

А. А. ПИВОВАРОВ

## ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ПО ВЕРТИКАЛИ ПОДЛЕДНЫХ ТЕМПЕРАТУР ВОДЫ ПРОТОЧНЫХ ВОДОЕМОВ

Предложена новая методика предвычисления средних по вертикали подледных температур воды для зимнего периода проточных водохранилищ и озер. Расчетные значения затабулированы и легко могут быть использованы в инженерных расчетах при проектировании и строительстве гидроузлов на замерзающих водоемах.

Широкое практическое использование естественных водоемов требует всестороннего изучения и разработки методов предвычисления основных элементов их режима в различные сезоны года. В частности, существенный интерес представляет исследование термического режима для осенне-зимнего периода, характеризующегося наличием поверхностного и внутриводного льда и шуги, вызывающих наибольшие нарушения нормальной работы гидроузлов.

Предвычисление термического режима водоемов для этого периода позволяет предвидеть ледовые затруднения и разрабатывать наиболее эффективные меры борьбы с ними при проектировании и эксплуатации гидротехнических сооружений. Однако вследствие сложности процесса формирования термического режима водоемов и многочисленности факторов, его определяющих, эта проблема до настоящего времени не имеет достаточно полного решения. С различной степенью схематизации математическая формулировка и решение задачи о расчете температуры воды имеется для периода осеннего охлаждения вод и зимнего периода при наличии на поверхности воды сплошного ледяного покрова. Что касается термического режима для периода ледостава, расчет для которого дополнительно чрезвычайно осложняется явлениями фазовых превращений воды и льда, то постановка этой задачи лишь намечается.

Анализ имеющегося экспериментального материала и расчетов показывает, что наличие сплошного ледяного, а затем и снегового покровов на поверхности воды принципиально изменяет условия формирования температуры воды подо льдом по сравнению с условиями открытой водной поверхности. Резкое снижение теплообмена с атмосферой через снего-ледяной покров обуславливает преобладающее влияние на формирование температуры воды процесса теплообмена с грунтом ложа и проточности водоемов. Это позволяет исключить из рассмотрения теплообмен с атмосферой через снего-ледяной покров и получить основные закономерности формирования температуры воды

для зимнего периода путем совместного решения задачи о распространении тепла в системе вода — грунт ложа. Для непроточных водоемов, т. е. при отсутствии горизонтального переноса тепла течениями и при постоянных значениях глубины водоема и термических характеристик воды и грунта, решения такой задачи рассмотрены в работах [1—3].

В практике инженерных расчетов используются менее строгие, но более простые приближенные методы расчета зимнего хода температуры воды под ледяным покровом, основанные на раздельном решении задач о температурном поле в воде и грунте ложа [4, 5]. Основная трудность их применения при отсутствии водоемов-аналогов заключается в необходимости предварительного задания хода придонных температур в течение всего подлежащего расчету зимнего периода. Но именно ход этих температур и является одной из конечных целей расчета, поэтому предварительное задание его не позволяет заранее дать оценки точности расчетных соотношений.

При строгой постановке задачи необходимо совместное рассмотрение термического режима в воде и в грунте ложа водоема. Если при этом ограничиться предвычислением средней по вертикали температуры воды, то расчетные соотношения можно получить в простом и удобном для практических целей виде. Для непроточных водоемов такая методика расчета предложена в нашей работе [6]. Проверка этой методики показала, что она дает результаты, хорошо согласующиеся с данными непосредственных наблюдений и расчетами по более строгому решению [3] задачи. Обобщение этой методики расчета зимнего хода средней по вертикали температуры воды под ледяным покровом проточных водоемов и дается в настоящей работе.

Дадим математическую формулировку задачи. Будем рассматривать водоем ограниченной глубины  $h$  и достаточной протяженности. Начало координат расположим на поверхности раздела вода—лед, положительное направление оси  $x$  выберем по направлению течения, а оси  $z$  — вертикально вниз от нижней поверхности льда. Все величины, относящиеся к воде, будем снабжать индексом 1, а к грунту ложа — индексом 2.

Примем, что распространение тепла в воде осуществляется по вертикали турбулентным обменом, а по горизонтали течением. Кроме того, имеет место выделение тепла  $q_1$  в единице объема, вследствие диссипации энергии течения и других источников. При этих условиях температурное поле в воде можно описать уравнением

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] + \frac{q_1}{c_1 \rho_1}, \quad (1)$$

где  $c_1$ ,  $\rho_1$  — теплоемкость и плотность воды,  $k_1$  — коэффициент турбулентного обмена тепла,  $v_1$  — скорость течения воды.

В качестве граничных условий примем: равенство нулю температуры на границе раздела вода—лед, т. е.  $t(0, x, \tau) = 0$ , и равенство температур и потоков тепла на границе раздела вода—грунт:

$$t_1(h, x, \tau) = t_2(h, x, \tau); \quad c_1 \rho_1 k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = c_2 \rho_2 k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=h}. \quad (2)$$

В начальный момент времени, за который мы примем момент установления на поверхности воды сплошного ледяного покрова, будем считать известным распределение температуры воды по вертикали

$$t_1(z, x, 0) = f_1(z, x). \quad (3)$$

Будем считать известным также температуру воды в истоке, т. е.

$$t_1(z, 0, \tau) = \psi_1(z, \tau). \quad (4)$$

Температуру и тепловой поток на поверхности грунта будем искать из совместного решения уравнения (1) и уравнения теплопроводности для грунта ложа

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = k_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2} \quad (5)$$

с условиями (2), условием ограниченности на большой глубине в грунте и начальным условием

$$t_2(z, 0) = f_2(z). \quad (6)$$

Применение двойного преобразования Лапласа по переменным  $x$  и  $\tau$  принципиально позволяет получить общее решение сформулированной задачи. Расчетные формулы для определения изменений по длине и хода во времени температуры воды в этом случае получаются в виде рядов, содержащих рекуррентные интегральные соотношения. Аналогичный вид имеют расчетные формулы и для средней по вертикали температуры воды проточных водоемов. Вследствие этого общие решения без каких-либо дополнительных упрощений мало пригодны для практического использования.

Наиболее распространенным упрощением общей постановки задачи в инженерных расчетах является предположение о стационарности температуры воды во времени за период продвижения водных масс по расчетному отсеку водоема. В этом случае методика расчета температуры воды по длине проточного водоема принципиально не отличается от методики расчета изменений во времени температуры воды непроточных водоемов. Расчетные соотношения получаются простой заменой текущего времени  $\tau$  на новое  $\frac{x}{v_1}$  (время пробега водными массами расстояния  $x$ ) и начального условия при  $\tau=0$  условием при  $x=0$ .

Для расчета изменений по длине и хода во времени средней по вертикали температуры воды мы исключим предположение о стационарности ее во времени и будем исходить из общей постановки задачи. Для этого проинтегрируем уравнение (1) в пределах всей глубины водоема. Тогда для определения средней по вертикали температуры воды в различные моменты времени и на различных расстояниях от истока с учетом условия (2) получим уравнение

$$c_1 \rho_1 h \frac{\partial T}{\partial \tau} + c_1 \rho_1 h \bar{v}_1 \frac{\partial T}{\partial x} = c_2 \rho_2 k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=h} - c_1 \rho_1 k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + Q_1, \quad (7)$$

где  $\bar{v}_1$  — средняя по вертикали скорость течения,

$$T(x, \tau) = \frac{1}{h} \int_0^h t_1(z, x, \tau) dz; \quad Q_1 = \int_0^h q_2(z, x, \tau) dz. \quad (8)$$

Учитывая, что на границе раздела вода—лед процессом ледообразования поддерживается постоянно нулевая температура, величину теплового потока от воды к этой границе по аналогии с явлениями теплообмена представим в виде

$$-c_1 \rho_1 k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\alpha T, \quad (9)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплообмена между водой и льдом.



Строго говоря, на границе раздела вода — лед вместо (9) необходимо было бы написать уравнение баланса тепла с учетом нарастания и таяния льда. Это потребовало бы в свою очередь решения задачи о распределении температуры в снеговой ледяном покрове, задания тепловых характеристик льда и снега и теплового баланса на поверхности снега. Такое усложнение задачи нецелесообразно и вследствие большого количества параметров и исходных данных и их сложной изменчивости во времени может лишь затруднить и понизить точность расчетов.

Для определения теплового потока от грунта ложа водоема воспользуемся методом, предложенным нами в [6]. Сущность его заключается в следующем. Находится решение уравнения (5) с условием (6) и заданным ходом температуры на поверхности грунта. Из этого решения легко находится выражение для теплового потока на поверхности грунта ложа, которое будет состоять из двух слагаемых: одно из них отражает влияние начального теплозапаса в грунте в момент ледостава, второе — влияние температуры поверхности грунта. Для задания входящей в первое слагаемое функции  $f_2(z)$  согласно (6) необходимо располагать данными наблюдений температуры на различных глубинах в грунте в момент ледостава или определять ее расчетным путем. Как показано в [6], если принять в качестве начального момента времени при решении уравнения (5) момент схода льда весной, то при расчете теплового потока от дна для последующего зимнего периода с достаточной точностью  $f_2(z)$  можно аппроксимировать среднесезонным значением температуры  $\theta$  придонных слоев воды. Таким образом, первое слагаемое в общем выражении для теплового потока от дна становится полностью определенным. Что касается второго слагаемого, то входящий в него ход температуры поверхности грунта за предшествующий летний период можно считать известным из наблюдений придонных температур воды, а для подлежащего расчету зимнего периода можно принять его качественно совпадающим с ходом средней по вертикали температуры воды, т. е.

$$t_2(h, x, \tau) = \varphi(x, \tau) = \mu(x, \tau)T(x, \tau). \quad (10)$$

С учетом этих соображений и равенства (9) для определения средней по вертикали температуры воды вместо (7) получим интегродифференциальное уравнение

$$c_1 \rho_1 h \frac{\partial T}{\partial \tau} + c_1 \rho_1 h v_1 \frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha T + Q_1 + c_2 \rho_2 \sqrt{\frac{k_2}{\pi}} \left\{ \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z}{2} \int_0^\tau \frac{\varphi(x, \eta) e^{-\frac{z^2}{4k_2(\tau-\eta)}}}{(\tau-\eta)^{3/2}} d\eta \right] \right\}_{z=0}. \quad (11)$$

Решение этого уравнения при постоянных значениях входящих в него параметров нетрудно получить в конечном виде [7], но расчетные соотношения при этом оказываются довольно громоздкими и трудоемкими при вычислениях температуры воды. Поэтому рассмотрим приближенное, но свободное от этих ограничений, решение (11).

Разобьем водоем на ряд участков примерно с одинаковым гидрологическим режимом. Так как нет оснований ожидать резкого изменения температуры воды по длине каждого отдельного участка, то в качестве первого приближения можно принять

$$T_i(x, \tau) = U_i(\tau) + \frac{V_i(\tau) - U_i(\tau)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i). \quad (12)$$

Функция  $U_i$ , характеризующая ход температуры во времени в истоке водоема или начале  $i$ -го участка, является известной либо по начальному условию в истоке при  $x=0$ , либо в результате расчета хода температуры воды в конце  $i-1$  участка. Таким образом, задача сводится к определению вида функции  $V_i(\tau)$ . Далее представим температуру поверхности грунта в виде кусочно-линейной функции, т. е.

$$\varphi_i(x, \tau) = \varphi_m^{(i)} + (\varphi_{m+1}^{(i)} - \varphi_m^{(i)}) \frac{\tau - ms}{s}; \quad ms \leq \tau \leq (m+1)s, \quad (13)$$

где  $s$  — постоянный интервал времени, равный  $s = \tau_v - \tau_{v-1}$ . Подставим выражения (12) и (13) в уравнение (11) и проинтегрируем последнее по времени в пределах интервала  $s$  и разделим на  $s$ . Тогда после несложных преобразований окончательное расчетное выражение для определения хода во времени температуры воды для  $i$ -го участка водоема получим в виде

$$T_i^{(v)} = M_i^{(v)} T_i^{(v-1)} + \frac{4c_2 \rho_2}{3N_i^{(v)}} \sqrt{\frac{k_2}{\pi s}} \left[ \frac{3}{2} \theta_2 (\sqrt{v} - \sqrt{v-1}) + \sum_{m=0}^{v-1} \varphi_m^{(i)} \Phi_{m,v} \right] + \frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{1i}^{(v)}}{(x-x_i) N_i^{(v)}} \bar{U}_i^{(v)} + \frac{Q_{1i}^{(v)}}{N_i^{(v)}}, \quad (14)$$

где

$$\Phi_0^{(v)} = \sqrt{v^3} - 2\sqrt{(v-1)^3} + \frac{3}{2}(\sqrt{v} - \sqrt{v-1}), \quad (15)$$

$$\Phi_m^{(v)} = 3\sqrt{(v-m)^3} - 3\sqrt{(v-m-1)^3} + \sqrt{(v-m-2)^3} - \sqrt{(v-m+1)^3}, \quad (16)$$

$$M_i^{(v)} = \frac{1}{N_i^{(v)}} \left[ \frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)}}{s} - \frac{1}{2} \left( \alpha_i^{(v)} + \frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{1i}^{(v)}}{x-x_i} \right) \right], \quad (17)$$

$$N_i^{(v)} = \frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)}}{s} + \frac{1}{2} \left( \alpha_i^{(v)} + \frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{1i}^{(v)}}{x-x_i} \right) + \frac{4c_2 \rho_2}{3} \sqrt{\frac{k_2}{\pi s}} \mu_i^{(v)}. \quad (18)$$

$$\bar{U}_i^{(v)} = \frac{1}{s} \int_{(v-1)s}^{vs} U_i(\tau) d\tau. \quad (19)$$

При выводе (14) было использовано также приближенное соотношение

$$\frac{1}{s} \int_{(v-1)s}^{vs} T_i(x, \tau) d\tau \cong \frac{T_i^{(v)} + T_i^{(v-1)}}{2}. \quad (20)$$

Полученное выражение (14) определяет среднюю по вертикали температуру воды в моменты времени  $\tau=vs$  в зависимости от ее значений в предшествующие моменты времени. Последовательное применение (14) и позволяет предвычислять ход во времени средней по вертикали воды проточных водоемов на любом расстоянии от истока  $i$  участка водоема, что и придает этому соотношению необходимый прогностический характер.

Сравнение полученного решения с решением [6] для средней температуры воды непроточных водоемов показывает, что влияние проточ-

ности проявляется в появлении двух последних слагаемых в (14) и дополнительного слагаемого  $\frac{c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{li}^{(v)}}{x - x_i}$  в выражениях для  $M_i^{(v)}$  и  $N_i^{(v)}$ .

Исходя из этого можно получить приближенную количественную оценку величин скоростей течения в водоеме, при которых можно пренебречь влиянием проточности. Если значения  $x$ ,  $\bar{v}_{li}^{(v)}$  и  $h_i^{(v)}$  таковы, что величина  $c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{li}^{(v)} / x - x_i$  оказывается малой по сравнению с величиной коэффициента теплообмена  $\alpha_i^{(v)}$ , а величины  $c_1 \rho_1 h_i^{(v)} \bar{v}_{li}^{(v)} \bar{U}_i^{(v)} / (x - x_i) \cdot N_i^{(v)}$  малы по сравнению с остальными слагаемыми выражения (14), то последнее переходит в соответствующее выражение для средней по вертикали температуры воды непроточных водоемов. Таким образом, полученное решение позволяет проводить приближенный количественный анализ основных гидрологических факторов, определяющих формирование температуры воды под ледяным покровом водоемов различной глубины и проточности.

Практическое применение предлагаемой методики расчета средней по вертикали температуры воды проточных водоемов аналогично соответствующей методике для непроточных водоемов [6]. Функция  $\Phi_m^{(v)}$  легко табулируется, и поскольку она не зависит от характеристик водоема, то однажды составленная таблица значений этой функции является универсальной. Такая таблица дана в [6] для  $v=35$ , что позволяет рассчитывать полный ход зимних температур воды с интервалом линейной интерполяции, равным 10 суткам. После разбивки водоема на однородные по своим гидрологическим условиям участки, задания параметров и исходных данных, расчет температуры воды для любого из этих участков с использованием таблицы значений функции  $\Phi_m^{(v)}$  не представляет каких-либо затруднений и легко может быть стандартизирован.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Корытникова Н. Н. «Изв. АН СССР», сер. географ. и геофиз., № 6, 1940.
2. Колесников А. Г. Сб. «Ледотермические вопросы в гидроэнергетике». М., Госэнергоиздат, 1954.
3. Пивоваров А. А. ДАН СССР, 94, № 5, 1954.
4. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Россинский К. И. Зимний термический режим водохранилищ, рек и каналов. М., Госэнергоиздат, 1947.
5. Бибииков Д. Н., Петруневич Н. Н. Ледовые затруднения на гидростанциях. М., Госэнергоиздат, 1950.
6. Пивоваров А. А. Методика предвычисления зимнего хода средней по вертикали температуры воды в водохранилищах. Тр. III Всесоюз. гидрол. съезда, т. 4, 1960.
7. Колесников А. Г., Пивоваров А. А. Расчет скорости осеннего охлаждения по длине реки. Тр. III Всесоюз. гидрол. съезда, т. 3, 1960.

Поступила в редакцию  
6. 2 1965 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши