Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1966

# ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 531.16

Л. Д. АКУЛЕНКО

## СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ВОЗМУЩЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1. **Постановка задачи.** Известно, что весьма широкий класс нелинейных автономных колебательных или вращательных систем с одной степенью свободы, подверженных возмущениям, может быть описан уравнениями (см. [1—7])

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(E;\ \psi;\ \varepsilon),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0(E) + \varepsilon F(E;\ \psi;\ \varepsilon), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $E$ — возмущенная «энергия», $\psi$ — возмущенная фаза, $\omega_0(E)$ — частота, а функции $f$ и $F$ периодичны по $\psi$ с периодом $2\pi$. В случае квазилинейных колебаний $\omega_0$ — постоянное число. При $\varepsilon = 0$ величина $E$ «сохраняется», а невозмущенная фаза $\psi_0 = \omega_0 t + \theta$ равномерно вращается.

Системы типа (1) исследовались многими авторами [1—7] с помощью метода усреднения [1, 5] на ограниченном промежутке времени $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Проблема обоснования на бесконечный промежуток времени вызывает большие трудности, особенно для случаев, когда некоторые корни характеристического уравнения для системы в вариациях при $\varepsilon = 0$ имеют модули, равные единице. Этот случай характерен для системы (1). В настоящей заметке построены для всех $t \in (-\infty, \infty)$ стационарные решения системы (1) и исследована его устойчивость.

§ 2. **Построение стационарного решения.** Если функции $f$, $\omega_0$, $F$ аналитичны по $\varepsilon$, $E$, $\psi$ в некоторой окрестности точки 0, $E_0$, $\psi_0 \in [0, 2\pi]$, то решение системы (1) можно искать разложением в степенные ряды по $\varepsilon$. Прямая подстановка рядов в уравнения (1) приводит к «секулярным членам» (см. [1, 8]), известным из небесной механики. Эта проблема может быть решена введением возмущенного времени $s$ таким образом, чтобы коэффициенты при $\varepsilon^n$ $(n \geqslant 1)$ имели период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ по $s$. В результате вместо (1) получим систему

$$\frac{dE}{ds} = \varepsilon(1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots) f(E,\ \psi;\ \varepsilon),$$
$$\frac{d\psi}{ds} = (1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots)[\omega_0(E) + \varepsilon F(E,\ \psi;\ \varepsilon)], \tag{2}$$

где $h_i$ — неизвестные постоянные, решение которой ищем в виде

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E_n,\ \psi = \omega_0(E_0)(s - s_0) + \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n.$$

Замечаем, что нулевое приближение остается прежним; причем в силу автономности (2) при $\omega_0 \neq 0$ можно положить $\psi_i|_{s=s_0} = 0\,(i \geqslant 0)$. Далее, из уравнений первого приближения имеем

$$E_1 = \int\limits_{s_0}^{s} f_0\,ds_1 + A_1;\ \psi_1 = \omega_0 h_1 (s - s_0) + A_1\omega_0' (s - s_0) + \int\limits_{s_0}^{s}\left(\int\limits_{s_0}^{s_1} f_0\,ds_2 + F_0\right) ds_1,$$

где $A_1$— постоянная интегрирования. Условие периодичности $E_1$ при $\omega_0(E_0) \neq 0$ определяет постоянную $E_0$

$$R\,(E_0) = \int\limits_{0}^{2\pi} f\,(E_0,\ \psi;\ 0)\,d\psi = 0. \tag{3}$$

Последнее соотношение означает требование отсутствия нулевой гармоники в разложении Фурье-функции $f_0$. Таким образом, если $E_0^*$ является вещественным корнем уравнения (3), то нулевое приближение стационарного решения полностью определено, если каким-либо образом известна величина возмущенной частоты. Условие периодичности $\psi_1$ дает необходимую связь между неизвестными $h_1$ и $A_1$ в виде

$$h_1 = -\frac{1}{\omega_0}(\omega_0' A_1 + B_1^*), \tag{4}$$

где

$$B_1^* = \frac{1}{T_0}\int\limits_{0}^{T_0}\left(\int\limits_{s_0}^{s} f_0\,ds_1 + F_0\right) ds$$

известная постоянная. Первое приближение $\psi$ оказывается полностью определенным в указанном смысле, а для $E$ из системы первого приближения определено лишь $E_0^*$. В методе усреднения (см. [1, 5]) и в неавтономном случае ситуация обратная.

Если $E_0^*$ является простым корнем (3), то все приближения определяются единственным образом. Из системы уравнений второго приближения прямым интегрированием по $s$ определяем $E_2$, условие периодичности которой определяет неизвестную $A_1$:

$$A_1^* = -\omega_0\left(\frac{dR}{dE_0^*}\right)^{-1}\int\limits_{0}^{T_0}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 \int\limits_{s_0}^{s} f_0\,ds_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)_0 \psi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0\right] ds, \tag{5}$$

а следовательно, и $h_1$ по формулам (4). В результате найдены возмущенная частота с точностью $\sim\varepsilon$, первое приближение $E$ и второе $\psi$. Для вычисления более высоких поправок поступаем аналогично. Выражения для последующих величин $Ai$ $(i \geqslant 2)$ будут иметь вид (5). Таким образом можно найти любое приближение $E$ и $\psi$ и определить возмущенную частоту $\omega$ с любой степенью точности по $\varepsilon$ для всех $t \in (-\infty, \infty)$ в известном смысле, если

$$\omega_0\,(E_0^*) \neq 0,\ \frac{dR}{dE_0^*} \neq 0. \tag{6}$$

Заметим, что стационарное решение системы (1) строится методом последовательных приближений [8] и в случае, когда $\omega_0$ обладает второй производной по $E$, удовлетворяющей условию Липшица в некоторой окрестности точки $E_0^*$, а $f$ и $F$ имеют первые частные производные по $\varepsilon$, $E$, $\psi$, удовлетворяющие условиям Липшица в окрестности 0, $E_0^*$, $\psi_0 \in [0, 2\pi]$. Доказательство сходимости последовательных приближений и единственности полученного решения можно свести к схеме, развитой в [8] для квазилинейных систем. Итак, результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1. Возмущенная система (1) имеет единственное стационарное решение при $\varepsilon$ достаточно малом, принадлежащее области определения функций $f$, $\omega_0$, $F$ и обращающееся в невозмущенное $E_0^*$, $\psi_0=\omega_0(t-t_0)$ при $\varepsilon=0$, если: а) функции $f$, $\omega_0$, $F$ достаточно гладки, б) имеют место соотношения (6).

Замечания к теореме 1. А. Единственность решения системы (1) понимается в том смысле, что каждому простому корню $E_0^*$ уравнения (3) соответствует однопараметрическое семейство решений вида

$$E = E_0^* + \varepsilon\Phi(t - t_0 + \tau,\ E_0^*;\ \varepsilon),$$

$$\psi = \omega(t - t_0 + \tau) + \varepsilon\Psi(t - t_0 + \tau,\ E_0^*,\ \varepsilon),$$

где $\tau$ — произвольная фазовая постоянная, а функции $\Phi$ и $\psi$ имеют период $T=\dfrac{2\pi}{\omega(E_0^*,\ \varepsilon)}$. Теорема предполагает, что таких изолированных корней может быть несколько, что практически встречается редко. Возможны также критические случаи. Б. $E_0^*$ — вещественный кратный корень уравнения (3) кратности $r<\infty$. Единственность решения в этом случае может нарушаться. Решение, вообще говоря, представляется рядом по дробным степеням $\varepsilon$. Общее исследование этого случая довольно сложно, однако предложенный метод последовательного определения поправок остается достаточно эффективным для практических вычислений. В. Если уравнение (3) удовлетворяется тождественно, то скажем, что имеют место движения (колебания или вращения) высших степеней. Физически это означает, что «работа возмущающих сил» за период в первом приближении всегда равна нулю. Исследование этого довольно распространенного случая заслуживает отдельного рассмотрения.

§ 3. **Исследование устойчивости.** Для этого совершим замену $E\to E+u$, $\psi\to\psi+v$ и ограничимся линейным приближением

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial E}u + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\psi}v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\omega_0' + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial E}\right)u + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial\psi}v.$$

Согласно [8, 9], характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0, \tag{7}$$

где $A=B=1$ при $\varepsilon=0$. Так как система (1) автономна, то по крайней мере один корень уравнения (7) равен единице. В этом случае для устойчивости возмущенного решения достаточно, согласно теореме Андронова—Витта (см. [8]), чтобы второй корень был меньше единицы, т. е. $B<1$. По теореме Лиувилля для постоянной $B$ нетрудно получить явное выражение

$$B = \exp\left\{\varepsilon\int_0^T\left(\frac{\partial f}{\partial E} + \frac{\partial F}{\partial\psi}\right)dt\right\}.$$

В частности, при $\varepsilon>0$ малым достаточным условием устойчивости Ляпунову является требование

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 d\psi = \frac{dR}{dE_0^*} \leqslant \delta < 0.$$

В результате справедлива

Теорема 2. Возмущенное стационарное решение устойчиво по Ляпунову при $\varepsilon>0$ достаточно малом, если $\dfrac{dR}{dE_0^*}<0$.

Заметим, что этот результат может быть получен из условий периодичности функций $\varphi$ и $\chi$, входящих в выражения

$$u = \varphi e^{\alpha t},\ v = \chi e^{\alpha t},\ (\alpha|_{\varepsilon=0} = 0).$$

Предложенный метод довольно эффективен для исследования возмущенных вращательно-колебательных систем весьма общего вида.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Митропольский Ю. А. «Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний». М., 1964.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **151**, № 6, 1260, 1963.
4. Крускал М. Адиабатические инварианты. М., ИЛ, 1962.
5. Волосов В. М. «Усп. матем. наук», **17**, № 6, 3—126, 1962.
6. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», **3**, № 1, 145, 1963.
7. Моргунов Б. И. ДАН СССР, **161**, № 6, 1303, 1965.
8. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1956.
9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.



Поступила в редакцию
26. 10 1965 г.



Кафедра
математики


---


УДК 669.793 '71 : 538



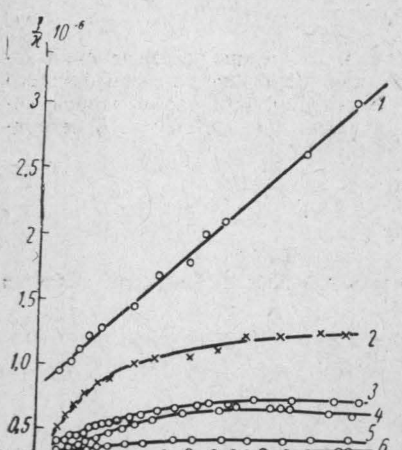
**В. И. ЧЕЧЕРНИКОВ, А. В. ПЕЧЕННИКОВ**


# МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СКАНДИЙ—АЛЮМИНИЙ

Данные по электронной теплоемкости [1], а также результаты исследования температурной зависимости магнитной восприимчивости металлического скандия [2, 3] указывают на то, что в этом металле $d$-электроны испытывают значительную коллективизацию.

С целью получения дополнительных сведений о состоянии $d$-электронов в металлическом скандии, нами были изучены сплавы скандий—алюминий, где второй компонент, а именно — металлический алюминий, обладает паулиевской восприимчивостью, почти не зависящей от температуры.

Согласно диаграмме состояния, которая была определена в работе [4], скандий и алюминий образуют четыре интерметаллических соединения, а между ними существуют сплавы, представляющие собой механическую смесь соответствующих соединений. Исходными материалами для приготовления наших сплавов служили: дистиллированный скандий чистоты 99,33%, содержащий Cu $\leqslant$ 0,08, $N_2 \leqslant 0{,}06$, $O_2 \leqslant 0{,}46$, $H_2 \leqslant 0{,}1$, Ca $\leqslant$ 0,002, Mo $\leqslant$ 0,01, Fe $\leqslant$ 0,06% и алюминий чистоты 99,99%. Всего нами было приготовлено 6 сплавов: 25 ат. % Sc+75 ат. % Al ($ScAl_3$), 33,3 ат. % Sc+66,7 ат. % Al ($SsAl_2$), 50 ат. % Sc+50 ат. % Al (ScAl), 66,7 ат. % Sc+33,3 ат. % Al ($Sc_2Al$), 55 ат. % Sc+45 ат. % Al, 85 ат. % Sc+15 ат. % Al. Из них четыре сплава являются интерметаллическими соединениями. Все приготовленные сплавы подверглись гомогенизирующему отжигу в течение 60 часов при 600° С. Измерение магнитной восприимчивости указанных сплавов, а также чистого алюминия проводилось с помощью маятниковых весов, описанных в работе [5] в интервале температур от 100 до 1200° К в вакууме $10^{-4}$ *мм рт. ст.*




Зависимость $1/\chi$ от $T$ для сплавов Sc—Al: *1* — ($ScAl_3$), *2* — ($ScAl_2$), *3* — (ScAl), *4*—55 ат. % Sc, *5* — (ScAl), *6* — 85 ат. % Sc и *7* — Sc (чистый)

На рисунке 1 показана зависимость $1/\chi$ от $T$ для всех изученных сплавов системы скандий — алюминий. Как видно, у сплавов с большим содержанием скандия (66,7 и 85 ат. % Sc) магнитная восприимчивость очень слабо зависит от температуры. С увеличением содержания алюминия в сплаве все более ярко начинает проявляться зависимость $\chi$ от $T$, причем восприимчивость особенно резко растет в области низких температур. Температурно-зависящую часть восприимчивости можно объяснить присутствием ферромагнитных примесей, которые в сплаве создают локальные магнитные моменты. Необходимо, однако, отметить, что возникновение этих моментов зависит не только от количества примесей, но и от электронной плотности.