{n}} \left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tau} + \sum_{\alpha} \tilde{V}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \xi^{\alpha}} \right) = 0$$

или

$$\frac{d\tilde{s}}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} + \sum_{\alpha} \tilde{V}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi^{\alpha}} = 0. \tag{25}$$

Вернувшись в уравнениях (17), (20) и (25) к переменным t и $\vec{q}$, получим совместно с (22) хорошо известную систему гидродинамических уравнений идеальной жидкости.

В заключение автор выражает искреннюю признательность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе, а также И. А. Квасникову и В. Д. Кукину за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. «Зб. праць Ин-ту мат.», № 10, 1948.
2. Irving, Kirkwood J. Chem. Phys., 18, 817, 1950.
3. Гуров К. П. ЖЭТФ, 18, 110, 1948.
4. Боголюбов Н. Н. Препринт Р-1395, Дубна, ОИЯИ, 1963.
5. Bearman, Kirkwood J. Chem. Phys., 28, 136, 1958.
6. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., Гостехиздат, 1964.

Поступила в редакцию
6. 1 1965 г.

Кафедра
теоретической физики