Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1966

УДК 530.145

П. Н. БОГОЛЮБОВ

О ФУНКЦИЯХ ПРИБЛИЖЕННО КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Обобщаются формулы для среднего значения и спектрального разложения функций от коммутирующих операторов на случай приближенно коммутирующих операторов.

§ 1. В квантовой механике часто приходится рассматривать систему эрмитовых, коммутирующих между собой операторов $A_1, \ldots, A_s$. Если они обладают дискретным спектром, мы можем построить полную систему ортонормированных векторов $\{\varphi_\nu\}$, каждый из которых является собственным вектором для всех операторов $A_1, \ldots, A_s$:

$$A_j \varphi_\nu = a_{j,\nu} \varphi_\nu.$$

Возьмем некоторую непрерывную функцию $f(x_1, \ldots, x_s)$. Собственные числа оператора $\mathfrak{A} = f(A_1, \ldots, A_s)$ будут $f(a_{1,\nu} \ \ldots \ a_{s,\nu})$. Введем операторы проекции P_ν на вектора φ_ν

$$P_\nu \varphi = (\varphi_\nu, \varphi)\, \varphi_\nu.$$

Поскольку φ_ν является полной, ортонормированной системой

$$\varphi = \sum_{(\nu)} (\varphi_\nu, \varphi)\, \varphi_\nu = \sum_{(\nu)} P_\nu\, \varphi.$$

Поэтому

$$f(A_1, \ldots A_s)\, \varphi = \sum_{(\nu)} f(a_1^{(\nu)}, \ \ldots \ , a_s^{(\nu)})\, P_\nu\, \varphi$$

и, следовательно, спектральное представление имеет вид

$$\mathfrak{A} = f(A_1, \ldots A_s) = \sum_{(\nu)} f(a_1^{(\nu)}, \ \ldots \ a_s^{(\nu)})\, P_\nu. \qquad (1)$$

Среднее значение оператора $\mathfrak{A}$ по любому нормированному вектору φ будет

$$(\varphi, \mathfrak{A}\, \varphi) = \sum_{(\nu)} |(\varphi_\nu, \varphi)|^2 f(a_1^{(\nu)}, \ \ldots \ , a_s^{(\nu)}).$$

Если $f(x_1, \ldots, x_s)$ — вещественная функция, то

$$\max_D f(x_1, \ldots, x_s) \geqslant f(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_s^{(\nu)}) \geqslant \min_D f(x_1, \ldots, x_s),$$

где D — множество точек совместного спектра операторов $A_1, \ldots, A_s$. Поскольку $\sum_\nu |(\varphi_\nu \varphi)|^2 \equiv (\varphi, \varphi) = 1$, получим неравенства

$$\max_D f(x_1, \ldots, x_s) \geqslant (\varphi, \mathfrak{A} \varphi) \geqslant \min_D f(x_1, \ldots, x_s). \quad (2)$$

В настоящей работе обобщается неравенство типа (2) и спектральное разложение (1) на случай, когда операторы $A_1, \ldots, A_s$ коммутируют лишь приближенно. Такие положения часто приходится рассматривать в статистической механике и, в частности, неравенства типа (2) могут быть весьма полезны в теории модельных гамильтонианов.

Рассмотрим некоторое число S эрмитовых операторов, определенных во всем гибельртовом пространстве, с дискретным спектром и ограниченной нормой. Введем понятие функции

$$\mathfrak{A} = f(A_1, \ldots A_s)$$

некоммутирующих между собой операторов из рассматриваемого класса. Будем говорить, что некоторый оператор $\mathfrak{A}$ является функцией операторов $A_1, \ldots, A_s$ в том случае, если каждому $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такой полином P_ε $(A_1, \ldots, A_s)$, при котором

$$|\mathfrak{A} - P_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s)| \leqslant \varepsilon$$

для любых операторов $A_1, \ldots, A_s$, удовлетворяющих неравенствам $|A_j| \leqslant C$. В частности, взяв за $A_1, \ldots, A_s$ вещественные числа, получим

$$|f(x_1, \ldots x_s) - P_\varepsilon(x_1, \ldots x_s)| \leqslant \varepsilon \quad (3)$$

для $|x_j| \leqslant C$.

Операторы $A_1, \ldots, A_s$ не коммутируют, поэтому чрезвычайно важен порядок следования операторов в полиномах P_ε.

Далее мы будем рассматривать случай, когда операторы $A_1, \ldots, A_s$ зависят от параметра $V \to \infty$, причем

$$|A_k A_q - A_q A_k| \leqslant \frac{K}{V}, \quad K = \text{const}, \quad (4)$$

а нормы остаются ограниченными: $|A_j| < T < C$.

Много примеров такого рода систем операторов встречаются в теории модельных систем, например в теории сверхпроводимости и теории кристаллов.

§ 2. Докажем, что при некоторых дополнительных условиях

$$\left|\mathfrak{A} - \int \ldots \int \delta(x_1 - A_1) \ldots \delta(x_s - A_s) f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1, \ldots, dx_s\right| \leqslant$$
$$\leqslant \zeta\left(\frac{1}{V}\right) \to 0 \quad (5)$$

при $V \to \infty$.

Составим полином Q_ε из полинома P_ε, расположив операторы $A_1, \ldots, A_s$ в порядке возрастания номера, а именно:

$$Q_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s) = \sum C_{n_1, \ldots n_s} A_1^{n_1} A_2^{n_2}, \ldots, A_s^{n_s}.$$

Полином Q_ε отличен от полинома P_ε на $\frac{M(\varepsilon)}{V}$ в силу (4)

$$|P_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s) - Q_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s)| \leqslant \frac{M(\varepsilon)}{V},$$

и потому, учитывая наше определение функции от операторов, получим

$$|\mathfrak{A} - Q_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s)| \leqslant \varepsilon + \frac{M(\varepsilon)}{V}. \tag{6}$$

Для произвольного собственного вектора φ_ν оператора A_1

$$\int_{-T}^{T} \delta(x_1 - A_1) x_1^{n_1} dx_1 \varphi_\nu = \int_{-T}^{T} \delta(x_1 - a_\nu) x_1^{n_1} dx_1 \varphi_\nu,$$

$$\text{но} \quad \delta(x_1 - a_\nu) = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| \geqslant T.$$

Следовательно,

$$\left\{A_1^{n_1} - \int_{-T}^{T} \delta(x_1 - A_1) x_1^{n_1} dx_1\right\} \varphi_\nu = 0.$$

Так как произвольный вектор φ может быть получен суперпозицией из φ_ν

$$A_1^{n_1} = \int_{-T}^{T} \delta(x_1 - A_1) x_1^{n_1} dx_1,$$

аналогично

$$A_j^{n_j} = \int_{-T}^{T} \delta(x_j - A_j) x_j^{n_j} dx_j.$$

Строим полином Q_ε:

$$Q_\varepsilon = \int_{-T}^{T} \ldots \int \delta(x_1 - A_1) \ldots \delta(x_s - A_s) Q_\varepsilon(x_1, \ldots, x_s) dx_1, \ldots dx_s.$$

Для вещественных чисел $Q_\varepsilon = P_\varepsilon$ и, следовательно,

$$Q_\varepsilon(A_1, \ldots, A_s) = \int_{-T}^{T} \ldots \int \delta(x_1 - A_1) \ldots \delta(x_s - A_s) \times$$
$$\times P_\varepsilon(x_1, \ldots, x_s) dx_1, \ldots, dx_s. \tag{7}$$

Приняв во внимание (6), найдем

$$\left|\mathfrak{A} - \int_{-T}^{T} \ldots \int \delta(x_1 - A_1) \ldots \delta(x_s - A_s) P_\varepsilon(x_1, \ldots, x_s) \times \right.$$
$$\left. \times dx_1, \ldots dx_s \right| \leqslant \varepsilon + \frac{M(\varepsilon)}{V}. \tag{8}$$

Чтобы удовлетворить соотношению (5) надо показать малость интеграла

$$\int_{-T}^{T} \dots \int \delta(x_1 - A_1) \dots \delta(x_s - A_s) \left\{ f(x_1, \dots, x_s) - P_\varepsilon(x_1, \dots, x_s) \right\} \times$$

$$\times\, dx_1, \dots dx_s,$$

основываясь на малости $f - P_\varepsilon$.

Это нетрудно сделать, введя дополнительные предположения относительно малости всех частных производных до S-го порядка, включая разность $f - P_\varepsilon$, а именно:

$$|D \{ f(x_1, \dots x_s) - P_\varepsilon(x_1, \dots, x_s) \}| \leqslant p(\varepsilon) \to 0, \tag{9}$$

где D — символ любой частной производной до S-го порядка включительно по $x_1, \dots, x_s$.

Учитывая эти условия и произведя интегрирование исследуемого интеграла по частям, получим

$$\left| \int_{-T}^{T} \dots \int \delta(x_1 - A_1) \dots \delta(x_s - A_s) \{ f(x_1, \dots x_s) - \right.$$

$$\left. - P_s(x_1, \dots x_s) \} \, dx_1, \dots dx_s \right| \leqslant \eta(\varepsilon) \to 0$$

$$\text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда на основании (8)

$$\left| \mathfrak{A} - \int_{-T}^{T} \dots \int \delta(x_1 - A_1) \dots \delta(x_s - A_s) f(x_1, \dots, x_s) \, dx_1, \dots, dx_s \right| \leqslant \varepsilon +$$

$$+ \frac{M(\varepsilon)}{V} + \eta(\varepsilon).$$

Можно так подобрать $\varepsilon \to 0$ при $V \to \infty$, чтобы

$$\varepsilon + \frac{M(\varepsilon)}{V} + \eta(\varepsilon) = \zeta\left(\frac{1}{V}\right) \to 0 \text{ при } V \to \infty.$$

Итак, неравенство (5) доказано. Пределы интегрирования T можно заменить на T_1 так, чтобы $T \leqslant T_1 \leqslant C$. Но доказанного неравенства еще недостаточно для решения поставленной задачи, так как произведение проекционных δ-операторов не положительно.

§ 3. Перейдем к другому представлению, в котором сохранено свойство положительности. Построим положительный δ-оператор, применим к нему ранее доказанные неравенства. Для этого возьмем функцию

$$f(t) = K(1 - t)^{s+1} \quad \text{для } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$f(t) = 0 \quad \text{для } 1 < t \leqslant \infty$$

и определим постоянную K из условия

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int f(x_1^2 + \dots + x_s^2) \, dx_1 \dots dx_s = K \int_{x_1^2 + \dots + x_s^2 \leqslant 1} \dots \int (1 - x_1^2 -$$

$$- \dots - x_s^2) \, dx_1, \dots, dx_s.$$

Возьмем произвольное $\eta>0$ и положим

$$\delta_\eta(t)=\frac{1}{\eta^s}f\left(\frac{t}{\eta^2}\right).$$

Как видно, $\delta_\eta(t)=0$ для $t\geqslant\eta^2$.
Далее

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\delta_\eta(x_1^2+\ldots+x_s^2)\,dx_1,\ldots,dx_s=\int\limits_{x^2+\ldots+x_s^2\leqslant 1}\ldots\int\delta_\eta(x_1^2+\ldots+$$
$$+x_s^2)\,dx_1,\ldots dx_s. \qquad (10)$$

Построим оператор

$$\mathfrak{A}=\delta_\eta\{(\xi_1-A_1)^2+\ldots+(\xi_s-A_s)^2\},$$

где $\xi_1,\ldots,\xi_s$ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам $|\xi_j|\leqslant C$.

После построения соответствующих полиномов P_ε приближающих δ_η и проверки выполнения дополнительных условий (9) можем написать

$$\Big|\delta_\eta\{(\xi_1-A_1)^2+\ldots+(\xi_s-A_s)^2\}-\int\limits_{-C}^{C}\ldots\int\delta(t_1-A_1)\ldots\delta(t_s-$$
$$-A_s)\,\delta_\eta\{(\xi_1-t_1)^2+\ldots+(\xi_s-t_s)^2\}\,dt_1,\ldots,dt_s\Big|\leqslant\zeta\left(\eta,\frac{1}{V}\right). \qquad (11)$$

Для любого сколь угодно малого, но фиксированного η, $\zeta\left(\eta,\frac{1}{V}\right)\to 0$ при $V\to\infty$. Поэтому можно подобрать такое $\eta_\nu\to 0$, чтобы $\zeta\left(\eta_\nu,\frac{1}{V}\right)\to 0$ при $V\to\infty$.

Обозначим $\xi\left(\eta_\nu,\frac{1}{V}\right)=\rho\left(\frac{1}{V}\right)$. Заменим переменные: $t_j=x_j+\tau_j$. После несложных вычислений получим

$$\Big|\int\limits_{-T_1}^{T_1}\ldots\int\delta\eta_\nu\{(x_1-A_1)^2+\ldots+(x_s-A_s)^2\}\,dx_1\ldots dx_s-$$
$$-\int\limits_{\tau_1^2+\ldots+\tau_s^2\leqslant\eta^2}\ldots\int\delta\eta_\nu(\tau_1^2+\ldots+\tau_s^2)\,d\tau_1,\ldots d\tau_s\Big|\leqslant\rho\left(\frac{1}{V}\right)(2T_1)^s,$$

т. е., благодаря (10)

$$\Big|\int\limits_{-T_1}^{T_1}\ldots\int\delta\eta_\nu\{(x_1-A_1)^2+\ldots+(x_s-A_s)^2\}\,dx_1\ldots dx_s-$$
$$-1\Big|\leqslant\rho\left(\frac{1}{V}\right)(2T_1)^s.$$

§ 4. Преобразуем интегральное представление в (5) так, чтобы заменить в нем не положительный и даже не эрмитовский оператор $\{\delta(x_1-A_1)\ldots\delta(x_s-A_s)\}$ введенным в предыдущем параграфе положительным оператором δ_η. Возьмем соотношение (7), заменив в нем $A_j \to \to A_j + \tau_j$, где τ_j — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам $|\tau_j| \leqslant \eta_\nu$. Помножив соотношение (7) на $\delta\eta_\nu(\tau_1^2 + \ldots + \tau_s^2)$ и проинтегрировав его по $\tau_1, \ldots \tau_s$, учтем выше полученное соотношение (11) и найдем

$$\Big| \int \ldots \int Q_\varepsilon (A_1 + \tau_1, \ldots A_s + \tau_s)\, \delta\eta_\nu (\tau_1^2 + \ldots + \tau_s^2)\, d\tau_1, \ldots {}_s d\tau \Big| -$$

$$- \{\tau_1^2 + \ldots + \tau_s^2 \leqslant \eta_\nu^2\}$$

$$- \int\limits_{-T_1}^{T_1} \ldots \int \delta_\eta \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} P_\varepsilon (x_1, \ldots, x_s) \times$$

$$\times dx_1, \ldots, dx_s \Big| \leqslant \rho\left(\frac{1}{V}\right) \int\limits_{-T_1}^{T_1} \ldots \int |P_\varepsilon (x_1, \ldots, x_s)|\, dx_1 \ldots dx_s \leqslant$$

$$\leqslant \rho\left(\frac{1}{V}\right) (2T_1)^s Q. \quad Q = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Положим, $\tau_j/\eta_\nu = \xi_j$. Ясно, что $|\xi_j| \leqslant 1$.

Имеем, далее,

$$Q_\varepsilon (A_1 + \tau_1, \ldots A_s + \tau_s) - Q_\varepsilon (A_1, \ldots A_s) =$$

$$= \int\limits_0^{\eta_\nu} \frac{d}{dz} Q_\varepsilon (A_1 + z\xi_1, \ldots A_s + z\xi_s)\, dz.$$

Но $Q_\varepsilon (A_1 + z\xi_1, \ldots A_s + z\xi_s)$ — полином по отношению к z, поэтому

$$|Q_\varepsilon \{(A_1 + \tau_1), \ldots (A_s + \tau_s)\} - Q_\varepsilon (A_1, \ldots A_s)| \leqslant N(\varepsilon)\, \eta_\nu.$$

Приняв во внимание (12), найдем

$$\Big| Q_\varepsilon (A_1, \ldots A_s) - \int\limits_{-T_1}^{T_1} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} \times$$

$$\times P_\varepsilon (x_1, \ldots x_s)\, dx_1, \ldots dx_s \Big| \leqslant \rho\left(\frac{1}{V}\right) (2T_1)^s Q + N(\varepsilon) \eta_\nu.$$

Из (6) получим

$$\Big| \mathfrak{A} - \int\limits_{-T_1}^{T_1} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} P_\varepsilon (x_1, \ldots x_s) \times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_s \Big| \leqslant \varepsilon + \frac{M(\varepsilon)}{V} + \rho\left(\frac{1}{V}\right) (2T_1)^s Q + N(\varepsilon)\, \eta_\nu. \tag{13}$$

Нам необходимо доказать, что

$$\Big| \int\limits_{-T}^{T} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} \{f(x_1, \ldots x_s) -$$

$$- P_\varepsilon (x_1, \ldots x_s)\}\, dx_1, \ldots dx_s \Big| \leqslant 2\varepsilon \left(1 + (2T_1)^s \rho\left(\frac{1}{V}\right)\right). \tag{14}$$

Обозначим для сокращения

$$\int_{-T_1}^{T_1} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} F(x_1, \ldots x_s)\, dx_1, \ldots, dx_s = I(F).$$

Соотношение (14) будет доказано, как только мы установим, что для любой вещественной функции $F(x_1, ..., x_s)$, удовлетворяющей неравенству $|F| \leqslant \varepsilon$ для $|x_j| \leqslant C$, справедливо следующее:

$$|I(F)| \leqslant \varepsilon \left\{1 + (2T_1)^s \rho\left(\frac{1}{V}\right)\right\}. \tag{15}$$

Используя положительность оператора $\delta\eta_\nu$, из (13) и (14) находим

$$\left| \mathfrak{A} - \int_{-T_1}^{T_1} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} f(x_1, \ldots x_s) \times \right.$$
$$\left. \times\, dx_1 \ldots dx_s \right| \leqslant \varepsilon \left\{3 + (2T_1)^s \rho\left(\frac{1}{V}\right)\right\} + \rho\left(\frac{1}{V}\right)(2T_1)^s Q +$$
$$+ \frac{M(\varepsilon)}{V} + N(\varepsilon)\,\eta_\nu.$$

Рассмотрим выражение $\frac{M(\varepsilon)}{V} + N(\varepsilon)\,\eta_\nu$. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ оно стремится к нулю при $V \to \infty$. Поэтому можно найти такое $\varepsilon_\nu \to 0$ так, чтобы $\frac{M(\varepsilon)}{V} + N(\varepsilon)\,\eta_\nu \to 0$, при $V \to \infty$, тогда получим

$$\mu\left(\frac{1}{V}\right) = \varepsilon_\nu \left\{3 + (2T_1)^s \rho\left(\frac{1}{V}\right)\right\} + \rho\left(\frac{1}{V}\right)(2T_1)^s Q + \frac{M(\varepsilon)}{V} + N(\varepsilon)\,\eta_\nu \to 0$$
$$\text{при } V \to \infty.$$

Окончательно получим

$$\left| \mathfrak{A} - \int_{-T_2}^{T_1} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} f(x_1, \ldots, x_s) \times \right.$$
$$\left. \times\, dx_1 \ldots dx_s \right| \leqslant \mu\left(\frac{1}{V}\right) \to 0 \tag{16}$$
$$\text{при } V \to \infty.$$

Из доказанного неравенства легко получить обобщение неравенства (2) на случай приближенно коммутирующих операторов

$$\min f(x_1, \ldots x_s) - \omega\left(\frac{1}{V}\right) \leqslant (\varphi, \mathfrak{A}\varphi) \leqslant \max f(x_1, \ldots x_s) + \omega\left(\frac{1}{V}\right),$$

где

$$\omega\left(\frac{1}{V}\right) \to \infty \quad \text{при} \quad V \to \infty. \tag{17}$$

Интеграция в $I(f)$ идет фактически лишь по области точек приближенного совместного спектра операторов $A_1, ..., A_s$. Определим это понятие. Будем говорить, что какая-либо точка $(x_1, ..., x_s)$ является точкой η — приближенного совместного спектра операторов $A_1, ..., A_s$, если существует такой нормированный вектор φ, для которого одновременно

$$\|A_j\varphi - x_j\varphi\| \leqslant \eta, \text{ т. е. } (\varphi\,(A_j - x_j)^2\,\varphi) \leqslant \eta^2.$$

Пусть теперь для какой-либо точки $(x_1, \ldots, x_s)$ оператор

$$\delta\eta_\nu = \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} \neq 0.$$

Можно поэтому ввести нормированный вектор

$$\varphi = \frac{\psi'}{\sqrt{(\psi', \psi')}}, \quad \psi' = \delta\eta_\nu \psi \neq 0.$$

Для него выполняются все неравенства (17) и множество $D_{\eta\nu}$ точек η_ν — приближенного совместного спектра операторов $A_1, \ldots, A_s$ не пусто. Можем в нашем неравенстве заменить куб со стороной $2T_1$ множеством $D_{\eta\nu}$

$$I(F) = \int\limits_{D_{\eta\nu}} \ldots \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} \times$$

$$\times F(x_1, \ldots x_s)\, dx_1, \ldots dx_s \tag{18}$$

и

$$\min_{D_{\eta\nu}} f(x_1, \ldots, x_s) - \omega\left(\frac{1}{V}\right) \leqslant (\varphi, \mathfrak{A}\varphi) \leqslant \max_{D_{\eta\nu}} f(x_1, \ldots, x_s) + \omega\left(\frac{1}{V}\right). \tag{19}$$

Неравенство (19) является естественным обобщением неравенства (2) на рассмотренный случай приближенно коммутирующих операторов. Заметим также, что из (18) и (16) следует приближенное интегральное представление для рассматриваемой функции $\mathfrak{A}$ от операторов $A_1, \ldots, A_s$

$$\left| \mathfrak{A} - \int \underset{D_{\eta\nu}}{\ldots} \int \delta\eta_\nu \{(x_1 - A_1)^2 + \ldots + (x_s - A_s)^2\} f(x_1, \ldots x_s) \times \right.$$

$$\left. \times\, dx_1, \ldots, dx_s \right| \leqslant \mu\left(\frac{1}{V}\right) \to 0 \qquad \text{при } V \to \infty. \tag{20}$$

Следовательно, мы получили обобщение представления (1).

В (1) оператор P_ν переводит любой вектор ψ в собственный вектор для системы $A_1, \ldots, A_s$, а в (20) оператор $\delta\eta_\nu$ переводит любой вектор ψ в η_ν — приближенный собственный вектор для системы $A_1, \ldots, A_s$.

В заключение заметим, что поставленное нами условие относительно дискретности спектров операторов $A_1, \ldots, A_s$ является несущественным, оно определяется лишь тем, что мы для простоты пользовались дискретным разложением операторов по собственным функциям. Можно было бы проделать то же, пользуясь общим разложением операторов.

Поступила в редакцию
3.2 1965 г.

Кафедра
квантовой статистики