Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1966

УДК 539.12.01

П. А. КАЛИНЧЕНКО

О ВОЗМОЖНОСТИ СФЕРИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Анализируется уравнение поля с нелинейностью в виде одной ступеньки. Показано, что в стационарном аксиально симметричном случае существуют только сферически симметричные частицеподобные решения.

Рассмотрим нелинейный лагранжиан комплексного скалярного поля

$$L = -\frac{1}{2}\{\partial_\mu\psi^*\partial_\mu\psi + \psi^*\psi + F(\psi^*\psi)\},$$

(здесь и в дальнейшем положим $c=\hbar=m_0=1$), где $x_\mu = (x, y, z, x_4=it)$, а $F(\psi^*\psi)$ — произвольная нелинейная функция. Соответствующие уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - [1 + F'(\psi^*\psi)]\,\psi = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - [1 + F'(\psi^*\psi)]\,\psi^* = 0$$

Нахождение точных решений этих уравнений, как известно, является основной трудностью в развитии нелинейной теории элементарных частиц. Поэтому разрабатываются различные приближенные методы решения нелинейных уравнений. С. Ф. Шушуриным в работе [3] был изложен приближенный метод нахождения решений нелинейных уравнений поля. Этот метод заключается в том, что нелинейная функция $F'(\psi^*\psi)$ заменяется ступенчатой функцией $F_n'(\psi^*\psi)$, после чего уравнение разбивается на систему линейных уравнений, решения которых затем определенным образом сшиваются. В сферически симметричном случае он дает хорошие результаты.

В работах [1] и [2] было показано, что в нелинейных уравнениях существуют частицеподобные решения, и в сферически симметричном случае был найден спектр масс. При построении единой полевой теории элементарных частиц важным является вопрос о существовании сферически несимметричных частицеподобных решений нелинейных уравнений поля. Поэтому интересно применить метод Шушурина для нахождения таких решений.

Для исследования возьмем функцию $F_n'(\psi^*\psi)$ в виде одной ступеньки. Следует заметить, что в нестационарном случае уравнение с такой нелинейностью имеет сферически несимметричные частицеподобные решения. Их можно получить из стационарного сферически симметричного решения, найденного в работе [2] путем преобразований Лоренца, относительно которых это уравнение инвариантно. Рассмотрим стационарный случай:

$$\psi = u(r, \theta, \varphi)\cdot e^{-i\varepsilon t}, \quad \psi^* = u(r, \theta, \varphi)\, e^{i\varepsilon t},$$

тогда для $u(r, \theta, \varphi)$ получится следующее уравнение:

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) - [1 - \varepsilon^2 + F'(u^2)]\, u = 0, \tag{1}$$

где

$$F_1'(u^2) = -a^2\theta(u - U_0),$$

а

$$\theta(u - U_0)\begin{cases} 0 & \text{при } v < U_0, \\ 1 & \text{при } u \geqslant U_0. \text{ (См. рис. 1.)} \end{cases}$$

Кроме того, решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$\int u^2\, d\tau < \infty, \tag{2}$$

откуда $u(r, \theta, \varphi) \to 0$ при $r \to \infty$;

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &< \infty \quad \text{при} \quad r \to 0; \\ u(r, \theta, \varphi) &= u(r, \theta, \varphi + 2\pi n). \end{aligned} \tag{3}$$

Нелинейное уравнение (1) разделяется на два линейных:

$$\nabla^2 u^{\mathrm{I}}(r, \theta, \varphi) + (\varepsilon^2 + a^2 - 1)\, u^{\mathrm{I}}(r, \theta, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad u^{\mathrm{I}} \geqslant U_0, \tag{4}$$

$$\nabla^2 u^{\mathrm{II}}(r, \theta, \varphi) - (1 - \varepsilon^2)\, u^{\mathrm{II}}(r, \theta, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad u^{\mathrm{II}} < U_0. \tag{5}$$

Решения этих уравнений должны удовлетворять условиям сшивания

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{I}}(r, \theta, \varphi)\big|_{r = r_0(\theta, \varphi)} &= u^{\mathrm{II}}(r, \theta, \varphi)\big|_{r = r_0(\theta, \varphi)} = U_0, \\ \vec{\nabla} u^{\mathrm{I}}(r, \theta, \varphi)\big|_{r = r_0(\theta, \varphi)} &= \vec{\nabla} u^{\mathrm{II}}(r, \theta, \varphi)\big|_{r = r_0(\theta, \varphi)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $r_0(\theta, \varphi)$ — поверхность, на которой возможны условия сшивания. Предположим, что поверхность сшивания одна, т. е. решение при $r(\theta, \varphi) > r_0(\theta, \varphi)$ не превосходит U_0, и пусть $(\varepsilon^2 + a^2 - 1) > 0$, $(1 - \varepsilon^2) > 0$.

Решение ищем в виде разложения по сферическим функциям:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{v_n(\sqrt{\lambda}\, r)}{\sqrt{r}}\, Y_n(\theta, \varphi). \tag{7}$$

Это разложение заведомо возможно, если вместе с условием (2) $u(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет еще одному условию, т. е. $u(r, \theta, \varphi)$ является кусочно-гладкой функцией переменных θ и φ (8). Подставляя (7) в (4) и (5), получаем уравнение для v_n:

$$v_n^{\mathrm{II}}(x)+\frac{1}{x}\,v_n^{\mathrm{I}}(x)+\left[\pm 1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]v_n(x)=0, \tag{8}$$

где $x=\lambda r\cdot\lambda^{\mathrm{I}}=\sqrt{\varepsilon^2+b^2-1},\ \lambda^{\mathrm{II}}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Знак плюс относится к v_n^{I}, знак минус — к v_n^{II}. Решением этих уравнений являются функции Бесселя действительного (для v_n^{I}) и мнимого (для v_n^{II}) аргумента. Чтобы удовлетворить условиям (2) и (3), следует положить

$$v_n^{\mathrm{I}}(\lambda^{\mathrm{I}}r)=J_{n+1/2}(\sqrt{\varepsilon^2+a^2-1}\,r),$$

$$v_n^{\mathrm{II}}(\lambda^{\mathrm{II}}r)=K_{n+1/2}(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r).$$

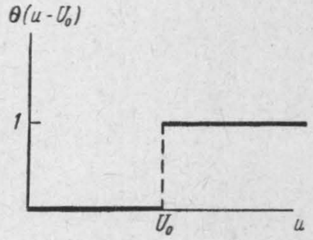

Рис. 1.

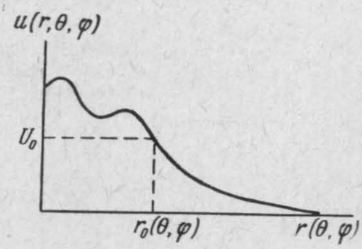

Рис. 2

Теперь эти два решения нужно сшить:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}}\,\frac{v_n^{\mathrm{I}}(\lambda^{\mathrm{I}}r)}{\sqrt{r}}\,Y_n(\theta,\varphi)\big|_{r=r_0(\theta,\varphi)}=U_0, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{II}}\,\frac{v_n^{\mathrm{II}}(\lambda_r^{\mathrm{II}})}{\sqrt{r}}\,Y_n(\theta,\varphi)\big|_{r=r_0(\theta,\varphi)}=U_0,$$

$$\vec{\nabla}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}}\,\frac{v_n^{\mathrm{I}}(\lambda^{\mathrm{I}}r)}{\sqrt{r}}\,Y_n(\theta,\varphi)\big|_{r=r_0(\theta,\varphi)}=\vec{\nabla}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{II}}\,\frac{v_n^{\mathrm{II}}(\lambda^{\mathrm{II}}r)}{\sqrt{r}}\,Y_n(\theta,\varphi)\big|_{r=r_0(\theta,\varphi)}.$$

Рассмотрим уравнение (9) и попытаемся отыскать $r=r_0(\theta,\varphi)$ среди аксиально симметричных функций, т. е. функций, зависящих только от θ. Нетрудно видеть, что и решение уравнения (1) тоже должно быть аксиально симметричным. Из (2) и (6) следует, что $r=r_0(\theta,\varphi)$ является ограниченной функцией.

Пусть $\cos\theta=1-2\xi$ и пусть справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$\lambda^{\mathrm{I}}r_0(\xi)=\sum_{i=0}^{m} a_i(\xi-\xi_0)^i,$$

где m — любое целое положительное число. В дальнейшем для простоты пусть $\xi_0=0$. Подставим это разложение в уравнение (9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}}\,\frac{\sqrt{\lambda^{\mathrm{I}}}\,j_{n+1/2}\left(\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\xi^i\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\xi^i}}\,p_n(1-2\xi)=U_0. \tag{10}$$

Дифференцируя левую часть этого уравнения при ξ и приравнивая каждую производную нулю при $\xi=0$, получаем для определения C_n^{I} и α_i систему уравнений:

$$U_0 = \sqrt{\lambda^{\mathrm{I}}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}} \frac{J_{n+1/2}(\alpha_0)}{\sqrt{\alpha_0}},$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}} \left\{ \left(\frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} \right)'_{x=\alpha_0} \cdot \alpha_1 - \frac{J_{n+1/2}(\alpha_0)}{\sqrt{\alpha_0}} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \cdot 0(n-1), \right.$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}} \left\{ \left(\frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} \right)'_{x=\alpha_0} \cdot 2\alpha_2 + \left(\frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} \right)''_{x=\alpha_0} \cdot \alpha_1^2 - \right.$$

$$- \left(\frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} \right)' \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \cdot \theta(n-1) \cdot \alpha_1 + \frac{J_{n+1/2}(\alpha_0)}{\sqrt{\alpha_0}} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{\theta(n-2)}{2!}, \tag{11}$$

. . . .

где $\theta(n)$ имеет прежнее значение: $\theta(n) = \begin{cases} 0 & n<0, \\ 1 & n \geqslant 0. \end{cases}$

Имеет ли полученная система уравнений решение? Воспользуемся выражениями

$$\frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2k+n}}{2^{2k+n+1/2} \cdot \Gamma(k+1) \cdot \Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right)},$$

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n+l)!\ (1-\cos\theta)^l}{l!\ l!\ (n-l)!\ 2^l}$$

и запишем уравнение (10) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{\lambda^{\mathrm{I}}}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \xi^i\right)^{2k+n}}{2^{2k+n} \cdot k! \cdot \Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right)} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n+l)!}{l!\ l!\ (n-l)!} \xi^l = U_0.$$

Из него для фиксированных n, k и m получается система $(m(2k+n)+ +n+1)$ уравнений с $(m+n+2)$ неизвестными. Если уравнения независимы, т. е. нет уравнений, являющихся следствием других, то необходимо, чтобы

$$[m+n+2) \geqslant (m(2k+n)+n+1),$$

т. е.

$$m+1 \geqslant m(2k+n).$$

Так как всегда $k>1$, то возможно только $m=0$, откуда получаем

$$r(\xi) = \frac{\alpha_0}{\lambda^{\mathrm{I}}} = \mathrm{const}$$

Докажем, что уравнения, составляющие систему (1), являются независимыми. Эта система имеет такую структуру:

$$-U_0 + C_0^{\mathrm{I}} f_{00}(\alpha_0) + C_1^{\mathrm{I}} f_{01}(\alpha_0) + \ldots + C_n^{\mathrm{I}} f_{0n}(\alpha_0) + \ldots = 0,$$

$$C_0^{\mathrm{I}} f_{10}(\alpha_0, \alpha_1) + C_1^{\mathrm{I}} f_{11}(\alpha_0, \alpha_1) + \ldots + C_n^{\mathrm{I}} f_{1n}(\alpha_0, \alpha_1) + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_0^{\mathrm{I}} f_{s0}(\alpha_0, \ldots, \alpha_s) + C_1^{\mathrm{I}} f_{s1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_s) + \ldots + C_n^{\mathrm{I}} f_{sn}(\alpha_0, \ldots, \alpha_s) + \ldots = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

т. е. она линейна относительно C_n.

Если окажется, что два уравнения

$$C_0^{\mathrm{I}} f_{r0}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r) + C_1^{\mathrm{I}} f_{r1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r) + \ldots + C_n^{\mathrm{I}} f_{rn}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r) + \ldots = 0,$$

и

$$C_0^{\mathrm{I}} f_{s0}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s) + C_1^{\mathrm{I}} f_{s1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s) + \\ + \ldots + C_n^{\mathrm{I}} f_{sn}(\alpha_0, \ldots, \alpha_s) + \ldots = 0$$

зависимы, то должны выполняться такие условия:

$$f_{rn}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r) = \psi(\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \ldots) \cdot \psi_{rn}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots), \tag{12}$$

$$f_{sn}(\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s) = \psi(\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \ldots) \cdot \psi_{sn}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Причем при $\Psi = 0$ все Ψ_{rn} и Ψ_{sn} не должны обращаться в бесконечность. А для того чтобы доказать, что эти два уравнения независимы, достаточно показать, что условия (12) невыполнимы, например, для $n = 0$. В системе уравнений (11) функции при C_0^{I} имеют такую структуру:

$$f_{00} = 0!\, f_{00}(\alpha_0),$$

$$f_{10} = 1!\, \varphi_0(\alpha_0) \cdot \alpha_1,$$

$$f_{20} = 2!\, \varphi_0(\alpha_0)\, \alpha_2 + \varphi_1(\alpha_0, \alpha_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{r0} = r!\, \varphi_0(\alpha_0)\, \alpha_r + \varphi_{r-1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{s0} = s!\, \varphi_0(\alpha_0)\, \alpha_s + \varphi_{s-1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда видно, что для любой пары этих функций нельзя подобрать Ψ, Ψ_{rn} и Ψ_{sn} с заданными свойствами, т. е. чтобы $\Psi_{rn} \neq \infty$ и $\Psi_{sn} \neq \infty$ когда $\Psi = 0$.

Этим доказана независимость уравнений в системе (10).

Возвращаясь к уравнению (9), видим, что при $r(0, \varphi) = \mathrm{const}$ все $C_n^{\mathrm{I}} = 0$, за исключением C_0^{I}. Аналогично можно показать, что только коэффициент C_0^{II} отличен от нуля.

Итак, среди функций, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (8), в аксиально симметричном случае не существует стационарных решений нелинейного уравнения с нелинейностью в виде одной ступеньки, кроме сферически симметричных.

Легко доказать, что для двух, трех и т. д. ступенек это утверждение остается в силе. Итак, метод С. Ф. Шушурина не дает сферически несимметричных стационарных решений. В то же время имеется ряд серьезных доводов (см. [4], § 4 и § 5) в пользу того, что сферически несимметричные решения существуют, например, когда $F'(u^2) = -a^2u^2$. Для этой нелинейности ступенчатую функцию можно записать так:

$$F_n'(u^2) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{U_0}{2k} \geqslant u \\ -\left(a\frac{U_0}{n}\right)^2 & \text{при } \frac{3U_0}{2n} \geqslant u > \frac{U_0}{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ -\left(a\frac{m-1}{n}U_0\right)^2 & \text{при } \frac{2m-1}{2n}U_0 \geqslant u > \frac{2m-3}{2n}U_0 \\ -\left(a\frac{m}{n}U_0\right)^2 & \text{при } \frac{2m+1}{2n}U_0 \geqslant u > \frac{2m-1}{2n}U_0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ -\left(a\frac{n-1}{n}U_0\right)^2 & \text{при } \frac{2n-1}{2n}U_0 \geqslant u > \frac{2n-3}{2n}U_0 \\ -a^2U_0^2 & \text{при } u > \frac{2n-1}{2n}U_0 \end{cases}$$

где n — число ступенек.

Эта запись такова: $\lim\limits_{\Delta k_{mn}} F_n'(u^2) = F'(u^2)$,

$$\text{где } \Delta h_{mn} = (2m-1)\frac{a^2U_0^2}{n^2} \text{ — высота ступеньки.}$$

Почему же метод аппроксимации нелинейности F' ступенчатой функцией не дает сферически несимметричных решений?

Возвратимся опять к одной ступеньке. При стремлении высоты ступеньки a^2 к нулю $F'(u^2) \to 0$ и уравнение (1) превращается в линейное. Но при этом остаются дополнительные условия (6). Они автоматически не исключаются, и поэтому косвенно ограничивают класс решений исходного нелинейного уравнения. Из-за этого в пределе решения, полученные методом аппроксимации нелинейности $F'(u^2)$ функцией $F_n'(u^2)$, вообще говоря, не представляют совокупности всех решений данного нелинейного уравнения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю проф. Я. П. Терлецкому за внимание и помощь в работе а также А. А. Бейлинсону за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, вып. 2(8), 452—457, 1958.
2. Шушурин С. Ф. НДВШ, сер. физ.-мат., наук, **5**, 1958.
3. Шушурин С. Ф. Диссертация. МОПИ, 1961.
4. Schiff H. Proc. Roy. Soc., **A 269**, 277—286, 1962.

Поступила в редакцию
27. 2 1965 г.

Кафедра
теоретической физики