Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1966

УДК 530.12 : 531.51

ВУ ТХАНЬ ХИЕТ

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗНАКА ЭНЕРГИИ ПЛОСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Исходя из концепции относительного гравитационного поля подсчитана энергия некоторых плоских гравитационных волн. Выяснено, что знак и значение энергии зависят от положения опорной точки и от структуры волн. Доказано, что локальная энергия области II относительной опорной точки в этой области положительна для рассматриваемых типов волн.

В работе [3], исходя из концепции относительного поля [1], была рассмотрена относительная энергия объемных плоских гравитационных волн Синга [2] в случае слабых волн и было получено, что знак и значение энергии зависят от положения опорной точки.

В настоящей работе мы рассмотрим относительную энергию других объемных плоских гравитационных волн, метрика которых имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - \exp[2P](dx^1)^2 - \exp[2Q](dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{1}$$

где P и Q есть функции от $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^0)$ ($x^0 = t$, скорость света выбрана за единицу), и мы не предполагаем, что волны слабы.

Две трехмерные гиперповерхности Σ_1 и Σ_2, уравнения которых имеют вид $x=a_1$, $x=a_2$ (a_1, a_2 — постоянные, $a_2>a_1$), делят пространство — время на три области: I, II и III. В области II ($a_1<x<a_2$), в которой $r_{\mu\nu}=0$ и $r_{ijkm}\neq 0$, функции P и Q удовлетворяют уравнениям

$$(P')^2 + P'' + (Q')^2 + Q'' = 0,$$

или

$$(P')^2 + P'' = -f(x), \tag{2}$$
$$(Q')^2 + Q'' = f(x),$$

штрихи у P и Q означают производные по x, $f(x)$ — произвольная функция от x. В областях I ($x<a_1$) и III ($x>a_2$), в которых $r_{\mu\nu}=0$ и $r_{ijkm}=0$, функции P и Q имеют вид

$$\exp[P] = m(x+u), \quad \exp[Q] = n(x+v), \tag{3}$$

где m, n, u, v определяются из условия непрерывности функций P и Q и их первых производных на Σ_1 и Σ_2 (условие Лишнеровица [4]).

Тогда для плотности энергии (энергии на единицу площади в плоскости x^1x^2) получаем [3]

$$E = \sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\, \Theta^0_{g0'} \sqrt{-g}\, dx, \tag{4}$$

где

$$g = det \| g_{\mu\nu} \|,$$

$$\Lambda\Theta^0_{g0'} = \frac{1}{4\varkappa} \left\{ \left(\frac{m_1 - 1}{x - x'} + P' \right) \left(\frac{4m_1 + 2m_2 - 3m_1 m_1' - m_2 m_2' - 2}{x - x'} + \right.\right.$$

$$\left. + (4P' + 2Q') \right) + \left(\frac{m_2 - 1}{x - x'} + Q' \right) \times$$

$$\left.\times \left(\frac{4m_2 + 2m_1 - 3m_2 m_2' - m_1 m_1' - 2}{x - x'} + (4Q' + 2P') \right) \right\}, \tag{5}$$

где $\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$ (γ — гравитационная постоянная Ньютона).

$$m_1 = \frac{(x - x')\exp[-2P]}{I_1}, \quad I_1 = \int\limits_{x'}^{x} \exp[-2P]\, dx,$$

$$m_1' = \frac{(x - x')\exp[-2P(x')]}{I_1}, \quad m_2 = \frac{(x - x')\exp[2Q]}{I_2},$$

$$I_2 = \int\limits_{x'}^{x} \exp[-2Q]\, dx, \quad m_2' = \frac{(x - x')\exp[-2Q(x')]}{I_2}.$$

Исследуем условие конечности плотности энергии E.

В случае, когда $x_I' < a_1$ (т. е. для опорной точки в области I), имеем

$$E = C + B \lim_{x \to \infty} \{\ln|x - \alpha|\},$$

где c, α — постоянные, не зависящие от x_I', и B — ограниченная функция от x_I'.

Из условия конечности $E - B = 0$ получаем уравнение для x_I':

$$n_1(4 - 3n_1' - n_2') + n_2(4 - 3n_2' - n_1') = 0, \tag{6}$$

где

$$n_1 = a_2 - x_I' - P'^{-1}(a_2) + \frac{[x_I' - a_1 + P'^{-1}(a_1)]\, P'(a_1)\exp[2P(a_1)]}{P'(a_2)\, M},$$

$$M = (x_I' - a_1)\{P'(a_1)\exp[2P(a_1)] - P'(a_2)\exp[2P(a_2)] +$$

$$+ N_1 P'(a_1)\, P'(a_2)\exp[2P(a_1) + 2P(a_2)]\} + \tag{7}$$

$$+ \exp[2P(a_1) + 2P(a_2)]\, \{\exp[-2P(a_2)] + N_1 P'(a_2)\},$$

$$N_1 = \int\limits_{a_1}^{a_2} \exp[-2P]\, dx, \quad n_1' = \exp[2P(a_1) + 2P(a_2)]\, M^{-2},$$

и аналогичные выражения для n_2, n_2' получаются из n_1, n_1' заменой $P \to Q$. Здесь $P(a_1)$, $P'(a_1)$, $P(a_2)$, $P'(a_2)$, $Q(a_1)$, $Q'(a_1)$, $Q(a_2)$, $Q'(a_2)$ означают значения функций P и Q и их первых производных на Σ_1 и Σ_2.

В случае, когда $x'_{\mathrm{III}} > a_2$ (т. е. для опорной точки в области III) из условия конечности E получим аналогичное уравнение для x'_{III} заменой $a_1 \rightleftarrows a_2$.

Аналогичным образом в случае, когда $a_1 < x'_{\mathrm{II}} < a_2$ (т. е. для опорной точки в области II) из условия конечности E получаем уравнение для x'_{II}

$$
\begin{gathered}
h\{n_{13}(4 - 3n'_{13} - n'_{23}) + n_{23}(4 - 3n'_{23} - n'_{13})\} + \\
+ \{n_{11}(4 - 3n'_{11} - n'_{21}) + n_{21}(4 - 3n'_{21} - n'_{11})\} = 0,
\end{gathered} \tag{8}
$$

где

$$
h = -\frac{P'(a_2)\,Q'(a_2)\exp[P(a_2) + Q(a_2)]}{P'(a_1)\,Q'(a_1)\exp[P(a_1) + Q(a_1)]},
$$

$$
n_{11} = a_1 - x'_{\mathrm{II}} - \frac{F\exp[2P(a_1)]}{P'(a_1)\cdot F\cdot\exp[2P(a_1)] + 1}, \qquad F = \int\limits_{x'_{\mathrm{II}}}^{a_1} \exp[-2P]\,dx,
$$

$$
n'_{11} = \frac{\exp[2P(a_1) - 2P(x'_{\mathrm{II}})]}{\{P'(a_1)\,F\exp[2P(a_1)] + 1\}^2} \tag{9}
$$

и n_{21}, n'_{21} получаются из n_{11}, n'_{11} заменой $P \to Q$, и аналогичные выражения n_{13}, n'_{13}, n_{23}, n'_{23} получаются из n_{11}, n'_{11}, n_{21}, n'_{21} заменой $a_1 \to a_2$.

Рассмотрим случай, когда

$$
f(x) = p^2, \tag{10}
$$

где p — константа. Тогда в качестве P и Q можем выбирать одно из следующих решений (1):

$$
\begin{gathered}
P\colon\ \ln|\cos px|, \quad \ln|\sin px|, \\
Q\colon\ \pm px, \quad \ln|\operatorname{ch} px|, \quad \ln|\operatorname{sh} px|.
\end{gathered} \tag{11}
$$

В этом случае тензор кривизны ковариантно постоянен

$$
r_{ijkl}; \quad m = 0, \tag{12}
$$

и поэтому согласно [5, 6] поле—симметрическое. Решение $P = \ln|\sin px|$, $Q = \ln|\operatorname{sh} px|$ определяет пространство максимальной подвижности для II типа Петрова [5].

Для функций P и Q (11) выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\exp[-2P(a_1)] - N_1 P'(a_1) &= \exp[-2P(a_2)] + N_1 P'(a_2), \\
\exp[-2Q(a_1)] - N_2 Q'(a_1) &= \exp[-2Q(a_2)] + N_2 Q'(a_2),
\end{aligned} \tag{13}
$$

где

$$
N_1 = \int\limits_{a_1}^{a_2} \exp[-2P]\,dx
$$

и

$$
N_2 = \int\limits_{a_1}^{a_2} \exp[-2Q]\,dx.
$$

Поэтому из (13), (6), (7) и аналогичных соотношений для опорной точки в области III получим соотношение

$$x'_{\mathrm{III}}-a_2=a_1-x'_{\mathrm{I}}. \tag{14}$$

(Индексы III и I у x' означают опорные точки в областях III и I соответственно.) Итак, мы доказали, что те опорные точки в областях I и III, для которых плотность энергии E конечна, симметричны относительно области II. Это, по-видимому, связано с тем, что поле в области II симметрическое.

Заметим также, что для функций P и Q, имеющих вид (11), величины n_{11}, n_{21}, n_{13}, n_{23} в уравнении (8) имеют вид

$$a_1-x'_{\mathrm{II}}+\operatorname{tg} p(x'_{\mathrm{II}}-a_1), \quad a_2-x'_{\mathrm{II}}+\operatorname{th} p(x'_{\mathrm{II}}-a_2), \tag{15}$$

а величины n'_{11}, n'_{21}, n'_{13}, n'_{23} в (8) имеют вид

$$\cos^{-2} p(x'_{\mathrm{II}}-a_1), \quad \operatorname{ch}^{-2} p\,(x'_{\mathrm{II}}-a_2) \tag{16}$$

(и подобные виды с заменой $a_1 \rightleftarrows a_2$).

В этом случае нетрудно проверить, что уравнение (9) имеет решение (т. е. имеется та опорная точка в области II, для которой E конечна) только в том случае, когда выполняются два условия:

$$h>0, \tag{17}$$

т. е. когда экстремум функции P находится в области II,

и

$$2p(a_2-a_1)\leqslant\pi. \tag{18}$$

Решая уравнения (6) и (8) (см. также (14)), получаем положения опорных точек, для которых плотность энергии E конечна. С помощью (4) и (5) найдем E. Получим следующие результаты.

1. В случае, когда $P=\ln\left|\cos\dfrac{x}{a}\right|$, $Q=-\dfrac{x}{a}$ $\left(p=\dfrac{1}{a}\right)$, $a_1=-0{,}5a$, $a_2=0{,}5a$.

Тогда из (6), (8) и (14) получим

$$x'=\pm\,2{,}055a \quad \text{и} \quad x=-\,0{,}050a.$$

При $x'=-2{,}055a$, т. е. для опорной точки в области I

$$a\varkappa E=+\,16{,}204.$$

При $x'=-0{,}050a$, т. е. для опорной точки в области II

$$a\varkappa E=+\,6{,}332.$$

При $x'=2{,}055a$, т. е. для опорной точки в области III

$$a\varkappa E=-\,33{,}384.$$

2. В случае, когда $P=\ln\left|\sin\dfrac{x}{a}\right|$, $Q=\ln\left|\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\right|$, $a_1=a$, $a_2=2a$.

Из (6), (8) и (14) получим

$$x'=-\,0{,}599a, \quad x'=1{,}530a \quad \text{и} \quad x'=3{,}599a.$$

При $x'=-0{,}599a$, т. е. для опорной точки в области I

$$a\varkappa E = -6{,}414.$$

При $x'=1{,}530a$, т. е. для опорной точки в области II

$$a\varkappa E = +398{,}847.$$

При $x'=3{,}599a$, т. е. для опорной точки в области III

$$a\varkappa E = +5{,}500.$$

3. В случае, когда $P = \ln\left|\sin\frac{x}{a}\right|$, $Q = \ln\left|\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right|$, $a_1 = 0{,}5a$, $a_2 = a$.

Из (6), (8) и (14) получим

$$x' = -3{,}022a \quad \text{и} \quad x' = 4{,}522a.$$

При $x'=-3{,}022a$, т. е. для опорной точки в области I

$$a\varkappa E = +15{,}340.$$

При $x'=4{,}522a$, т. е. для опорной точки в области III

$$a\varkappa E = +18{,}397.$$

4. В случае, когда $P = \ln\left|\sin\frac{x}{a}\right|$, $Q = \ln\left|\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right|$, $a_1 = 2a$, $a_2 = 3a$.

Из (6), (8) и (14) получим

$$x' = -0{,}031a \quad \text{и} \quad x' = 5{,}031a.$$

При $x'=-0{,}031a$, т. е. для опорной точки в области I

$$a\varkappa E = -39{,}876.$$

При $x'=5{,}031a$, т. е. для опорной точки в области III

$$a\varkappa E = -8{,}997.$$

Заметим, что в случаях 3 и 4 не выполняется условие (17) и уравнение (8) не имеет решения. Заметим также, что в случаях 2, 3 и 4 кривые зависимости $\exp[2P]$ и $\exp[2Q]$ (т. е. g_{11} и g_{22}) от x имеют различные виды.

Все полученные результаты показывают, что знак и значение энергии зависят от положения опорной точки и от структуры волн. Эти результаты совпадают с результатами, которые мы получили в случае слабых волн [3]. Интересно, что в случае 3 энергия положительна, а в случае 4 энергия отрицательна.

Рассмотрим локальную энергию в области II относительно опорной точки в этой области. Локальная энергия области II в некоторый момент времени определяется следующим образом:

$$\mathcal{E} = \int_{z_1}^{z_2} \Lambda\Theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dz = \sqrt{2}\int_{a_1}^{a_2} \Lambda\Theta^0_{g0'}\sqrt{-g}\, dx$$

(здесь $x^3=z$).

Исследуем знак $\mathcal{E}$ для некоторых типов волн (т. е. для некоторых видов функций P и Q).

Случай, когда $f(x)=p^2$ [см. (2)], т. е. функции P и Q имеют вид (11).

Тогда получаем

$$F(y) = 4\varkappa p^{-2}\Lambda\Theta^0_{g0'} = \frac{8}{\operatorname{sh}^2 y} + \frac{8}{\sin^2 y} + 4\cot g y \operatorname{cth} y + \frac{4}{y^2} - \\ - \frac{8}{y}(\cot g y + \operatorname{cth} y) - y\cot g y\left(\frac{3}{\sin^2 y} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}\right) - \\ - y\operatorname{cth} y\left(\frac{3}{\operatorname{sh}^2 y} + \frac{1}{\sin^2 y}\right),$$

где $y=p(x-x')$.

Обращая внимание на то, что

$$F(0)=0, \quad F(y)=F(-y),$$

рассмотрим $F(y)$ при $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Нетрудно проверить, что $F\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ и $F'(y) > 0$. Отсюда следует, что $F(y) \geqslant 0$ и, поэтому $\mathscr{E} > 0$, так как $\sqrt{-g} = \exp[P+Q] > 0$ в области II.

Случай, когда $f(x) = p^2x^{-4}$, т. е. функции P и Q имеют вид

$$\ln\left|\frac{x}{p}\right| \pm \frac{p}{x}, \quad \ln\left|\frac{x}{p}\sin\frac{p}{x}\right|, \quad \ln\left|\frac{x}{p}\cos\frac{p}{x}\right|,$$

$$\ln\left|\frac{x}{p}\operatorname{sh}\frac{p}{x}\right| \quad \text{и} \quad \ln\left|\frac{x}{p}\operatorname{ch}\frac{p}{y}\right|.$$

Тогда получаем

$$F(y) = 4\varkappa\Lambda\Theta^0_{g0'} = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 - \\ - \frac{p}{xx'y}[\alpha_1(3\beta_1+\beta_2) + \alpha_2(3\beta_2+\beta_1)],$$

где $y = \frac{p}{x'} - \frac{p}{x}$,

$$\alpha_1 = \frac{p}{x^2y}(y\operatorname{cth} y - 1), \quad \alpha_2 = \frac{p}{x^2y}(y\cot g y - 1),$$

$$\beta_1 = \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 y} - 1, \quad \beta_2 = \frac{y^2}{\sin^2 y} - 1.$$

Заметим, что

$$F(y) = F(-y), \quad F(0) = 0, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,$$

и имея в виду функции P и Q получим, что $xx' > 0$. Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Нетрудно доказать, что

$$\alpha_1(3\beta_1+\beta_2) + \alpha_2(3\beta_2+\beta_1) < 0.$$

Отсюда

$$F(y) \geqslant 0$$

и, в силу того, что $\sqrt{-g} = \exp[P+Q] > 0$, получим $\mathscr{E} > 0$.

Случай, когда $f(x)=cx^{-2}$ (c — постоянная), т. е. функции P и Q имеют вид

$$P=\left(\frac{1}{2}\pm d_1\right)\ln\left|\frac{x}{a}\right|,$$

$$Q=\left(\frac{1}{2}\pm d_2\right)\ln\left|\frac{x}{a}\right|,$$

где $2d_1=\sqrt{1+4c}$, $2d_2=\sqrt{1-4c}$, при условии $c>0$, $1-4c>0$.

Положим $\frac{x}{x'}=1+\alpha$ и предполагаем, что

$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3},$$

$$\left(\frac{x}{x'}\right)^{2d}\approx 1+2d\alpha+\alpha^2 d(2d-1)+\alpha^3 d\left(\frac{2}{3}-2d+\frac{4d^2}{3}\right).$$

Это справедливо при $2d\alpha\leqslant 0{,}1$. При этом размер области II действительно не мал; например, для этой области $10a<x<11a$. (Обратим внимание на то, что тем больше x', чем больше размер области II, которую мы рассматриваем). Тогда получаем

$$\varkappa\Lambda\Theta^0_{g0'}\approx\frac{2c^2}{9}\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right)^2\geqslant 0$$

и поэтому, в силу того, что $\sqrt{-g}=\exp[P+Q]>0$, получим $\mathscr{E}>0$.

Итак, в рассматриваемых случаях мы доказали, что локальная энергия области II $\mathscr{E}$ относительно опорной точки в этой области положительна. Этот результат совпадает с результатом, который мы получили в случае слабых волн [3]. Однако надо подчеркнуть, что в общем случае знак и значение локальной энергии зависят от положения опорной точки.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность профессору Я. П. Терлецкому за интерес и внимание, проявленные к моей работе, и Ю. А. Рылову за большую помощь и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rylov Yu. A. Ann. Phy. (DDR), **7**, 12, 329—353, 1964.
2. Synge T. L. Relativity the general theory, Amsterdam, 1960. Перевод: Синг Дж. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
3. Ву Тхань Хиет. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 1966.
4. Lichnerowics A. Theories Relativistes de la gravitation et de l'Electromagnetisme. Paris, 1955.
5. Петров А. З. Пространство Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
6. Петров А. З. «Изв. вузов», математика, № 2, 189, 1959.

Поступила в редакцию
25. 11 1965 г.

Кафедра
теоретической физики