Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1966

УДК 530.145

В. Н. КУДИН

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Показывается, что квантовомеханическое рассмотрение системы с нелокальным лагранжианом взаимодействия можно свести к исследованию локальной системы с дополнительными (практически бесконечным числом) степенями свободы. Дано простое объяснение случаю, который можно рассматривать как примитивную модель мазера, предложенную Швингером при исследовании задачи о движении осциллятора, взаимодействующего с макроскопической системой, где учитываются простейшие корреляции в последней.

Одним из направлений принципиальной модификации квантовой теории поля является рассмотрение теорий с нелокальным по времени взаимодействием. Нелокальная теория [1], которая отличается от обычной присутствием во взаимодействии релятивистски-инвариантных формфакторов, приводит к нарушению условия Блоха, заключающемся в утверждении, что каждое последующее состояние однозначно определяется предыдущим состоянием, выраженным в квантовой механике уравнением Шредингера. В связи с этим поставленную Швингером задачу о движении квантового осциллятора [2], в которой нелокальная по времени зависимость лагранжиана взаимодействия появляется как учет простейших корреляций:

$$L_{int}(t) = \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_{t'}^{t} ds g(t) g(s) A(t-s), \tag{1}$$

где λ^2 — параметр нелокального взаимодействия, $A(t—s)$ — формфактор, по временной структуре представляющий запаздывающую функцию Грина, необходимо исследовать методом, отличным от метода Гамильтона. Использованный Швингером для решения указанной задачи квантовый динамический принцип по отношению к нелокальным теориям исчерпывающим образом не сформулирован. В нелокальной теории, где формфактор вводится непосредственным образом, невозможно непротиворечивым образом сформулировать принцип причинности. Действительно, при допущении, что асимптотически квантовая теория остается верной, будет наблюдаться нарушение микропричинности.

Для исследования системы типа осциллятора, характеризуемой нелокальным по времени лагранжианом (1), применим метод локализации функции Лагранжа системы с помощью введения дополнительных переменных, выраженных через координаты осцилляторов [3]. Иными словами, вместо исследования системы с нелокальным $L_{int}(t)$ (1) рассмотрим систему, характеризуемую локальным лагранжианом

$$L(t) = L_0(g(t)) + L_0^{\text{доп}}(t) + \varepsilon \sum_n \alpha_n g(t) g_n(t), \tag{2}$$

где ε — параметр линейного взаимодействия, $\alpha(w_n)$ — вес во взаимодействии дополнительного осциллятора g_n, $L_0^{\text{доп}}(t)$ — лагранжиан дополнительных осцилляторов, представляющих собой набор вспомогательных переменных с дискретным спектром.

Для доказательства эквивалентности движений осциллятора первой системы, в которой явным образом учтены временные корреляционные эффекты, и осциллятора системы (2), взаимодействующего линейным образом с системой вспомогательных осцилляторов, используем введенную Фейнманом [4] процедуру континуального интегрирования по пространству вспомогательных функций. Опуская довольно сложные выкладки по исключению дополнительных осцилляторов g_n, $(n=1 \dots N)$, придем к результирующей функции Лагранжа для системы основного осциллятора g и Ω, которая будет иметь следующий вид:

$$L(g(t)) = \frac{1}{2}(\dot{g}^2(t) - \Omega^2 g^2(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t'}^{t} ds g(t) g(s) \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha^2(w_n)\sin w_n(t-s)}{w_n}. \tag{3}$$

Полученный результат раскрывает существенную сторону использования континуального интегрирования по функциональному пространству: эту операцию можно рассматривать как обратную вариационному принципу действия. Действительно, нелокальное по времени уравнение для основного осциллятора g легко получить из системы эйлеровых уравнений, определяемых локальной функцией Лагранжа (2)

$$\ddot{g}(t) + \Omega^2 g(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n(t),$$

$$\ddot{g}_n(t) + w_n^2 g_n(t) = \varepsilon\alpha_n g(t), \tag{4}$$

отсюда следует

$$\ddot{g}(t) + \Omega^2 g(t) - \varepsilon^2 \int_{t'}^{t} ds g(t) g(s) \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n(t, s) = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n^{\text{один}}(t), \tag{5}$$

где $f_n(t, s)$ — ядро частного решения $g_n^r(t)$, т. е.

$$g_n^r(t) = \varepsilon\alpha_n \int_{t'}^{t} ds g(s) f_n(t, s).$$

Использование континуального интегрирования позволяет выяснить, вариация какого действия приводит к нелокальному члену в уравнении (5), а также определить способ нахождения соответствующего действия (или нелокального по времени лагранжиана взаимодействия).

Временная структура ядра частного решения $g_n^r(t)$ представляет полусумму решений запаздывающего и опережающего типа:

$$f_n(t, s) = \frac{\theta(t-s) - \theta(s-t)}{2w_n} \sin w_n(t-s), \tag{6}$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция, равная при $t>0$ единице и при $t<0$ — нулю. Появление в результате использования континуального интегрирования эрмитового ядра, согласно Н. Н. Боголюбову [5], позволяет рассматривать систему взаимодействующих указанным способом осцилляторов как квантовомеханическую модель индефинитной метрики в квантовой теории поля. Качественно это заключение можно интерпретировать на примере двух линейно связанных осцилляторов, отражающих простейший случай в поставленной задаче $N=1$, $\varpi_1=\varpi$. Именно в процессе движения этих осцилляторов не происходит полной перекачки энергии от одного осциллятора к другому, что соответствует указанной Н. Н. Боголюбовым интерпретации нефизических состояний дополнительных полей.

Наконец, удобно осуществить предельный переход $N\to\infty$ с наложением условий интегрируемости на функции α_ν^2 в виде

$$\sum_{\nu>\varpi_n>0} \alpha^2(\varpi_n) \to \int_0^\nu d\nu I(\nu), \quad \sum_{\varpi_n>\nu} \alpha^2(\varpi_n) \to \int_\nu^\infty d\nu I(\nu), \tag{7}$$

где $I\nu$ — некоторая непрерывная функция ν, интегрируемая на интервале $(0, \infty)$. С физической точки зрения систему дополнительных осцилляторов $g_n (n=1 \ldots N)$ в предельном случае $N\to\infty$ можно представить как макроскопическую систему с непрерывным спектром, характеризуемую некоторым спектральным распределением $I(\nu)$.

Если записать формфактор $A(t-s)$ через произвольную функцию $I(\nu)$

$$A(t-s) = \theta(t-s) \int_0^\infty d\nu \frac{I(\nu) \sin \nu (t-s)}{\nu}, \tag{8}$$

то исследование системы, характеризуемой нелокальным лагранжианом взаимодействия (1), можно провести путем рассмотрения системы типа осциллятора, линейно взаимодействующего с практически бесконечным набором осцилляторов макросистемы, описываемой локальной функцией Лагранжа (2).

Точный, без каких-либо приближений, расчет последней системы можно произвести методом двухвременных температурных функций Грина, согласно хорошо разработанной методике (см., например, [6]). Так, энергетический спектр системы, представляющей осциллятор, взаимодействующий с макроскопической системой, определяется выражением следующего вида (см. [3]):

$$\Delta(E) = E^2 - \Omega^2 - \varepsilon^2 \int_0^\infty d\nu \frac{I(\nu)}{E^2-\nu^2}, \tag{9}$$

которое представляет детерминант алгебраической системы для фурье-образов временных функций Грина при осуществлении предельного перехода $N\to\infty$ и наложении соотношений (7). Для вычисления несобственного интеграла по ν нужно использовать известную символическую формулу

$$\frac{1}{x \pm i\gamma} = P\frac{1}{x} \pm i \pi\delta(x), \tag{10}$$

где x — действительная величина, P означает, что интеграл берется в смысле главного значения, $0<\gamma\to 0$.

Так как основные результаты определяются лишь некоторой функцией частоты $I(\nu)$ или, в конечном итоге, частотой ν, воспользуемся общим предположением макроскопической системы, т. е.

$$\frac{I(C, C^{+}; \nu)}{I(C^{+}, C; \nu)} = \exp \nu\beta(\nu) \geqslant 0, \tag{11}$$

где $I(C, C^{+}; \nu)$ — спектральная плотность, соответствующая операторам C, которые действуют на переменные макросистемы, $\beta(\nu)$ — вещественная функция частоты ν, согласно Швингеру [2], принимающая значения в интервале $(-\infty, \infty)$, обратная величина которой играет роль эффективной температуры макроскопической системы. Если, распоряжаясь произвольностью функции $I(\nu)$, представить ее через спектральную плотность дисперсии $a(\nu)$ или энергии $I(\nu)$ макросистемы следующим образом:

$$I(\nu) = 2\nu a(\nu) \operatorname{th} \frac{\nu\beta(\nu)}{2} = 2\nu I(\nu)(e^{\nu\beta(\nu)} - 1), \tag{12}$$

то выражение для фурье-образа формфактора $A(t-s)$, согласно соотношению (8), запишется в виде

$$A(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{I(\nu)(e^{\nu\beta(\nu)} - 1}{E - \nu + i\gamma}. \tag{13}$$

Выражение (13) соответствует поставленной Швингером задаче (1), поскольку функция $A(E)$ есть фурье-образ запаздывающей функции Грина для термодинамической системы. Используя (12), можно привести уравнение (9) в точности к виду уравнения для энергетического спектра системы, которое получил Швингер [2]

$$E_m^2 - \Omega^2 - \varepsilon^2 \int_0^{\infty} d\nu \frac{2\nu a(\nu) \operatorname{th} \frac{\nu\beta(\nu)}{2}}{E_m^2 - \nu^2} = 0. \tag{14}$$

(Соответствующие функции Грина определены Швингером с другим знаком и в другой системе единиц.)

Интересен естественный случай, когда термодинамическая система имеет только одну собственную частоту $w \approx \Omega$, т. е. характеризующие эту систему спектральные функции $I(\nu)$, $J(\nu)$, $a(\nu)$ имеют δ-образный вид. Например,

$$I(\nu, \beta(\nu)) = \delta(\nu - w) I_0(\beta), \tag{15}$$

что приводит интегральное соотношение для спектра энергии системы (14) к уравнению 4-го порядка, определяемого единственным параметром термостата—величиной $I_0(\beta)$ или эффективной температурой $\theta^\circ = \frac{1}{\beta}$:

$$\Delta(E_m) = E_m^2 - \Omega^2 - \frac{\varepsilon^2 I_0}{E_m^2 - w^2} = 0. \tag{16}$$

$$m = 1, 2, 3, 4.$$

В рассматриваемом случае наблюдается новая физическая ситуация, предложенная Швингером [2]: взаимодействие осциллятора с термостатом приводит к усилению колебаний. Действительно, неравновесный режим термодинамической системы может характеризоваться отрицательной эффективной температурой $\theta^\circ < 0$. Тогда, согласно выражению (12), величина $I_0(\beta) < 0$ и уравнение (16) будут иметь комплексные корни, мнимая часть которых $ImE_m = \pm \frac{\varepsilon \sqrt{|I_0|}}{2\Omega}$. С математической точки зрения этот результат вполне естествен, так как детерминант ΔE при $I_0 < 0$ соответствует системе с затухающими и нарастающими колебаниями. Физическая сторона этой возможности представляет известное требование в теории мазеров, непременным условием работы которых является осуществление в термодинамической системе инверсии населенностей для выбранной пары уровней, что может быть интерпретировано как отрицательное значение эффективной температуры [7]. Эту систему можно рассматривать как примитивную модель мазера, в которой колебания электромагнитного поля соответствуют одной из собственных частот полого резонатора, а макроскопическая система представляет систему атомов, в которой тем или иным способом осуществлен неравновесный режим.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за предложенную тему, а также доц. И. А. Квасникову за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. «Успехи физ. наук», **61**, 137, 1957.
2. Мартин П., Швингер Ю. J. Math. Phys., **2**, No. 3, 407, 1961. Перевод. Теория систем многих частиц. М., ИЛ, 1962, стр. 96.
3. Кудин В. Н. Дипломная работа, МГУ, 1964.
4. Фейнман Р. Рev. Mod. Phys., **20**, No. 2, 367, 1948. Перевод. Сб. Вопросы причинности в квантовой механике. М., ИЛ, 1955, стр. 167.
5. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. НДВШ, физ.-мат. науки, № 2, 137, 1958.
6. Зубарев Д. Н. «Успехи физ. наук», **71**, 71, 1960.
7. Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М. «Успехи физ. наук», **72**, 161, 1960.

Поступила в редакцию
25. 2 1965 г.

Кафедра
теоретической физики