

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1966

УДК 548.0 : 535

А. П. СУХОРУКОВ, Р. В. ХОХЛОВ

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИФРАКЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Методом медленно меняющихся амплитуд выведено параболическое уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды почти плоской необыкновенной волны, распространяющейся в анизотропном кристалле. На основе этого уравнения рассмотрены дифракция плоской волны на щели и дифракция в фокусе слабо сходящейся цилиндрической волны.

Введение

Явление дифракции в анизотропной среде представляет значительный интерес в кристаллооптике. При описании этого явления строгими методами встречаются те же трудности, что и в изотропной среде, но они усложняются тензорным характером диэлектрической проницаемости. Поэтому большое значение приобретает разработка приближенных методов теории дифракции в анизотропной среде. В данной работе описано распространение метода медленно меняющихся амплитуд на описание явления дифракции в анизотропных средах. В изотропной среде этим методом получено параболическое уравнение для амплитуды волнового поля в лучевых координатах, на основе которого решен ряд задач [1—2] и др. Интерес к методу медленно меняющихся амплитуд связан с возможностью его обобщения для исследования дифракции в нелинейной оптике. В последнем случае нельзя применить методы Френеля, Кирхгофа и другие, основанные на принципе суперпозиции, который в нелинейной среде не выполняется. Метод медленно меняющихся амплитуд, как и всякий приближенный метод, описывает дифракцию с определенной степенью точности. Поэтому в данной работе выясняется, какие дифракционные эффекты в анизотропной среде описываются приближенным укороченным уравнением.

В настоящей статье рассматривается двумерная дифракция электромагнитных волн в линейной анизотропной среде, в качестве которой взят одноосный кристалл. В анизотропной среде распространяется необыкновенная волна, которую можно представить как почти плоскую с амплитудой медленно меняющейся в пространстве. На основе полученного укороченного параболического уравнения рассмотрена дифракция плоской волны на щели и дифракция в фокусе сходящейся цилиндрической волны.

Вывод укороченного параболического уравнения для анизотропной среды

Выведем укороченное уравнение для случая, когда в анизотропной среде распространяется приблизительно плоская необыкновенная волна. В первом приближении лучи можно считать прямыми и укороченное уравнение имеет наиболее простой вид. В более общих случаях укороченное уравнение целесообразно записывать в криволинейных лучевых координатах подобно тому, как это делается в изотропной среде.

Процесс распространения электромагнитных волн в анизотропной среде описывается волновым уравнением

$$[\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{E}]] + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $\hat{\epsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости.

При отсутствии дифракции в среде распространялась бы гармоническая плоская необыкновенная волна

$$\vec{E} = \vec{e} A_0 \exp \{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})\}. \quad (2)$$

Здесь \vec{e} — единичный вектор поляризации необыкновенной волны, соответствующий волновому вектору \vec{k} , но, так как волна «собственная», то

$$[\vec{k} [\vec{k} \vec{e}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{e} = 0. \quad (3)$$

В случае относительно малых отклонений в распространении волн от законов геометрической оптики, волна при дифракции остается приблизительно плоской. Поэтому в качестве решения уравнения (1) можно взять волну типа (2), а наличие дифракции учесть слабой зависимостью амплитуды от координат, так что

$$\vec{E} = \vec{A}(\vec{r}) \exp \{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})\}. \quad (4)$$

Подставляя решение (4) в (1), получаем для \vec{A} уравнение

$$[\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{A}]] + i [\vec{k} [\vec{\nabla} \vec{A}]] + i [\vec{\nabla} [\vec{k} \vec{A}]] + [\vec{k} [\vec{k} \vec{A}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{A} = 0 \quad (5)$$

и уравнение

$$\vec{\nabla} \hat{\epsilon} \vec{A} = i \vec{k} \hat{\epsilon} \vec{A}. \quad (6)$$

Применим к уравнениям (5) и (6) метод медленно меняющихся амплитуд. Чтобы получить укороченное уравнение, сначала необходимо производным по координатам приписать определенный порядок малости, после чего в точном уравнении оставить величины одного порядка.

В области перехода от света к тени, где происходит эффективная «диффузия», амплитуда \vec{A} изменяется более медленно вдоль луча, чем перпендикулярно ему. Благодаря этому производные вдоль и поперек луча имеют разный порядок малости, а именно:

$$\vec{\nabla} = \mu s \vec{\nabla}_s + \sqrt{\mu} \vec{e} \vec{\nabla}_e. \quad (7)$$

Здесь μ — малый параметр, характеризующий медленность изменения амплитуды в пространстве, \vec{s} — единичный вектор вдоль луча, $\vec{s} \perp \vec{e}$; $\nabla_{\vec{s}}$ и $\nabla_{\vec{e}}$ обозначают производные вдоль и поперек луча соответственно.

В соотношении (7) принято, что векторы \vec{s} и \vec{e} лежат в плоскости изменения амплитуды.

В силу (6) и (7) разный порядок малости имеют и компоненты вектора \vec{A} . Он в основном сохраняет свое положение в пространстве как вектор \vec{e} , но за счет дифракции у него появляется компонент $A_{\vec{s}}$ вдоль \vec{s} порядка $\sqrt{\mu}$, т. е.

$$\vec{A} = \vec{e}A_{\vec{e}} + \sqrt{\mu}\vec{s}A_{\vec{s}}. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнения (5) и (6), находим два уравнения для $A_{\vec{e}}$ и $A_{\vec{s}}$:

$$\mu^2 \nabla_{\vec{s}}^2 A_{\vec{e}} - \mu^2 \nabla_{\vec{e}} \nabla_{\vec{s}} A_{\vec{s}} + i\mu (\vec{k}\vec{s}) \nabla_{\vec{e}} A_{\vec{s}} - 2i\mu (\vec{k}\vec{s}) \nabla_{\vec{s}} A_{\vec{e}} + i\mu^{\frac{3}{2}} (\vec{k}\vec{e}) \nabla_{\vec{s}} A_{\vec{s}} = 0, \quad (9)$$

$$\mu^{\frac{1}{2}} \vec{e}\vec{e}\vec{e} \nabla_{\vec{e}} A_{\vec{e}} + \mu \vec{e}\vec{e}\vec{s} \nabla_{\vec{e}} A_{\vec{s}} + \mu \vec{s}\vec{e}\vec{e} \nabla_{\vec{s}} A_{\vec{e}} + \mu^{\frac{3}{2}} \vec{s}\vec{e}\vec{s} \nabla_{\vec{s}} A_{\vec{s}} = i\mu^{\frac{1}{2}} \vec{k}\vec{e}\vec{s} A_{\vec{s}}. \quad (10)$$

Оставляя в уравнении (9) члены порядка μ , а в уравнении (10) члены порядка $\mu^{\frac{1}{2}}$, получаем укороченное уравнение параболического типа для $A_{\vec{e}}$

$$\nabla_{\vec{s}} A_{\vec{e}} = \frac{1}{2ik_{\text{эф}}} \nabla_{\vec{e}}^2 A_{\vec{e}}, \quad (11)$$

решив которое можно найти $A_{\vec{s}}$ по формуле

$$A_{\vec{s}} = \frac{1}{ik_{\text{эф}}} \nabla_{\vec{e}} A_{\vec{e}}. \quad (12)$$

Здесь введено обозначение

$$k_{\text{эф}} = \frac{\vec{k}\vec{e}\vec{s}}{\vec{e}\vec{e}\vec{e}}. \quad (13)$$

Для одноосного кристалла

$$k_{\text{эф}} = \frac{k_{\vec{e}}^2}{(ks)}, \quad (14)$$

где $\vec{k}_{\vec{e}}$ — волновой вектор необыкновенной волны, распространяющейся вдоль направления вектора \vec{e} .

Уравнение (11) является обобщением на анизотропную среду параболического уравнения Леонтовича—Фока, которое для волны, распространяющейся в изотропной среде, имеет вид

$$\nabla_{\vec{k}} A_{\vec{e}} = \frac{1}{2ik} \nabla_{\vec{e}}^2 A_{\vec{e}}, \quad (15)$$

где $\nabla_{\vec{k}}$ обозначает производную вдоль луча, который в изотропной среде совпадает с волновым вектором \vec{k} .

Коэффициент диффузии параболического уравнения для анизотропной среды (11), как видно из (13), зависит от направления распространения относительно осей эллипсоида $\hat{\epsilon}$. Вместе с тем уравнение (11) симметрично для поперечной координаты, хотя в общем случае должна быть асимметрия дифракционной картины за счет несимметричных свойств анизотропной среды относительно вектора \vec{k} . Это легко понять, если учесть, что поверхность волновых векторов необыкновенной волны является эллипсоидом. Из уравнений (9) и (10) видно, что все члены, описывающие такую асимметрию, имеют порядок малости $\mu^{\frac{3}{2}}$ и выше и поэтому не учтены в укороченном уравнении.

Чтобы более ясно представить характер приближений, сделанных при выводе укороченных уравнений (11) и (14), сравним поведение волнового вектора \vec{q} пространственного Фурье-компонента $A_{\vec{e}\vec{q}}^{\vec{s}} = \exp(-i\vec{q}\vec{r})$, описываемое точным уравнением (5) и укороченными уравнениями (11) и (14).

Составляющая поля $A_{\vec{s}\vec{q}}^{\vec{s}}$ определяется формулой (12) и равна

$$A_{\vec{s}\vec{q}}^{\vec{s}} = -\frac{q_{\vec{e}}}{k_{\text{эф}}} \vec{s} \exp(-i\vec{q}\vec{r}). \quad (16)$$

Фурье-компонент напряженности выражается следующим образом:

$$\vec{E}_{\vec{q}} = \left(\vec{e} - \frac{q_{\vec{e}}}{k_{\text{эф}}} \vec{s} \right) \exp(-i\vec{q}\vec{r}). \quad (17)$$

Укороченное уравнение (11) выведено при условии $A_{\vec{s}\vec{q}}^{\vec{s}} = \sqrt{\mu} A_{\vec{e}\vec{q}}^{\vec{s}}$. Поэтому необходимо, чтобы $q_{\vec{e}} = \sqrt{\mu} k_{\text{эф}}$ или просто $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$.

Рассмотрим сначала изотропную среду. Точное уравнение (5) дает для \vec{q} уравнение окружности

$$2kq_{\vec{k}} + q_{\vec{k}}^2 + q_{\vec{e}}^2 = 0, \quad (18)$$

а из укороченного уравнения (15) имеем уравнение параболы (рис. 1, а)

$$2kq_{\vec{k}} + q_{\vec{e}}^2 = 0. \quad (19)$$

В точке $\vec{q} = 0$ парабола и окружность имеют второй порядок касания, т. е. у них радиус кривизны одинаков и равен k . При $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$ кривые мало отличаются друг от друга.

В случае анизотропной среды уравнение (5) дает для \vec{q} необыкновенной волны уравнение сечения поверхности волновых векторов плоскостью \vec{e}, \vec{s} в виде эллипса

$$2\hat{k}\hat{\epsilon}sq_{\vec{s}} + \vec{s}\hat{\epsilon}sq_{\vec{s}}^2 + 2\hat{e}\hat{\epsilon}sq_{\vec{e}}q_{\vec{s}} + \hat{e}\hat{\epsilon}eq_{\vec{e}}^2 = 0, \quad (20)$$

а укороченное уравнение (11) — уравнение параболы (рис. 1, б)

$$2\vec{k}\hat{\varepsilon}\vec{s}q_s + \vec{e}\hat{\varepsilon}\vec{e}q_e^2 = 0. \quad (21)$$

Эллипс и парабола в точке $\vec{q}=0$ также имеют второй порядок касания.

Если $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$, то кривые слабо отличаются друг от друга.

Обобщая сказанное, можно сделать вывод, что при переходе от волнового уравнения (1) к укороченному параболическому уравнению (11) или (15) сечение поверхности волновых векторов в плоскости \vec{e} , \vec{s} заменяется параболой, которая в точке, соответствующей волновому вектору \vec{k} плоской волны, имеет второй порядок касания с указанной поверхностью. Так как дифракция предполагается слабой и интересны лишь малые углы ($|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$), то такая замена оправдана.

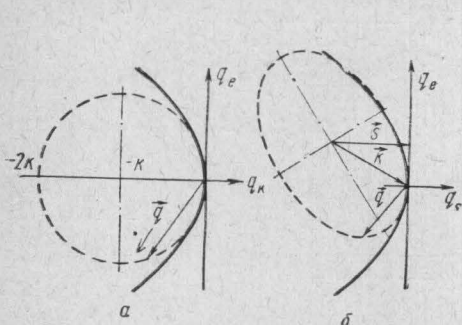


Рис. 1. Графики сечений поверхностей волновых векторов в лучевых координатах: а — изотропная среда, б — анизотропная среда, необыкновенная волна. Сплошные кривые (параболы) соответствуют укороченным уравнениям, пунктирные — волновому уравнению

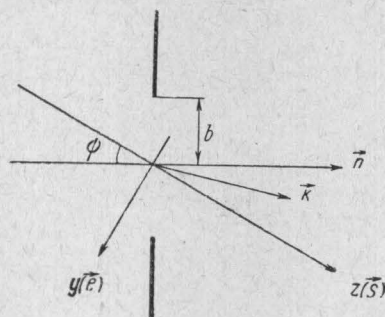


Рис. 2. Лучевые координаты y , z , вводимые для описания дифракции плоской необыкновенной волны на щели шириной $2b$; \vec{n} — нормаль к плоскости экрана

Дифракция плоской волны на щели

На основе полученного параболического уравнения (11) можно исследовать дифракцию на щели. Пусть на плоский сильно проводящий экран со щелью шириной $2b$ падает необыкновенная плоская волна $\vec{E} = \vec{e}A_0 \exp(-i\vec{k}r)$, причем луч составляет с нормалью к экрану угол ψ (рис. 2). Комплексная амплитуда прошедшей волны A_e удовлетворяет «укороченному» уравнению

$$\frac{\partial A_e}{\partial z} = \frac{1}{2ik_{z\phi}} \frac{\partial^2 A_e}{\partial y^2} \quad (22)$$

и приближенному граничному условию

$$A_e|_{z=y \tan \psi} = \begin{cases} A_0 & \text{при } |y| < b \cos \psi \\ 0 & \text{при } |y| > b \cos \psi \end{cases} \quad (23)$$

Такое же граничное условие имеет место, если экран расположить на границе раздела между изотропной и анизотропной средами. Более того, если вся среда изотропная, граничное условие остается тем же самым (только луч \vec{s} параллелен \vec{k}), а в укороченном уравнении (22)

$k_{\text{эф}} = k$. Так что амплитудные зависимости от координат в данном приближении имеют одинаковый характер для изотропной и анизотропной сред.

Решением поставленной задачи является

$$A_e = \frac{1+i}{2} A_0 \left[\int_{(-y+b\cos\psi)}^{(-y+b\cos\psi)} \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)}}}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau - \right. \\ \left. - \exp\{-2ik_{\text{эф}}(y-z\text{ctg}\psi)\text{ctg}\psi\} \int_{(y-b\cos\psi-2z\text{ctg}\psi)}^{(y+b\cos\psi-2z\text{ctg}\psi)} \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)}}}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)} \exp\left\{-i \frac{\pi}{2} \tau^2\right\} d\tau \right],$$

при $z > b \sin \psi$,

$$A_e = \frac{1+i}{2} A_0 \left[\int_{(-y-b\cos\psi)}^{\infty \cdot \text{sign}(-y+b\cos\psi)} \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)}}}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau - \right. \\ \left. - \exp\{-2ik_{\text{эф}}(y-z\text{ctg}\psi)\text{ctg}\psi\} \int_{(y-b\cos\psi-2z\text{ctg}\psi)}^{\infty \cdot \text{sign}(y+b\cos\psi-2z\text{ctg}\psi)} \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)}}}{\lambda_{\text{эф}}(z+b\sin\psi)} \exp\left\{-i \frac{\pi}{2} \tau^2\right\} d\tau \right].$$

$$A_e = 0 \quad \text{при } z < -b \sin \psi \quad \text{при } |z| < b \sin \psi. \quad (24)$$

Для изотропной среды такое решение получается в теории дифракции Френеля. Оно полностью исследовано в хорошо известных классических работах, и поэтому мы не будем подробно заниматься анализом его свойств.

Хотя амплитудные кривые при дифракции в анизотропной среде подобны амплитудным кривым в изотропной среде, между волновыми поверхностями есть различие. Уравнение волновой поверхности определяется из постоянства фазы $\vec{E} = \vec{A} \exp(-i\vec{k}r)$. При этом медленные изменения фазы \vec{E} за счет изменения \vec{A} имеют одинаковый характер в обеих средах (если лучи параллельны), а быстрые изменения фазы за счет экспоненты не одинаковы, так как \vec{s} и \vec{k} в анизотропной среде не параллельны. Поэтому в целом фаза \vec{E} , а следовательно, и положение волновых поверхностей по-разному зависят от координат z и y .

В качестве иллюстрации дифракции на щели в анизотропной среде рассмотрим два примера. На рис. 3 и 4 изображены амплитудные кривые для A_e и волновые поверхности на разных расстояниях от щели,

когда $b=5\lambda$, угол анизотропии $\alpha=15^\circ$ и $k_{\text{эф}}=k$. В первом случае (рис. 3) к плоскости экрана перпендикулярен луч \vec{s} . Амплитудные кривые симметричны относительно оси пучка, а волновая поверхность несимметрична, причем при малых углах дифракции волну можно считать приблизительно плоской. Пунктиром обозначены амплитудные зависимости согласно геометрической оптике. Около каждой волновой поверхности

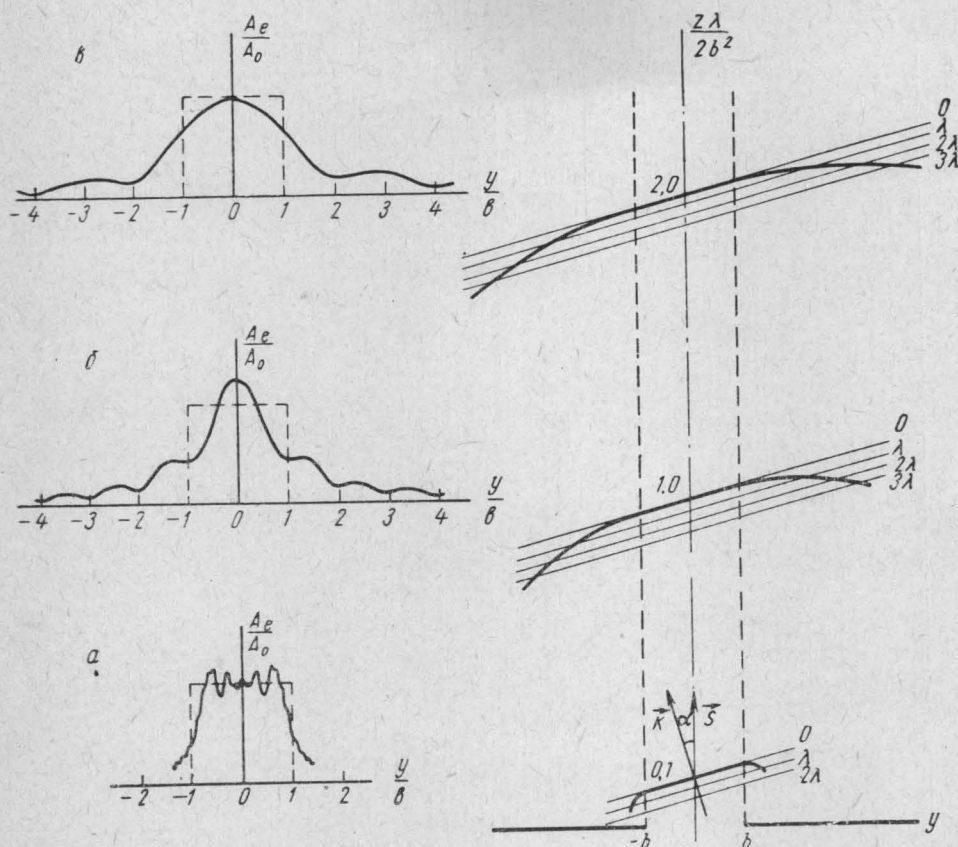


Рис. 3. Графики зависимости амплитуды A_e от y и сечения волновых поверхностей при дифракции плоской необыкновенной волны на щели, когда луч \vec{s} перпендикулярен к плоскости экрана: а — на расстоянии $z = \frac{0,2b^2}{\lambda}$, б — $z = \frac{2b^2}{\lambda}$, в — $z = \frac{4b^2}{\lambda}$; пунктирными линиями обозначены амплитудные зависимости согласно геометрической оптике, угол анизотропии $\sigma=15^\circ$, $b=5\lambda$, $k_{\text{эф}}=k$

(вернее ее следа) проведен ряд волновых фронтов плоской волны $\exp(-ikr)$, отстоящих друг от друга на расстоянии λ . Они наглядно показывают, в какой мере волна отличается от плоской. Во втором случае (рис. 4) к плоскости экрана нормален волновой вектор \vec{k} . Здесь имеется асимметрия амплитудных кривых, вследствие того, что дифракция от одного края щели начинается раньше, чем от другого края щели. По мере увеличения z эта асимметрия уменьшается и при $z \gg b \sin \alpha$ дифракция происходит так же, как в первом случае, только ширина щели равна $2b \cos \alpha$.

В заключение остановимся на следующем вопросе. Зная выражение для составляющей $A_{\rightarrow e}$ прошедшей волны, можно найти составляющую $A_{\rightarrow s}$ по формуле

$$A_{\rightarrow s} = \frac{1}{ik_{\text{эф}}} \frac{\partial A_{\rightarrow e}}{\partial y}. \quad (25)$$

Например, в первом случае, когда $\psi=0$,

$$A_{\rightarrow s} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{\text{эф}}}{z}} \sin \frac{k_{\text{эф}} y b}{z} \exp \left\{ -i \frac{k_{\text{эф}}}{2} (y^2 + b^2) + i \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (26)$$

На расстояниях z порядка λ амплитуда $A_{\rightarrow s}$ и, следовательно, $\frac{\partial A_{\rightarrow e}}{\partial y}$ перестают быть порядка $\sqrt{\mu}$, как это предполагалось при выводе 'укоро-

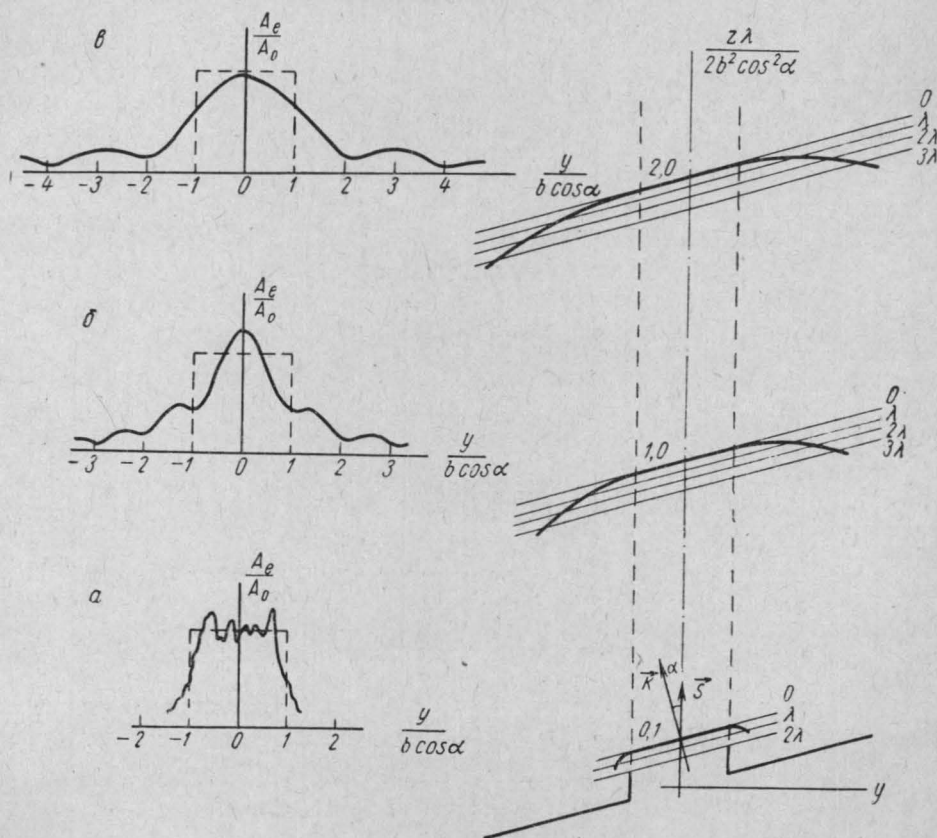


Рис. 4. Дифракция плоской необыкновенной волны на щели, когда волновой вектор \vec{k} перпендикулярен к плоскости щели; все обозначения аналогичны обозначениям рис. 3

ченного уравнения (11). Следовательно, в этой области параболическое уравнение не правильно описывает дифракцию и необходимо пользоваться точным уравнением (5). Это объясняется тем, что граничное условие для $A_{\rightarrow e}$ — разрывная функция (23) и волна вблизи от геометрической тени на малых расстояниях z от щели — не является локально

плоской с медленно меняющейся амплитудой. Чтобы укороченное уравнение хорошо описывало дифракцию во всей области (конечно при малых углах дифракции), граничное условие должно быть достаточно гладким. Вследствие диффузии амплитуды в область тени ее резкая граница размывается, волна становится локально-плоской, амплитуда волны медленно меняется от координат и укороченное уравнение достаточно хорошо описывает дифракцию при $z \gg \lambda$. На практике укороченным уравнением пользуются при всех z . Ошибки, возникающие из-за этого, малы, так как область, где укороченное уравнение не справедливо, порядка λ и амплитуда не успевает намного измениться. Все же это обстоятельство является одной из причин не достаточно хорошего совпадения эксперимента и френелевской теории, особенно при малых z .

Дифракция в фокусе

Слабо сходящуюся цилиндрическую волну можно рассматривать как приблизительно плоскую волну и, следовательно, анализ дифракций такой волны можно провести на основе укороченного уравнения. Цилиндрическая волна падает из бесконечности на плоскую границу раздела между изотропной и анизотропной средами, причем фокус волны расположен в анизотропной среде (рис. 5). Если угол схождения лучей мал ($\alpha_0 \sim \sqrt{\mu}$), то дебаевское представление слабо сходящейся цилиндрической волны имеет вид

$$E_{e0} \rightarrow = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp \left\{ -ik_0 y_0 \alpha + ik_0 (z_0 - R) \frac{\alpha^2}{2} \right\} d\alpha \exp \{ -ik_0 z_0 \} \quad (27)$$

Такую волну можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся с волновым вектором k_0 вдоль оси z_0 , с медленно меняющейся амплитудой

$$A_{e0} \rightarrow = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp \left\{ -ik_0 y_0 \alpha + ik_0 (z_0 - R) \frac{\alpha^2}{2} \right\} d\alpha, \quad (28)$$

которая удовлетворяет в изотропной среде I параболическому уравнению

$$\frac{\partial A_{e0} \rightarrow}{\partial z_0} = \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2 A_{e0} \rightarrow}{\partial y_0^2}. \quad (29)$$

Анизотропная среда II расположена таким образом, чтобы в ней возбуждалась в основном только необыкновенная волна. После преломления волна распространяется в анизотропной среде как плоская волна с волновым вектором \vec{k}_1 ,

$$k_0 \sin \varphi_0 = k_1 \sin \varphi_1, \quad (30)$$

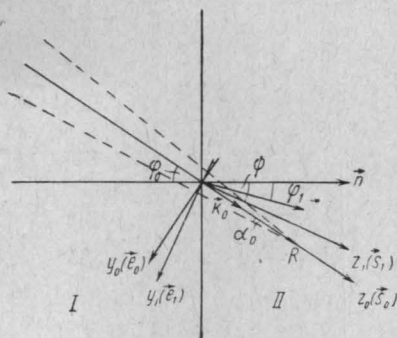


Рис. 5. Лучевые координаты, вводимые для описания дифракции цилиндрической сходящейся волны с помощью укороченных уравнений: y_0, z_0 — координаты в изотропной среде I, y_1, z_1 — в анизотропной среде II; \vec{n} — нормаль к плоской границе раздела двух сред; α_0 — угол схождения лучей

амплитуда которой медленно меняется:

$$E_{e1} \rightarrow = A_{e1} \rightarrow \exp(-ik_1 z_1). \quad (31)$$

Единичный лучевой вектор \vec{s}_1 необыкновенной волны не совпадает с \vec{k}_1 и составляет с нормалью к плоскости раздела n угол ψ .

Амплитуду $A_{e1} \rightarrow$ можно найти, решив параболическое уравнение для анизотропной среды

$$\frac{\partial A_{e1} \rightarrow}{\partial z_1} = \frac{1}{2ik_{\text{эф}}} \frac{\partial^2 A_{e1} \rightarrow}{\partial y_1^2} \quad (32)$$

с приближенным граничным условием

$$A_{e1} \rightarrow = A_{e0} \rightarrow \quad \text{при} \quad z_1 = y_1 \operatorname{tg} \psi. \quad (33)$$

С учетом выражения (28) граничное условие имеет вид

$$A_{e1} \rightarrow = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp \left\{ -ik_0 y_1 \left(\alpha \cos \delta + \frac{\alpha^2}{2} \sin \delta \right) - \right. \\ \left. - ik_0 y_1 \left(\alpha \sin \delta - \frac{\alpha^2}{2} \cos \delta \right) \operatorname{tg} \psi - ik_0 R \frac{\alpha^2}{2} \right\} d\alpha, \quad (34)$$

где $\delta = \psi - \varphi_0$ угол между векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_0 .

Решением уравнения (32) с условием (34) является

$$A_{e1} \rightarrow = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp \left\{ -ik_0 y_1 \left(\alpha \cos \delta + \frac{\alpha^2}{2} \sin \delta \right) - \right. \\ \left. - ik_0 z_1 \left(\alpha \sin \delta - \frac{\alpha^2}{2} \cos \delta \right) - ik_0 R \frac{\alpha^2}{2} - ik_0 (z_1 - y_1 \operatorname{tg} \psi) f(\alpha) \right\} d\alpha, \quad (35)$$

$$f(\alpha) = \operatorname{ctg}^2 \psi \left[\alpha \cos \delta \operatorname{tg} \psi + \frac{\alpha^2}{2} \sin \delta \operatorname{tg} \psi - \frac{k_{\text{эф}}}{k_0} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}^2}{k_0^2} - 2\alpha \frac{k_{\text{эф}} \cos \varphi_0}{k_0 \cos \psi} \operatorname{tg} \psi + \alpha^2 \frac{k_{\text{эф}} \sin \varphi_0}{k_0 \cos \psi} \operatorname{tg} \psi} \right]. \quad (36)$$

Разлагая функцию $f(\alpha)$ в ряд по степеням α до α^2 включительно, решение (35) можно приближенно записать, как

$$A_{e1} \rightarrow = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp \left\{ -ik_0 \left(a\alpha + b \frac{\alpha^2}{2} \right) \right\} d\alpha. \quad (37)$$

Коэффициенты разложения равны

$$a = y_1 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \psi}, \\ b = R - \frac{k_0 \cos^2 \varphi_0}{k_{\text{эф}} \cos^2 \psi} z_1 - \left(\frac{\sin \varphi_0}{\cos \psi} - \frac{k_0 \cos^2 \varphi_0}{k_{\text{эф}} \cos^2 \psi} \operatorname{tg} \psi \right) y_1. \quad (38)$$

В разложении $f(a)$ по a удержаны только члены с a и a^2 . Член с a^3 имеет порядок малости $\mu^{\frac{3}{2}}$ и его учёт не имеет смысла, так как укороченное уравнение написано с точностью до величин того же порядка малости $\mu^{\frac{3}{2}}$. Следовательно, параболическое уравнение не описывает аберрацию.

Координаты фокуса находятся из условий $a=0$, $b=0$ и равны

$$y_{1\phi} = 0, \quad z_{1\phi} = \frac{k_{\text{эф}} \cos^2 \psi}{k_0 \cos^2 \varphi_0} R. \quad (39)$$

Амплитуда в фокусе имеет конечную величину

$$A_{e1}^{\rightarrow} = 2\alpha_0. \quad (40)$$

В фокальной плоскости, уравнение которой определяется из условия $b=0$, распределение амплитуды имеет вид как при фраунгоферовской дифракции:

$$A_{e1}^{\rightarrow} = 2\alpha_0 \frac{\sin k_0 \alpha_0 a}{k_0 \alpha_0 a}. \quad (41)$$

Таким образом, в данном приближении слабо сходящаяся цилиндрическая волна в анизотропной среде ведет себя так же, как и в изотропной среде. Элементарная теория дифракции сходящейся волны в изотропной среде изложена в [3].

Итак, метод медленно меняющихся амплитуд позволяет описать различные дифракционные эффекты в анизотропной среде, определяемые слабой «диффузией» амплитуды почти плоской волны. К их числу относятся, например, переход от освещенной области к области тени, явление дифракции в фокусе сходящейся волны и т. п. При этом выявляется свойственная для анизотропной среды черта — асимметрия между амплитудными и фазовыми характеристиками распространения.

В то же время ряд эффектов, определяемых существенным отличием волны от плоской, не описывается параболическим уравнением. К их числу относятся всевозможные аберрации, явления вблизи краев экрана и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. «Изв. АН СССР», сер. физич., 8, 16, 1944; Леонтович М. А., Фок В. А. ЖЭТФ, 16, 557, 1946.
2. Малюжинец Г. Д. «Усп. физ. наук», 69, № 2, 321, 1959.
3. Зоммерфельд А. Оптика. М., ИЛ, 1953.

Поступила в редакцию
18. I 1965 г.

Кафедра
волновых процессов