

В. П. КАНДИДОВ, И. В. НЕКРАСОВ, В. Е. ОРДАНОВИЧ

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ЭЛЕКТРОННОЙ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСТАНОВКЕ

Предложен метод исследования электронных моделей существенно неконсервативных систем путем преобразования уравнения движения, основанного на переносе мнимой оси на плоскости собственных чисел. Метод позволяет определять запас устойчивости системы, частоту колебаний с наименьшим коэффициентом затухания и выделять для длительного наблюдения соответствующую собственную форму.

Ряд важных технических задач, связанных с исследованием колебаний и устойчивости различных систем, в линейном приближении сводится к задачам о собственных колебаниях в линейной неконсервативной системе со многими степенями свободы. Одним из методов расчета частот и форм собственных колебаний является электронное моделирование [1, 2, 3].

Для систем с большим числом степеней свободы удобно использовать специализированные моделирующие установки, которые имеют расширенную рабочую полосу, лежащую в звуковом диапазоне. Исследование обычно осуществляется «резонансным методом», предполагающим, что частота и форма вынужденных колебаний при резонансе совпадает с такими же параметрами собственных колебаний. Это предположение справедливо при моделировании консервативных систем, когда добротность модели ограничивается только устойчивостью установки и может быть достаточно велика, например порядка 100—200. В данной работе предлагается прием, основанный на преобразовании уравнений движения, позволяющий применять «резонансный метод» при исследовании на моделирующих установках существенно неконсервативных систем.

Уравнение движения линейной колебательной системы с n степенями свободы запишем в матричном виде

$$M\ddot{x} + H\dot{x} + Kx = 0, \quad (1)$$

где M , H , K — квадратные матрицы n -го порядка,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — } n\text{-мерный вектор смещений.}$$

Частное решение уравнения (1) имеет вид

$$\vec{x}_j = \vec{x}_{0j} e^{\lambda_j t} + \vec{x}_{0j}^* e^{\lambda_j^* t}.$$

Здесь

$$\vec{x}_{0j} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{0j}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{0j}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{matrix} e^{i\varphi_j} \\ \\ \\ e^{i\varphi_n} \end{matrix}$$

комплексный вектор амплитуд, определяющий не только величины амплитуд смещений, но и сдвиги фаз между колебаниями в различных точках системы. По аналогии с консервативными системами \vec{x}_{0j} называется j -той собственной формой колебания. $\lambda_j = (-\delta_j + i\omega_j)$ — собственное число системы, действительная часть которого равна коэффициенту затухания, мнимая — частоте собственных колебаний. Для определенности положим $\delta_j > 0$. Совокупность собственных форм \vec{x}_{0j} и собственных значений λ_j дает полное представление о свойствах колебательной системы.

При исследовании колебательных систем резонансным методом в них возбуждаются вынужденные колебания. Уравнение, описывающее систему при воздействии на нее силы, которую удобно представить в виде

$$\vec{f} = \vec{f}_0 e^{pt} + \vec{f}_0^* e^{p^* t},$$

где $p = \Delta + i\Omega$, будет

$$M\ddot{\vec{x}} + N\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{f}, \quad (2)$$

Простой метод анализа этого уравнения предложен в книге [4]. Введение вектора $\vec{u} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ позволяет свести (2) к матричному уравнению первого порядка

$$\dot{\vec{u}} + B\vec{u} = \vec{F}, \quad (3)$$

$$B = \begin{pmatrix} M^{-1}N & M^{-1}K \\ -E & \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \vec{F}_0 e^{pt} + \vec{F}_0^* e^{p^* t}, \quad \text{где } \vec{F}_0 = \begin{pmatrix} M^{-1}\vec{f}_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\vec{u}_{\text{вынужд.}} = \vec{u}_0 e^{pt} + \vec{u}_0^* e^{p^* t}, \quad (4)$$

где \vec{u}_0 — функция, которая может быть разложена в ряд по собственным формам уравнения (3) \vec{u}_{0j} :

$$\vec{u}_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{u}_{0j} + \alpha_j' \vec{u}_{0j}^*. \quad (5)$$

Разлагая также \vec{F}_0 ,

$$\vec{F}_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{u}_{0j} + \beta_j' \vec{u}_{0j}^*, \quad (6)$$

и подставляя (4), (5), (6) в (3), найдем связь между коэффициентами разложения

$$\alpha_j, \alpha'_j \text{ и } \beta_j, \beta'_j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{p - \lambda_j}; \quad \alpha'_j = \frac{\beta'_j}{p - \lambda_j^*}.$$

Теперь вектор $\vec{u}_{\text{вынужд}}$ запишется так:

$$\vec{u}_{\text{вынужд}} = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{p - \lambda_j} e^{pt} \vec{u}_{0j} + \sum_{j=1}^n \frac{\beta'_j}{p - \lambda_j^*} e^{p^*t} \vec{u}_{0j}^*. \quad (7)$$

Анализ этой формулы показывает, в каких случаях форма вынужденного колебания будет близка к форме соответствующего собственного колебания.

Если $p \approx \lambda_k$, т. е. колебания совершаются с комплексной частотой $p \approx -\delta_k + i\omega_k$, то в разложении (7) преобладает k -тый член. При этом \vec{u}_0 близко к \vec{u}_{0k} независимо от амплитуд координат вектора \vec{F}_0 (коэффициентов разложения β_j). Техническая реализация силы F , имеющей такую временную зависимость, представляет большие трудности, поскольку воздействие не является чисто гармоническим. Из этого следует, что наблюдать вынужденные колебания можно лишь в ограниченные интервалы времени и только те, которым соответствуют собственные значения с наименьшей действительной частью. В противном случае скорость затухания собственных колебаний, возникающих в начальный момент, будет меньше скорости затухания вынужденных.

В том случае, когда в ряде (6) все коэффициенты β_j равны нулю, кроме коэффициента β_k , в формуле (7) так же остается k -тый член, при этом комплексная частота p может быть любой величиной. Вектор \vec{F} таков, что его распределение амплитуд совпадает с собственной формой \vec{u}_{0k} . Синтез вектора \vec{F} может быть осуществлен методом последовательных приближений. Практическое использование этого метода осложняется тем, что вектор \vec{u}_{0k} , а следовательно и F_0 — комплексны, т. е. возбуждающие систему усилия должны иметь не только соответствующее распределение амплитуд по точкам системы, но и фазовые сдвиги.

Изложенные выше методы трудно применить в электронном моделировании для определения δ_j — одной из важных характеристик колебательной системы. Так, по критерию устойчивости, предложенному Цыпкиным и Бромбергом [5], запасом устойчивости называется $\min_j \{|\delta_j|\}$ — меньшая по модулю действительная часть собственных значений системы.

Собственные значения λ_j обычно изображают точками на комплексной плоскости ($\delta, i\omega$) (рис. 1). Определение запаса устойчивости основано на линейном преобразовании характеристического уравнения для λ при помощи подстановки $\lambda = \lambda' - \delta$, где $\delta > 0$. Это соответствует переносу мнимой оси $i\omega$ на δ единиц влево. Параметр δ увеличивают до тех пор, пока не нарушится одно из условий критерия Рауса — Гурвица для определения асимптотической устойчивости. Полученная величина δ_0 называется коэффициентом устойчивости и оказывается равной по модулю наименьшей из действительных частей корней характеристического уравнения системы. Например, для рис. 1 $\delta_0 = \delta_k$.

Рассмотрим, как изменится уравнение движения при таком преобразовании. Решение уравнения (1) в виде $\vec{x}_{0j} = \vec{\xi}_{0j} e^{-\delta t}$ подставим в уравнение (1). При этом получим тождество, справедливое для всех $j=1, 2, \dots, n$,

$$M \ddot{\xi}_{0j} + (H - 2\delta M) \dot{\xi}_{0j} + (K - \delta H + \delta^2 M) \xi_{0j} \equiv 0.$$

Следовательно, $\vec{\xi}_{0j} = \vec{x}_{0j} e^{-(\delta_j - \delta)t} \cdot e^{i\omega_j t}$ является решением такого уравнения:

$$M \ddot{\xi} + H' \dot{\xi} + K' \xi = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) отличается от уравнения (1) только видом матриц H' и K' .

$$\begin{aligned} H' &= H - 2\delta M, \\ K' &= K - \delta H + \delta^2 M. \end{aligned} \quad (9)$$

Колебания, описываемые уравнением (8), обладают таким свойством, что собственные формы $\vec{\xi}_{0j}$ и мнимые части собственных значений (собственные частоты ω_j) точно такие же, как и в системе (1), а действи-

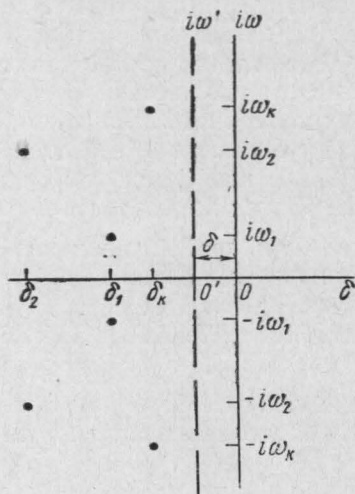


Рис. 1

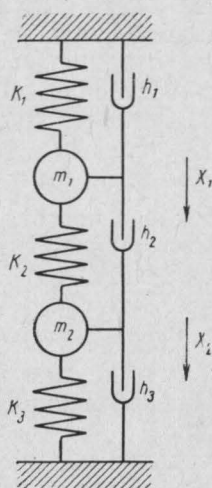


Рис. 2

тельные части собственных значений (коэффициенты затухания δ_j) меньше на величину δ . Иными словами, свойства преобразованной системы, описываемой уравнением (8), отличаются от свойств исходной системы только уменьшением коэффициентов затухания на δ . В преобразованной системе, у которой параметр δ варьируем, могут существовать собственные колебания с формами исходной системы и с различными коэффициентами затухания.

При $\delta = \delta_k$, где δ_k — наименьший коэффициент затухания, в системе возможны незатухающие гармонические колебания, собственная форма которых совпадает с k -той собственной формой системы (1). Колебания в такой системе возникают как и в обычной консервативной — после начального смещения или толчка.

При δ , стремящемся снизу к δ_k , добротность преобразованной системы на k -той частоте будет очень велика, и могут быть получены устойчивые вынужденные колебания, форма которых близка к k -той собственной форме. Возбуждение колебаний осуществляется чисто гармонической силой частоты ω_k с произвольным распределением амплитуд в точках системы. Действительно, если к уравнению (2) применить δ -преобразование, то получим уравнение (8), у которого в правой части стоит выражение вида

$$\vec{f} e^{\delta t} = \vec{f}_0 e^{(\Delta+\delta)t} e^{i\Omega t} + \vec{f}_0^* e^{(\Delta+\delta)t} e^{-i\Omega t}.$$

Форма вынужденных колебаний $\vec{\xi}_{\text{вынужд}}$ близка к k -той собственной \vec{x}_{0k} , если только $\Delta \approx -\delta_k$ и $\Omega \approx \omega_k$. Однако, когда δ приближается к δ_k , экспоненциальный множитель $e^{(\Delta+\delta)t}$ пропадает, и воздействие становится числом гармоническим.

При $\delta > \delta_k$ k -тое собственное значение оказывается в правой полуплоскости ($\delta, i\omega$), и в системе возникают нарастающие колебания k -той формы с огибающей $e^{(\delta-\delta_k)t}$. Поэтому дальнейшее увеличение параметра δ в целях выделения собственных колебаний с большим, чем δ_k , коэффициентом затухания невозможно.

Преобразование (9) имеет наглядный смысл в случае системы с одной степенью свободы, так как $\delta_0 = \frac{h}{2m}$. Когда $\delta = \delta_0$, член при \dot{x} исчезает и система становится консервативной. Однако собственная частота равна $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Метод δ -преобразования в неконсервативных системах позволяет определить запас устойчивости, частоту колебания с наименьшим коэффициентом затухания и выделить для длительного наблюдения соответствующую собственную форму. Технически реализовать систему с матрицами трения H' и жесткостью K' , в которых параметр δ варьируем, наиболее просто на электронных моделирующих установках.

Описанная выше методика была проверена на электронной модели неконсервативной механической системы с двумя степенями свободы (рис. 2). Ее уравнения движения в развернутом виде могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (h_1 + h_2) \dot{x}_1 - h_1 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - h_2 \dot{x}_1 + (h_2 + h_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Собственные формы такой системы полностью определяются комплексным коэффициентом распределения

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j = k_j e^{i\varphi_j} &= \frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1 \lambda_j^2 + (h_1 + h_2) \lambda_j + k_1 + k_2}{h_2 \lambda_j + k_2} = \\ &= \frac{h_2 \lambda_j + k_2}{m_2 \lambda_j^2 + (h_2 + h_3) \lambda_j + k_2 + k_3}. \end{aligned}$$

Модуль коэффициента распределения k_j и его аргумент φ_j равны отношению амплитуд и фазовым сдвигам между колебаниями x_1 и x_2 . Собственные значения λ_j являются корнями соответствующего характеристического уравнения. Найти решение этого уравнения, которое в общем случае является полным уравнением четвертой степени с корнями, ле-

жащими в комплексной плоскости ($\delta, i\omega$), не представляется возможным. Для приближенного решения положим, что мнимая часть корня ω_j является решением характеристического уравнения консервативной системы, т. е. при $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Для действительной части δ_j корня можно получить следующее выражение:

$$\delta_j = \frac{(n_1^2 - \omega_j^2) \Delta_2 - (n_2^2 - \omega_j^2) \Delta_1 - \frac{h_1 k_2}{m_1 m_2}}{n_1^2 + n_2^2 - 2\omega_j^2 - \frac{h_2^2}{m_1 m_2}}; \quad (10)$$

$$\Delta_1 = \frac{h_1 + h_2}{2m_1}; \quad \Delta_2 = \frac{h_2 + h_3}{2m_2}; \quad n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}; \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}; \quad j = 1, 2.$$

Выбор численных значений параметров системы был обусловлен стремлением получить значительные сдвиги фаз между координатами x_1 и x_2 . Для этого оказалось достаточным положить $k_2 \ll k_1, k_3$ и $h_2 > h_1 = h_3$.

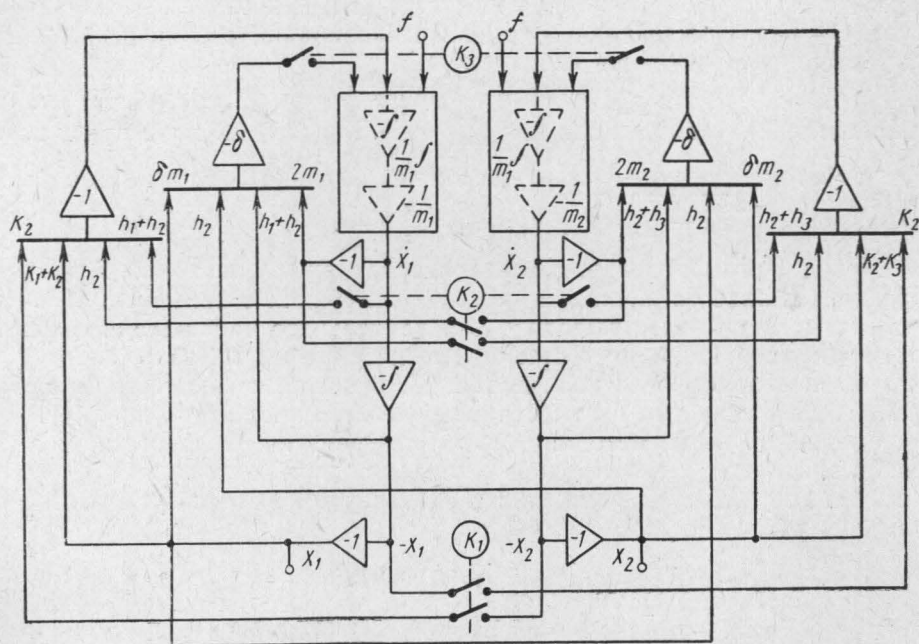


Рис. 3

Ниже приведен один из наборов значений параметров в единицах CGS.

$$K_1 = 3,6 \cdot 10^4, \quad K_2 = 2 \cdot 10^3, \quad K_3 = 8 \cdot 10^4,$$

$$h_1 = h_3 = 4, \quad h_2 = 6,$$

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 2.$$

Электронная модель рассмотренной механической системы была набрана на специализированной моделирующей установке, разработанной на кафедре проф. С. П. Стрелкова (МГУ). На рис. 3 приводится структурная схема электронной модели. Простое переключение (K_3) позволяет совершать преобразование матриц, указанное в (9), которое

осуществляется введением двух дополнительных операционных усилителей. Из структурной схемы видно, что эта дополнительная цепь представляет собой специализированную положительную обратную связь. Модель предусматривает плавное изменение коэффициента обратной связи δ в широких пределах.

Испытания модели заключались в исследовании вынужденных колебаний под воздействием гармонической силы. Величина δ_j измерялась по ширине резонансной кривой; частота ω_j — в точке, где достигается максимум амплитуды колебаний; модуль коэффициента распределения — как отношение амплитуд колебаний $\frac{x_{2\text{рез}}}{x_{1\text{рез}}}$; разность фаз между x_1 и x_2 измерялась на специально созданном фазометре.

На рис. 4 приведена зависимость амплитуды x_1 от частоты вынуждающей силы в том случае, когда она подается только на массу m_1 . Там же представлена соответствующая зависимость для x_2 , при этом вынуждающая сила подается только на m_2 . На рисунке кривая 1 (пунктирная) соответствует консервативной системе, кривая 2 (пунктир с точкой) — неконсервативной и кривая 3 (прямая линия) — преобразованной системы с введенным δ . Из кривых видно, что резонансные частоты преобразованной системы находятся ближе друг к другу, чем частоты консервативной системы. Этот эффект должен иметь место для неконсервативных колебательных систем.

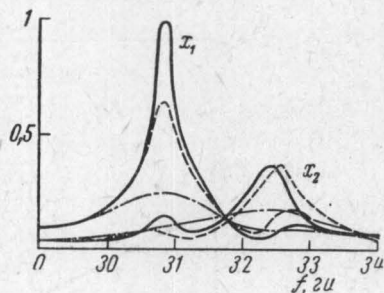


Рис. 4

Заметим, что модель консервативной системы имеет конечное затухание $\delta_{\text{уст}}=0,7$. Если предположить аддитивность коэффициентов затухания системы и вносимого электронной моделирующей установкой, то в модели неконсервативной системы коэффициент затухания будет $\delta'_j = \delta_j + \delta_{\text{уст}}$.

В модели преобразованной системы коэффициент затухания — $\delta_j + \delta_{\text{уст}} - \delta$. Эксперимент подтверждает сделанные предположения. На рис. 5,а прямая 1 представляет вычисленную зависимость выражения $(\delta_1 + \delta_{\text{уст}} - \delta)$ от величины δ ; кривая 2 проведена по экспериментально полученным точкам.

Поскольку собственные колебания выделяются с помощью внешней силы по первому из методов, описанных выше, то интересно исследовать влияние точек приложения силы и места измерения резонанса на качество совпадения параметров вынужденных и собственных колебаний. С этой целью в области каждого ω_j получали четыре набора всех интересующих нас данных. 1) Вынуждающая сила подается на 1-ю массу: а) резонанс настраивается по x_1 и б) резонанс настраивается по x_2 ; 2) вынуждающая сила подается на 2-ю массу: а) резонанс настраивается по x_1 и б) резонанс настраивается по x_2 .

На рис. 5,б и 5,в приведены измеренные значения модуля коэффициента распределения и сдвига фаз между координатами для колебаний с наименьшим коэффициентом затухания ($j=1$) в зависимости от параметра δ . При $\delta=0$, что соответствует исходной неконсервативной системе, резонансные формы, снятые различным образом, сильно отличаются друг от друга и от рассчитанного значения, нанесенного пунктиром. Система настолько мало добротна, что часть из четырех возможных резонансов либо отсутствует, либо проявляется крайне слабо (это можно, в частности, видеть на рис. 4 — кривая 2). При увеличении δ на-

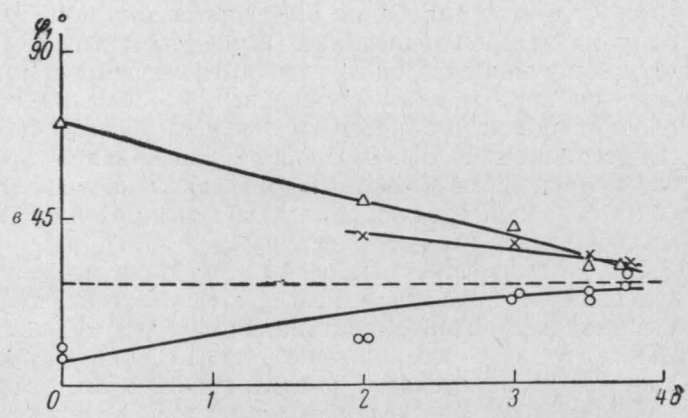
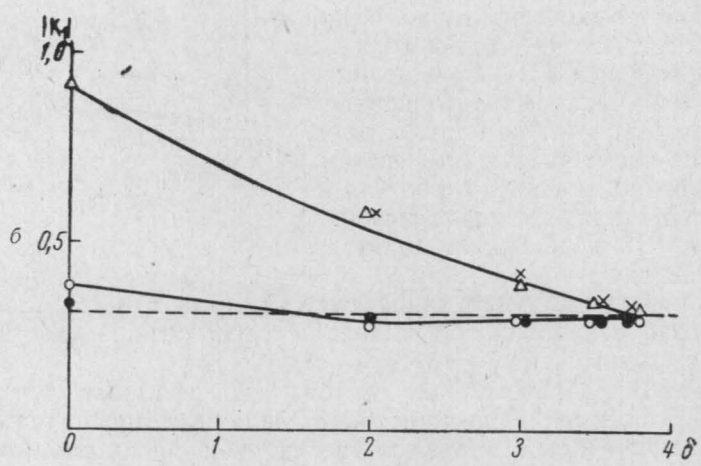
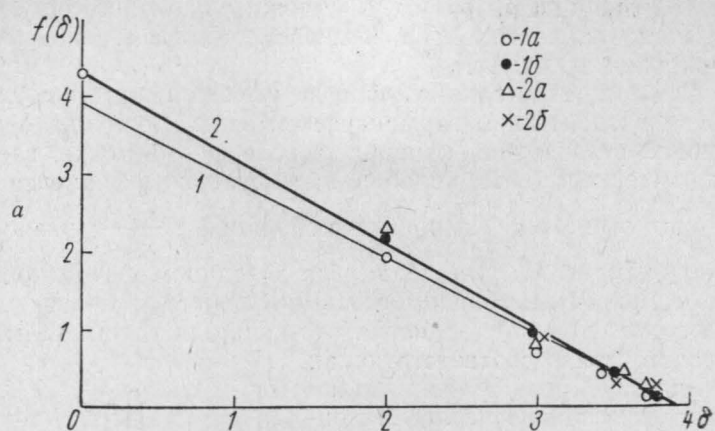


Рис. 5 а, б, в

блюдается сближение результатов между собой и их асимптотическое приближение к вычисленным, так что для $\delta \approx \delta_1 + \delta_{уст}$ при наблюдении и возбуждении системы в любой точке получается один результат, практически совпадающий с теоретическим. Как и следовало ожидать, наиболее хорошее совпадение получается в случае 1,а на частоте ω_1 , т. е. когда, действуя на первую массу, мы измеряем интересные нас результаты на первой частоте.

Для частоты ω_2 наилучшее совпадение было получено в случае 2,б. Заметим, что при равенстве $\delta = \delta_j^{min} + \delta_{уст}$ практически возможно наблюдать собственные колебания неконсервативной системы без какой-либо вынуждающей силы. В таблице приведены результаты численного расчета собственных форм и собственных значений системы и экспериментальные данные.

Далее на модели были получены зависимости δ_j , $|\tilde{K}_j|$, φ_j от расстройки парциальных систем $\zeta^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$. При малой связанности систем ($k_2 \ll k_1, k_3$ и $\zeta^2 \neq 1$) собственные частоты близки к парциальным, поэтому за номер собственного значения возьмем номер парциальной системы. Так, собственная частота ω_1 всегда близка к парциальной частоте n_1 , в то время как из графика Вина следует, что при $\zeta^2 < 1$ ω_1 близка к n_1 , а при $\zeta^2 > 1$ ω_1 близка к n_2 [4]. Поэтому приводимые ниже графики при $\zeta^2 = 1$ имеют характерные изломы или скачки. Полученная зависимость $|\tilde{K}_{1,2}|$ от расстройки ζ^2 имеет такой же вид, как и для консервативной системы. Однако при принятой нумерации собственных значений k_2 всегда больше k_1 , кроме точки $\zeta^2 = 1$, где $k_1 = k_2$.

Зависимость действительной части корня характеристического уравнения от расстройки показана на рис. 6. Выше была получена формула (10), связывающая δ_j с параметрами системы и собственной частотой. Для сравнения результатов эксперимента с расчетами сделаем в (10) следующие упрощения. Поскольку 4-й член в знаменателе много меньше остальных, то им можно пренебречь. При малой связанности систем можно считать, что $\omega_1 = n_1$ и $\omega_2 = n_2$. Тогда

$$\delta_1 = \Delta_1 - \frac{b}{1 - \zeta^2}; \quad \delta_2 = \Delta_2 + \frac{b}{1 - \zeta^2}; \quad \text{где } b = \frac{h_2 k_2}{m_1 m_2 n_2^2}.$$

Вычислим первые производные

$$\frac{\partial(\delta_1)}{\partial(\zeta^2)} = -\frac{b}{(1 - \zeta^2)^2} < 0; \quad \frac{\partial(\delta_2)}{\partial(\zeta^2)} = \frac{b}{(1 - \zeta^2)^2} > 0.$$

Следовательно, δ_1 убывает, а δ_2 возрастает почти на всем интервале изменения ζ^2 . При $\zeta^2 = 1$ обе функции имеют вертикальный скачок. Можно

	Расчет		эксперимент	
	$j=1$	$j=2$	$j=1$	$j=2$
n	194,9	202,5	194,9	202,5
$\omega_{конс}$	193,5	203,9	193,2	205,0
$\omega_{неконс}$	—	—	194,1	203,7
δ_j	3,2	4,3	3,2	4,15
k_j	0,314	1,6	0,3	1,57
φ_j	26,5°	-34,5° (146,5°)	30°	142°

найти асимптотическое поведение δ_1 и δ_2 при $\zeta^2 \rightarrow 0$ и $\zeta^2 \rightarrow \infty$. При $\zeta^2 \rightarrow 0$ $\delta_1 \rightarrow \Delta_1 - b$, $\delta_2 \rightarrow \Delta_2 + b$. При $\zeta^2 \rightarrow \infty$ $\delta_1 \rightarrow \Delta_1$ сверху, а $\delta_2 \rightarrow \Delta_2$ снизу. Полученные расчеты хорошо подтверждаются графиками (см. рис. 6). Для оценки точности предложенного описания можно рассчитать первую точку пересечения. Она определяется из уравнения

$$\Delta_1 - \frac{b}{1 - \zeta^2} = \Delta_2 + \frac{b}{1 - \zeta^2}.$$

При $\zeta^2 \neq 1$ получили $\zeta^2 = 1 - \frac{2b}{\Delta_1 - \Delta_2}$. Относительная ошибка численного расчета по сравнению с экспериментальными данными составляет менее 5%.

Описанное δ -преобразование системы уравнений было применено для исследования на электронной моделирующей установке поведения

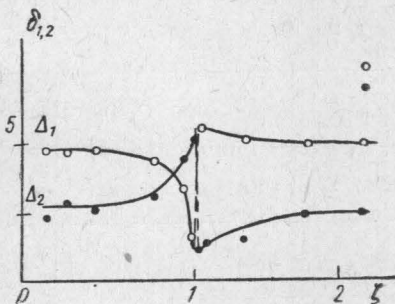


Рис. 6

крыла самолета с элероном в воздушном потоке. Методом Бубнова-Галеркина, как это описано в работе [6], задача была сведена к исследованию системы с тремя степенями свободы. Для преобразования матриц (9) потребовалось по одному дополнительному операционному усилителю на каждую степень свободы. В процессе измерений были получены траектории собственных чисел системы при разных значениях парциальных частот элерона, зависимости коэффициентов затухания и собственных форм от скорости набегающего потока. Метод δ -преобразования позволил исследовать поведение корней и форм собственных колебаний в областях, далеких от флаттера. Были получены собственные формы, собственные значения которых настолько близки друг к другу, что при обычном резонансном методе формы не наблюдаются раздельно.

Простой переменной знака параметра δ , что эквивалентно переносу мнимой оси вправо, удается исследовать неустойчивые колебательные системы. В случаях, когда действительные части нескольких собственных значений близки к наибольшей, δ -преобразование дает хорошие результаты для параметров соответствующих собственных колебаний. Применение описанного метода в электронных моделях существенно неконсервативных систем не требует значительного увеличения объема оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орданович А. Е., Стрелков С. П. НДВШ, сер. физ.-мат. наук, № 2, 181—188, 1958.
2. Баранов А. В., Кандидов В. П., Орданович А. Е. Доклады IV межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования, сб. 3, 141—151, М., 1962.
3. Баранов А. В., Кандидов В. П., Орданович А. Е. Доклады IV межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования, сб. 3, 153—161, М., 1962.
4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.
5. Булгаков Б. В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954.
6. Харламов А. А. НДВШ, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1958.

Поступила в редакцию
19. 3 1965 г.

Кафедра
общей физики для мехмата