

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1966

УДК 539.166

В. А. ЭЛЬТЕКОВ

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ДЕГРАДАЦИИ ЭНЕРГИИ γ -ИЗЛУЧЕНИЯ

Обсуждаются численные методы решения интегрального уравнения рассеяния γ -квантов. Предлагается новый метод решения этого уравнения и указывается на ряд преимуществ его по сравнению с обычно применяемыми методами.

Нахождение не зависящей от пространственных и угловых координат спектральной плотности многократно-рассеянных γ -квантов сводится к решению следующего интегрального уравнения типа Вольтерра [1]:

$$\mu(\lambda) I(\lambda) \int_{\lambda_0}^{\lambda} k(\lambda, \lambda') I(\lambda') d\lambda' + s(\lambda). \quad (1)$$

В этом уравнении λ есть длина волны кванта, $I(\lambda)$ — спектральная плотность, $\mu(\lambda)$ — линейный коэффициент ослабления γ -излучения в данной среде, $s(\lambda)$ — плотность источников ($s(\lambda) \geq 0$), $\lambda_0 > 0$ — нижняя грань множества точек, для которых $s(\lambda) > 0$. Функция $k(\lambda, \lambda')$, пропорциональная дифференциальному сечению комптоновского рассеяния для кванта с длиной волны λ' , определяется формулой (1):

$$k(\lambda, \lambda') = \pi r_0^2 n \varepsilon (\lambda - \lambda') \varepsilon (\lambda' - \lambda + 2) (\lambda'/\lambda)^2 [\lambda/\lambda' + \lambda'/\lambda - 2(\lambda - \lambda') + (\lambda - \lambda')^2], \quad (2)$$

где $2\varepsilon(x) = 1 + x^{-1}|x|$, r_0 — классический радиус электрона, n — электронная плотность среды.

Уравнение (1) обычно решается [1, 2] путем приближенной замены интеграла в правой части некоторой суммой, в результате чего значения $I(\lambda)$ в последовательных точках $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_j \dots$ можно определить по формулам

$$I(\lambda_0) = [\mu(\lambda_0)]^{-1} s(\lambda_0), \quad (3)$$
$$I(\lambda_j) = [\mu(\lambda_j) - c_{jj} k(\lambda_j, \lambda_j)]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{j-1} c_{ij} k(\lambda_j, \lambda_i) I(\lambda_i) + s(\lambda_j) \right],$$

где c_{ij} — некоторые коэффициенты, значения которых зависят от выбора квадратурной формулы.

Пусть $I(\lambda_j)$ получается после численного интегрирования с шагом h_j . Тогда должно выполняться неравенство $\lambda_j - \lambda_{j-1} \leq h_j$, т. е. частота следования точек $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots$ определяется той точностью, с которой в этих точках требуется вычислить значения $I(\lambda)$. Если требуемая точность изменена так, что надо, например, все h_j уменьшить в α раз, то количество вычислений возрастет при этом примерно в α^2 раз. Пусть $I(\lambda)$ надо вычислить на отрезке длиной, во много раз большей двух. Так как числа h_j должны быть, как это следует из (2), по крайней мере меньше двух, то вычисления по формулам (3) становятся в этом случае чрезмерно длинными. Этим неудобством не обладают итерационные методы решения уравнения (1), в которых каждое приближение $I^{(n)}(\lambda)$ получается из предыдущего путем действия некоторого интегрального оператора. В этих методах $I^{(n)}(\lambda)$ может вычисляться по данной функции $I^{(n-1)}(\lambda)$ в любом порядке в ряде точек $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}, \dots$, следующих с частотой, наиболее удобной для интерполирования. Пусть эти вычисления состоят в численном интегрировании с шагом h_{i_k} . Тогда при уменьшении всех h_{i_k} в α раз количество вычислений возрастает тоже примерно в α раз. Расчеты по этим методам становятся слишком длинными, если для достижения заданной точности требуется большое количество итераций.

Для различных приложений представляет интерес нахождение серии решений уравнения (1), соответствующих различным $\mu(\lambda)/n$ и $s(\lambda)$. Применение итерационных методов в этом случае оказывается особенно эффективным, так как решение, известное для одного из вариантов такой задачи, может быть выбрано в качестве нулевого приближения при нахождении решения для другого варианта, близкого к первому. Наоборот, при расчетах по формулам (3) решения для каждого из вариантов поставленной задачи могут находиться лишь независимо друг от друга.

Рассмотрим сначала на одном примере метод итераций, в котором каждое последующее приближение $\tilde{I}^{(n)}(\lambda)$ получается из предыдущего по формуле

$$\tilde{I}^{(n)}(\lambda) = [\mu(\lambda)]^{-1} \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} K(\lambda, \lambda') \tilde{I}^{(n-1)}(\lambda') d\lambda' + s(\lambda) \right]. \quad (4)$$

На рис. 1 сплошными кривыми изображены спектральные плотности $\varphi_\nu(\lambda)$ -квантов, испытавших хотя бы одно рассеяние:

$$\varphi_\nu(\lambda) = I_\nu(\lambda) - [\mu_\nu(\lambda)]^{-1} s(\lambda) \quad (5)$$

в различных поглощающих и рассеивающих средах, рассчитанные по формулам (3) и (5) в [1]. Здесь $\nu=1, 2, 3$ — индексы, заменяющие символы Al, Fe, Pb. Первоначальная энергия квантов в этом примере равна 1 Мэв для всех квантов, что соответствует длине волны λ_0 , равной 0,51. Поэтому $s(\lambda)$ определяется формулой

$$s(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (6)$$

Точечными кривыми изображены функции $\tilde{\varphi}_\nu^{(1)}(\lambda)$ ($\tilde{\varphi}_\nu^{(n)} = \tilde{I}_\nu^{(n)} - \mu_\nu^{-1} s$), а пунктирными $\tilde{\varphi}_\nu^{(2)}(\lambda)$ в соответствующих средах. В качестве нулевых приближений $\tilde{\varphi}_\nu^{(0)}(\lambda)$ при вычислении $\tilde{\varphi}_\nu^{(1)}$ и $\tilde{\varphi}_\nu^{(2)}$ были взяты функции $a_\nu \varphi_{\nu-1}$, где a_ν — некоторые постоянные. Последние выбирались так, чтобы при $\lambda = \lambda_0$ выполнялось равенство $\tilde{\varphi}_\nu^{(0)}(\lambda_0) = \varphi_\nu(\lambda_0)$. Из уравнения (1) и соотношений (5) и (6) вытекает равенство

$$\varphi_\nu(\lambda_0) = K_\nu(\lambda_0, \lambda_0) [\mu_\nu(\lambda_0)]^{-2}.$$

Поэтому a_ν равны $K_\nu(\lambda_0, \lambda_0) [\mu_{\nu-1}(\lambda_0)]^2 / K_{\nu-1}(\lambda_0, \lambda_0) [\mu_\nu(\lambda_0)]^2$. Индекс нуль относится к случаю чисто комптоновского рассеивания, для которого $\mu_0(\lambda)$ равно $\int_{\lambda}^{\infty} K_0(\lambda', \lambda) d\lambda'$. Функция $\varphi_0(\lambda)$, рассчитанная в [1] по

формулам [3], [5] и выраженная в произвольных единицах, представлена сплошной кривой на рис. 2.

Приведенный пример показывает, что, если в качестве нулевого приближения не выбирается функция, достаточно близкая к искомой, для получения удовлетворительной точности метод, основанный на использовании формулы [4], требует слишком большого количества итераций.

Поэтому в данной работе предлагается другой итерационный метод, удобный для нахождения указанной серии решений, обладающий более быстрой сходимостью по сравнению с приведенным выше методом. Для вывода основных формул введем в рассмотрение функции $q(\lambda)$ и $\kappa(\lambda)$, определяемые соотношениями:

$$q(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' I(\lambda') \int_{\lambda}^{\infty} K(\lambda'', \lambda') d\lambda'', \quad (7)$$

$$\kappa(\lambda) = [\varphi(\lambda)]^{-1} q(\lambda). \quad (8)$$

Из уравнения (1) и соотношения (7) следует, что $q(\lambda)$ связана с $I(\lambda)$ еще одним соотношением:

$$q(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \{s(\lambda') - \tau(\lambda') I(\lambda')\} d\lambda', \quad (9)$$

где $\tau(\lambda) = \mu(\lambda) - \int_{\lambda}^{\infty} K(\lambda', \lambda) d\lambda'$.

После дифференцирования обеих частей уравнения (9) и исключения из полученного уравнения и соотношения (8) функций $\varphi(\lambda)$ и $I(\lambda)$ получается уравнение

$$q' + \tau\kappa^{-1}q = t, \quad (10)$$

где $t = (1 - \mu^{-1}\tau)s$. Решение уравнения (10) при фиксированной функции $\kappa(\lambda)$ и при начальном условии $q(\lambda_0) = 0$ имеет вид

$$q(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' t(\lambda') \exp \left\{ - \int_{\lambda'}^{\lambda} \tau(\lambda'') [\kappa(\lambda'')]^{-1} d\lambda'' \right\}. \quad (11)$$

С помощью (8) и (11) можно выразить $\varphi(\lambda)$ через $\kappa(\lambda)$. Получаемое при этом уравнение вместе с вытекающим из (7), (8) уравнением

$$\kappa(\lambda) = [\varphi(\lambda)]^{-1} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' I(\lambda') \int_{\lambda}^{\infty} K(\lambda'', \lambda') d\lambda''$$

образует систему двух нелинейных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $\varphi(\lambda)$ и $\kappa(\lambda)$, каждое из которых разрешено относительно одного из неизвестных. Такую систему можно решать методом итераций. Формулы для последовательных приближений имеют вид

$$\kappa^{(n)}(\lambda) = [\varphi^{(n)}(\lambda)]^{-1} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \{ \varphi^{(n)}(\lambda') + [\mu(\lambda')]^{-1} s(\lambda') \} \int_{\lambda}^{\infty} K(\lambda'', \lambda') d\lambda'',$$

$$\varphi^{(n+1)}(\lambda) = [\kappa^{(n)}(\lambda)]^{-1} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' t(\lambda') \exp \left\{ - \int_{\lambda'}^{\lambda} \tau(\lambda'') [\kappa^{(n)}(\lambda'')]^{-1} d\lambda'' \right\}.$$
(12)

Каждая из функций $\varphi^{(n)}(\lambda)$ нормирована так же, как и $\varphi(\lambda)$:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \tau(\lambda) \varphi^{(n)}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} \tau(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} t(\lambda) d\lambda.$$

При $s(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ выполняется равенство

$$\varphi^{(n)}(\lambda_0) = \varphi(\lambda_0) = K(\lambda_0, \lambda_0) [\mu(\lambda_0)]^{-2}.$$

Если при $\lambda \gg \lambda_0 + 2$ выполняется неравенство $|\varphi(\lambda')/\varphi(\lambda) - 1| \ll 1$, в области изменения переменных λ и λ' , определяемой неравенствами $\lambda - 2 \leq \lambda' \leq \lambda$, $\varphi^{(n)}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ совпадают с точностью до множителя про-

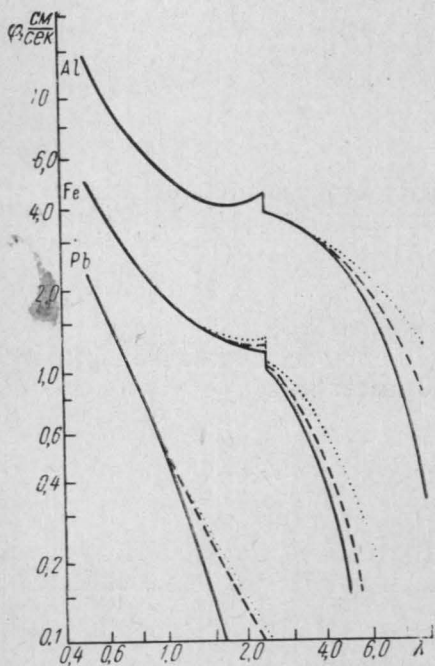


Рис. 1

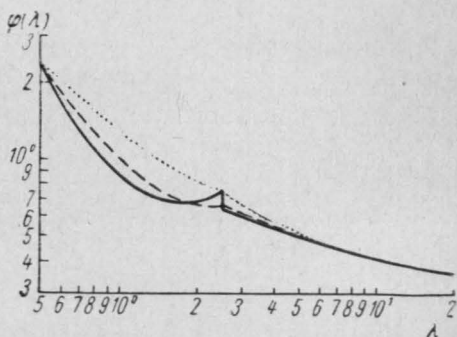


Рис. 2

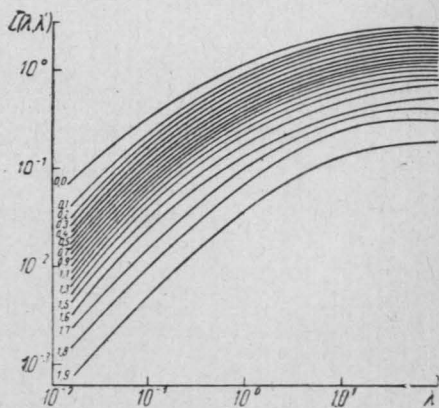


Рис. 3

порциональности с решением, не зависящим от пространственных координат уравнения возраста γ -квантов [3].

Видимо, трудно дать достаточно строгое рассмотрение таких вопросов, как равносильность системы уравнений (7), (8), (11) уравнению (1), характер и быстрота сходимости последовательности функций

$\varphi^{(n)}(\lambda)$ и $\varkappa^{(n)}(\lambda)$, степень произвола в выборе нулевого приближения $\varphi^{(0)}(\lambda)$. Проведем проверку работоспособности метода на некоторых частных примерах. Рассмотрим случай тех же сред и тех же начальных условий, что и в приведенном выше примере (рис. 1—2). Пусть $\varphi_v^{(n)}$ — n -кое приближение, определяемое формулами (12), для среды v и пусть нулевое приближение выбирается так же, как в приведенном выше примере, иллюстрирующем формулу (4). Расчет показывает, что все $\varphi_v^{(1)}$ ($v=1, 2, 3$) совпадают в пределах 5%-ной прочности с φ_v . Поэтому никаких дополнительных линий, изображающих $\varphi_v^{(1)}$, на рис. 1 не проведено. Кроме того, расчет показывает, что $\varphi_3^{(1)}$ совпадает в пределах той же точности с φ_3 , даже если в качестве $\varphi_3^{(0)}$ выбирается $\varphi_0(\lambda)$. На рис. 2 изображены $\varphi_0^{(1)}$ (точечная кривая) и $\varphi_0^{(2)}$ (пунктирная кривая) в случае, если $\varphi_0^{(0)} \equiv 1$.

На рис. 3 представлена входящая в подынтегральные выражения формул (7), (12) функция $L(\lambda, \lambda')$, равная $(\pi r_0^2 n)^{-1} \int_{\lambda}^{\infty} K(\lambda'', \lambda') d\lambda''$, в зависимости от λ' , при различных значениях $\lambda - \lambda'$, указанных против кривых.

Предложенный метод допускает по крайней мере одно обобщение, основанное на том, что в результате применения некоторого линейного интегрального преобразования к обеим частям уравнения (1) для преобразованной функции $I'\lambda$ получается уравнение того же типа, что и (1), но с преобразованным ядром $K'(\lambda, \lambda')$ и плотностью $s'(\lambda)$. К полученному уравнению можно применить процедуру, содержащуюся в формулах (7)—(12), т. е. ввести функции $q'(\lambda)$, $\tau'(\lambda)$ и $\varkappa'(\lambda)$ и вычислять последовательные приближения $\varphi^{n'}(\lambda)$ и $\varkappa^{(n)}(\lambda)$. Однако трудно сказать, какое из преобразований сулит максимальные удобства для вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М., Атомиздат, 1963.
2. Кагг Р. Р., Ламкин J. C. Phys. Rev., 76, No. 12, 1843—1845, 1949.
3. Новожилов Б. В. ЖЭТФ, 33, № 5, 1287—1289, 1957.

Поступила в редакцию
3. 3 1965 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой теории