

Т. М. ИЛЬИНОВА

## К ТЕОРИИ ДВУХФОТОННОГО ЛАЗЕРА

Получены уравнения, описывающие нестационарные процессы в двухфотонном лазере. В приближении заданного поля выведены условия самовозбуждения такой системы. Показано, что при метастабильном втором рабочем уровне можно возбуждать поле  $E_1$  разностной частоты  $\omega_1$  даже в отсутствии начальной инверсной разности населенностей, если поле  $E_2$  от внешнего когерентного источника больше некоторой пороговой величины. Исследуется стационарный режим и его устойчивость.

Новый интенсивный источник света, механизм работы которого основан на явлении двухфотонных квантовых переходов, был предложен А. М. Прохоровым и А. Селиваненко. Позднее об аналогичном двухфотонном лазере сообщалось в работах [1, 2].

Лазер состоит из резонатора с двумя собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в который помещается активное вещество с начальной инверсной разностью населенностей  $N_{21}^0$ . Между частотами резонатора и частотой рабочего перехода  $\omega_{21}$  выполняется соотношение  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{21}$  (рис. 1). Чтобы предотвратить возбуждение системы на частоте  $\omega_{21}$ , надо обеспечить низкую отражательную способность зеркал резонатора на этой частоте, или сильное паразитное поглощение в лазерном материале вблизи  $\omega_{21}$ , или подобрать такое активное вещество, чтобы переход  $2 \rightarrow 1$  был совсем запрещен для одноквантового процесса.

В работе [3] показано, что вероятность двухфотонного процесса на световых частотах под действием поля на частоте  $\omega_2$  становится достаточно большой, так что при выполнении определенных условий система может возбудиться на разностной частоте  $\omega_1$ .

В настоящей статье исследуются условия возбуждения поля  $E_1$  в приближении заданного поля  $E_2$ . Изучается стационарный режим такого лазера и его устойчивость. В Приложении дан вывод уравнений, описывающих нестационарные процессы в двухфотонном лазере. Эти уравнения получены независимо от работ [4, 5].

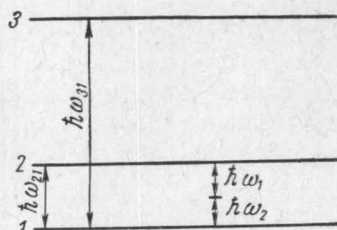


Рис. 1. Схема энергетических уровней

### Приближение заданного поля

Поле  $E_2$  частоты  $\omega_2$  задается постоянным от внешнего источника. Считаем, что второй рабочий уровень является метастабильным и что неравенство (25) из Приложения выполнено. В этом случае система уравнений (23), описывающая нестационарные процессы в двухфотонном лазере, преобразуется (уравнения для амплитуды  $E_2$  и фазы  $\varphi_2$  исключаются):

$$\begin{aligned} \frac{dP_3}{dt} &= -\frac{P_3}{T_{12}} - \frac{2\rho_{12}}{\hbar} aE_1E_2N_{21} \sin \Phi, \\ \frac{dE_1}{dt} &= -\delta_1 E_1 - 4\pi\rho_{12}\omega_1 aE_2\rho_3 \sin \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta + \varepsilon N_{21} - \frac{2\rho_{12}}{\hbar} a \frac{E_1E_2}{P_3} N_{21} \cos \Phi - 4\pi\rho_{12}a\omega_1 \frac{E_2}{E_1} P_3 \cos \Phi, \quad (1) \\ \frac{dN_{21}}{dt} &= -\frac{N_{21} - N_{21}^0}{T_1} + \frac{8\rho_{12}}{\hbar} aE_1E_2P_3 \sin \Phi + 2(A - BN_{21})(E_1^2 + E_2^2), \end{aligned}$$

где

$$\Phi = \varphi_1 - \psi, \quad \Delta = \Delta\omega - 2\pi\omega_1 C,$$

$$\varepsilon = 2\pi\omega_{21}D + 2\pi\omega_1 \frac{\rho_{12}^2}{\hbar\omega_2}.$$

Уравнения стационарного движения ( $\frac{dP_3}{dt} = \frac{dE_1}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dN_{21}}{dt} = 0$ ) допускают следующие решения:

$$P_3' = E_1' = 0,$$

$$\operatorname{ctg} \Phi' = -\frac{(\Delta + \varepsilon N_{21}') T_{12}}{1 + \frac{8\pi\rho_{12}^2}{\hbar} \omega_1 T_{12} (aE_2)^2 N_{21}' \sin^2 \Phi}, \quad (2)$$

$$N_{21}' = \frac{N_{21}^0 + 2AT_1 E_2^2}{1 + 2BT_1 E_2^2},$$

$$P_3'' = -\frac{2\rho_{12}}{\hbar} T_{12} aE_2 E_1'' N_{21}'' \sin \Phi',$$

$$\operatorname{ctg} \Phi'' = -(\Delta + \varepsilon N_{21}'') T,$$

$$E_1''^2 = \frac{(N_{21}^0 + 2AT_1 E_2^2) - (1 + 2BT_1 E_2^2) N_{21}''}{T_1 \left( \frac{1}{\pi\hbar Q_1} - 2A + 2BN_{21}'' \right)}, \quad (2')$$

$$\varepsilon T N_{21}'' = \frac{8\pi\rho_{12}^2}{\hbar\varepsilon T} Q_1 T (aE_2)^2 - \Delta T \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[ \frac{8\pi\rho_{12}^2}{\hbar\varepsilon T} Q_1 T (aE_2)^2 \right]^2 - \frac{16\pi\rho_{12}^2}{\hbar\varepsilon T} Q_1 T_{12} (aE_2)^2 \Delta T - 1},$$

где  $T = T_{12} (1 + \delta_1 T_{12})^{-1}$ ,  $Q_1 = \frac{\omega_1}{2\delta_1}$  — добротность резонатора.

При выводе выражений (2)' считали, что выполняется неравенство (25), т. е. при  $\rho_{12}^2 \sim 10^{-40} \text{CGS}$ ,  $Q_1 \sim 10^7$ ,  $T_{12} \sim 10^{-10} \text{сек}$ ,  $\omega_1, \omega_2 \sim 10^{15} \text{сек}^{-1} N_{21}^0$  должно быть  $\ll 10^{25} \text{см}^{-3}$ . Если  $N_{21}^0 \ll 10^{21} \text{см}^{-3}$  ( $\rho_{13}, \rho_{23} \sim 10^{-18} \text{CGS}$ ), то можно пренебречь членом  $2BN_{21}$  в знаменателе для  $E_1^{*2}$  (12).

### Условия возбуждения

Решение (2) определяет состояние равновесия системы. Состояние равновесия является устойчивым всюду, кроме области расстройк  $\Delta$ :

$$N_{21}' \varepsilon T_{12} - \sqrt{\frac{16\pi\rho_{12}^2}{\hbar} Q_1 T_{12} (aE_2)^2 N_{21}' - 1} < \Delta T_{12} < -N_{21}' \varepsilon T_{12} + \sqrt{\frac{16\pi\rho_{12}^2}{\hbar} Q_1 T_{12} (aE_2)^2 N_{21}' - 1}, \quad (3)$$

где  $N_{21}'$  — равновесная разность населенностей.

### Стационарный режим

Решение (2') описывает стационарный режим двухфотонного лазера. Резонансная кривая возбуждения поля  $E_1$  имеет вид

$$E_1^{*2} = \frac{1}{T_1 \left( \frac{1}{\pi\hbar Q_1} - 2A \right)} [N^0 - a_1 (b_1 - \Delta T \pm \sqrt{b_1^2 - 2b_1 \Delta T - 1})], \quad (4)$$

где

$$a_1 = \frac{1 + 2BT_1 E_2^2}{\varepsilon T}, \quad b_1 = \frac{8\pi\rho_{12}^2}{\hbar\varepsilon T} Q_1 T_{12} (aE_2)^2,$$

$$N^0 = N_{21}^0 + 2AT_1 E_2^2.$$

Возбуждение поля с частотой  $\omega_1$  имеет место внутри конечной области расстройк  $\Delta$ . Границы этой области определяются из условия  $E_1^{*2} = 0$

$$\Delta_1 < \Delta < \Delta_2,$$

$$T\Delta_{1,2} = -\frac{N^0}{a_1} \pm \sqrt{\frac{2b_1 N^0}{a_1} - 1}. \quad (5)$$

Ширина основания резонансной кривой

$$T(\Delta_2 - \Delta_1) = 2\sqrt{\frac{2b_1 N^0}{a_1} - 1}. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (3) и (5), (6), нетрудно видеть, что внутри области расстройк  $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$  положение равновесия 2 неустойчиво и имеет место возбуждение поля  $E_1$ , резонансная кривая которого описывается формулой (4).

Для существования области возбуждения поля  $E_1$  необходимо, чтобы подкоренное выражение в (5) было больше нуля:

$$\frac{2b_1 N^0}{a_1} - 1 > 0. \quad (7)$$

Неравенство (7) для  $A > 0$  выполняется, если поле внешнего источника  $E_2$  больше некоторой пороговой величины

$$E_2^2 > \frac{-(b_2 N_{21}^0 - a_2) + \sqrt{(b_2 N_{21}^0 - a_2)^2 + 4AT_1 b_2}}{4AT_1 b_2}, \quad (8)$$

где

$$a_2 = BT_1; \quad b_2 = \frac{8\pi p_{12}^2}{\hbar} Q_1 T_{12} a^2.$$

Как видно из (8), возбуждение поля  $E_1$  происходит и в случае начальной разности населенностей  $N_{21}^0 = 0$ . Поле  $E_2$  при этом должно удовлетворять условию

$$E_2^2 > E_{2\text{пор}}^2 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4AT_1 b_2}}{4Ab_2 T_1}.$$

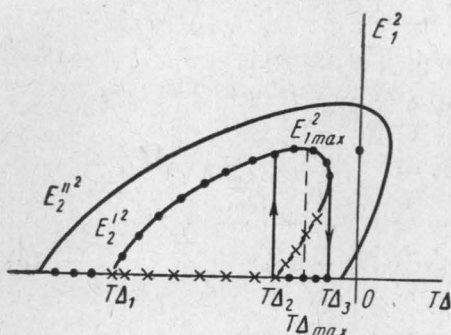


Рис. 2. Резонансные кривые возбуждения поля  $E_1$  под действием поля  $E$  резонансной частоты  $\omega_2$ .  $E^{II^2} > E^{I^2}$ . Кривые построены для случая  $\varepsilon > 0$

Возможность возбуждения поля  $E_1$  в этом случае объясняется тем, что при величине поля  $E_2 > E_{2\text{пор}}$  рабочие уровни оказываются инвертированными.

Если  $A < 0$ , то возбуждение наблюдается только при начальной разности населенностей

$$N_{21}^0 > \frac{a_2 + \sqrt{4|A|T_1 b_2}}{b_2}$$

и для значений поля  $E_2$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{(b_2 N_{21}^0 - a_2) - \sqrt{(b_2 N_{21}^0 - a_2)^2 - 4|A|T_1 b_2}}{4|A|T_1 b_2} < E_2^2 < \frac{(b_2 N_{21}^0 - a_2) + \sqrt{(b_2 N_{21}^0 - a_2)^2 - 4|A|T_1 b_2}}{4|A|T_1 b_2}.$$

Резонансные кривые для поля  $E_1$  изображены на рис. 2. Наклон кривых в ту или другую сторону, а также смещение их по оси  $\Delta$ , определяется знаком величины  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon > 0$  резонансные кривые наклонены вправо, при  $\varepsilon < 0$  — влево; при  $\varepsilon > 0$  происходит смещение резонансных кривых влево по оси абсцисс, а при  $\varepsilon < 0$  — вправо. Резонансные кривые напоминают кривые параметрического возбуждения для реактивной нелинейности.

Правая граница (для  $\varepsilon > 0$ ) области существования стационарной амплитуды  $E_1''$  определяется формулой

$$T\Delta_3 = \frac{b_1^2 - 1}{2b_1}.$$

Максимальная амплитуда поля  $E_1$  достигается при

$$T\Delta_{\text{max}} = -\frac{1}{2b_1}$$

и равна

$$E_{\text{imax}}^2 = \frac{N^0 - \frac{a_1}{2b_1}}{T_1 \left( \frac{1}{\pi h Q_1} - 2A \right)}. \quad (9)$$

### Устойчивость стационарных колебаний

При исследовании устойчивости стационарных колебаний (2',1) использовался метод, предложенный в работе [6].

Укороченные уравнения (1), описывающие неустановившиеся процессы в системе, не являются равноценными. Правые части уравнений для  $P_3$  и  $\Phi$  по абсолютной величине значительно больше правых частей для  $E_1$  и  $N_{21}$ . Это позволяет внести в укороченные уравнения малые параметры

$$\mu_1 = \delta_1 T_{12}, \quad \mu_2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Неравноценность укороченных уравнений означает, что при нарушении стационарного режима сначала идет установление по «быстрым» переменным  $P_3$  и  $\Phi$  (в это время «медленные» переменные  $E_1$  и  $N_{21}$  можно считать неизменными и равными начальным значениям), а затем «медленное» установление по  $E_1$  и  $N_{21}$  («быстрые» переменные теперь квазистатически следят за «медленными»). Устойчивость по быстрым переменным определяется условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_3} \left( \frac{dP_3}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right) < 0, \\ \frac{\partial}{\partial P_3} \left( \frac{dP_3}{dt} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{dP_3}{dt} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial P_3} \left( \frac{d\Phi}{dt} \right) > 0, \end{aligned}$$

которые всегда выполняются. По «быстрым» переменным система устойчива.

Для описания медленных движений имеем систему уравнений

$$0 = -\frac{P_3}{T_{12}} - \frac{2\rho_{12}}{h} a E_1 E_2 N_{21} \sin \Phi,$$

$$0 = \Delta + \varepsilon N_{21} - \frac{2\rho_{12}}{h} a \frac{E_1 E_2}{P_3} \cos \Phi - 4\pi\rho_{12}a\omega_1 \frac{E_2}{E_1} P_3 \cos \Phi;$$

$$\frac{dE_1}{dt} = -\delta_1 E_1 - 4\pi\rho_{12}\omega_1 a E_2 P_3 \sin \Phi,$$

$$\frac{dN_{21}}{dt} = -\frac{N_{21} - N_{21}^0}{T_1} + \frac{8\rho_{12}}{h} a E_1 E_2 P_3 \sin \Phi + 2(A - BN_{21})(E_1^2 + E_2^2).$$

Устойчивость по переменным  $E_1$  и  $N_{21}$  определяется условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E_1} \left( \frac{dE_1}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial N_{21}} \left( \frac{dN_{21}}{dt} \right) < 0, \\ \frac{\partial}{\partial E_1} \left( \frac{dE_1}{dt} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial N_{21}} \left( \frac{dN_{21}}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial N_{21}} \left( \frac{dE_1}{dt} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial E_1} \left( \frac{dN_{21}}{dt} \right) > 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Подставляя в соотношения (10) стационарные значения для  $N_{21}''$  и  $E_1''$  из (2'), получим, что устойчивость по «медленным» переменным наблюдается только для верхней ветви  $AB$  резонансной кривой (4) (со знаком «минус»). Другая ветвь  $BC$  (знак «плюс») неустойчива. Положения равновесия на верхней ветви резонансной кривой  $AB$  являются устойчивыми узлами или фокусами в зависимости от величины поля  $E_2$ ; на нижней ветви  $BC$  они являются «седлами». Оценим величины  $E_2$  и  $N_{21}^0$  необходимые для возбуждения поля  $E_1$ . Пусть кристалл рубина с разностью населенностей  $N_{21}^0$  ( $\rho_{13}, \rho_{23} \sim 10^{-18}$  CGSE;  $\rho_{12} \approx 10^{-20}$  CGSE;  $W_{31} + W_{32} \sim 10^8$  сек $^{-1}$ ;  $T_{12} = T_{23} = T_{13} \sim 10^{-10}$  сек;  $\omega_{31} = 2,5 \cdot 10^{15}$  сек $^{-1}$ ;  $\omega_{21} = 1,8 \times 10^{15}$  сек $^{-1}$ ), помещенный в резонатор с добротностью  $Q_1 = 10^7$  на частоте  $\omega_1 = 1,2 \cdot 10^{15}$  сек $^{-1}$ , облучается полем  $E_2$  частоты  $\omega_2 = 0,6 \cdot 10^{15}$  (от невидимого лазера). При заданных параметрах неравенства (18), (24) и (25) выполняются вплоть до полей  $E^2 \ll 10^{10}$  CGSE и  $N_{21}^0 \ll 10^{21}$  см $^{-3}$ . Если начальная разность населенностей  $N_{21}^0 = 2 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$  и  $T_1 = 3 \times 10^{-3}$  сек, то для возбуждения поля разностной частоты  $\omega_1$  когерентная накачка  $E_2^2$  (формула (8)) должна быть больше  $7 \cdot 10^3$  CGSE. При  $N_{21}^0 = 0$  также можно возбудить систему на частоте  $\omega_1$ , если  $E_2^2 > E_{2\text{пор}}^2 = 2 \cdot 10^4$  CGSE. Если  $E_2^2 = 10^4$  CGSE и  $N_{21}^0 = 2 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$ , то для  $E_{1\text{макс}}$  найденного по формуле (9), получим величину порядка 8 ед. CGSE.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ. При анализе процессов в двухфотонном лазере исходим из уравнений движения для матрицы плотности  $\hat{\rho}$  и уравнений для полей  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в резонаторе с двумя собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\frac{d\rho_{mn}}{dt} + \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H})_{mn} = \begin{cases} \sum_k (W_{km}\rho_{kk} - W_{mk}\rho_{mm}), & m = n, \\ -\frac{\rho_{mn}}{T_{mn}} & m \neq n, \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{d^2\varepsilon_r}{dt^2} + 2\delta_r \frac{d\varepsilon_r}{dt} + \omega_r^2 \varepsilon_r = -4\pi \frac{d^2 p(\omega_1, \omega_2)}{dt^2}, \quad r = 1, 2. \quad (12)$$

Гамильтониан системы  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$  состоит из невозмущенной части  $\hat{H}_0$  и оператора энергии дипольного взаимодействия  $\hat{H}' = -\hat{p}\hat{\varepsilon}$  вещества с полем  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \tilde{E}_1 e^{i\omega_1 t} + \tilde{E}_2 e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.}$   $W_{mk}$  — вероятность перехода с уровня  $m$  на уровень  $k$  (в оптическом диапазоне  $W_{mk} \gg W_{km}$ , если  $m > k$ ).  $T_{mn}$  — время релаксации соответствующего недиагонального элемента для матрицы плотности ( $T_{mn} = T_{nm}$ ).  $\delta_r$  — затухание в резонаторе на частоте  $\omega_r$  ( $r = 1, 2$ ). Поляризация в системе на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , обусловленная взаимодействием полей  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  с веществом, определяется уравнением

$$p(\omega_1, \omega_2) = \sum_m (p_{2m}\rho_{m2} + \rho_{1m}p_{m1}) + \text{к. с.} \quad (13)$$

Для простоты рассматриваем трехуровневую систему, считая при этом выполненным условие

$$\omega_{31}, \omega_{32} \gg \omega_{21} = \omega_1 + \omega_2 - \Delta\omega. \quad (14)$$

Это допущение не имеет принципиального значения, но значительно упрощает расчеты.

Матрицу дипольного момента считаем симметричной с равными нулю диагональными элементами. Отметим также, что в оптическом диапазоне при всех практически достижимых полях выполняются условия

$$\frac{1}{\omega_{mn} T_{mn}}, \frac{\rho_{m\nu} \varepsilon}{\hbar \omega_{mn}} \ll 1. \quad (15)$$

Накачку системы учитываем в  $W_{13}$ .

В системе присутствуют только поля с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , далекими от частот  $\omega_{31}$  и  $\omega_{32}$ . Поэтому в исходных уравнениях (11) можно пренебречь производными

$$\frac{d\rho_{13}}{dt} = \frac{d\rho_{31}^*}{dt} = i\omega_r \rho_{13}, \quad \frac{d\rho_{23}}{dt} = \frac{d\rho_{32}^*}{dt} = i\omega_r \rho_{23}.$$

Совместное решение четырех алгебраических уравнений позволяет выразить матричные элементы  $\rho_{13} = \rho_{31}^*$  и  $\rho_{23} = \rho_{32}^*$  через  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{21}$  и  $N_{mn} = \rho_{mm} - \rho_{nn}$ :

$$\rho_{m3} = \frac{i\varepsilon}{\hbar k_{m3} k_{n3}} \left[ k_{n3} (\rho_{m3} N_{3m} - \rho_{n3} \rho_{mn}) + \frac{i}{\hbar} \rho_{mn} (\rho_{n3} N_{3n} - \rho_{m3} \rho_{nm}) \varepsilon \right], \quad (16)$$

где

$$m, n = 1, 2; k_{m3} = k_{3m}^* = -i\omega_{3m} + \frac{1}{T_{m3}}.$$

Оставшиеся уравнения системы (11) с учетом соотношений (14)–(16) принимают вид

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} + \left( \frac{1}{T'_{12}} - i\Omega_{21} \right) \rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \rho_{12} (1 + a\varepsilon) \varepsilon N_{21},$$

$$\frac{dN_{21}}{dt} + \frac{1}{2} (W_{13} + 2W_{21} + L) N_{21} - \frac{1}{2} (W_{13} - 2W_{21} + M) N_0 =$$

$$= \frac{2i}{\hbar} \rho_{12} (1 + a\varepsilon) \varepsilon (\rho_{12} - \rho_{21}) + \left( W_{32} - W_{31} + W_{21} - \frac{1}{2} W_{13} - \frac{3}{2} L \right) \rho_{33}, \quad (17)$$

$$\frac{d\rho_{33}}{dt} = -\frac{1}{2} (W_{13} + M) N_{21} + \frac{1}{2} (W_{13} + L) N_0 - \left( W_{31} + W_{32} + \frac{1}{2} W_{13} + \frac{3}{2} L \right) \rho_{33}.$$

Здесь

$$a = \frac{\rho_{13} \rho_{23}}{\hbar \omega_{31} \rho_{12}}, \quad \frac{1}{T'_{12}} = \frac{1}{T_{12}} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \left( \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} + \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} \right),$$

$$\Omega_{21} = \omega_{21} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} (\omega_{32} \rho_{23}^2 - \omega_{31} \rho_{13}^2),$$

$$L = \frac{2\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \left( \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} + \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} \right), \quad M = \frac{2\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \left( \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} - \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} \right).$$

При выводе уравнений (17) использовали следующие соотношения:  $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = N_0$  и  $N_{21} = \rho_{22} - \rho_{11}$ ;  $N_0$  — число активных частиц в 1 см<sup>3</sup> рабочего вещества.

Как показано в работе [5], производной  $\frac{d\rho_{23}}{dt}$  в последнем уравнении системы (17) можно пренебречь, если выполняются неравенства

$$W_{31} + W_{32} \gg W_{13}, \quad W_{31} + W_{32} \gg \frac{2\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \left( \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} + \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} \right), \quad W_{31} + W_{32} \gg \delta_r. \quad (18)$$

Тогда имеем

$$\rho_{33} = \frac{1}{2(W_{31} + W_{32})} [W_{13}(N_0 - N_{21}) + LN_0 - MN_{21}]. \quad (19)$$

С учетом соотношения (19) первые два уравнения системы (17) принимают вид

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = - \left( \frac{1}{T'_{12}} - i\Omega_{21} \right) \rho_{12} + \frac{i}{\hbar} \rho_{12} \varepsilon (1 + a\varepsilon) N_{21},$$

$$\frac{dN_{21}}{dt} = \frac{2i}{\hbar} \rho_{12} \varepsilon (1 + a\varepsilon) (\rho_{12} - \rho_{21}) + (A - BN_{21}) \varepsilon^2 - \frac{N_{21} - N_{21}^0}{T_1}, \quad (20)$$

где

$$T_1 = \frac{W_{31} + W_{32}}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}, \quad N_{21}^0 = \frac{W_{13} W_{32} - W_{21} (W_{31} + W_{32})}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})} N_0,$$

$$A = \frac{2}{\hbar^2 \omega_{31}^2 (W_{31} + W_{32})} \left( \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} W_{32} - \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} W_{31} \right) N_0,$$

$$B = \frac{2}{\hbar^2 \omega_{31}^2 (W_{31} + W_{32})} \left( \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} W_{32} + \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} W_{31} \right).$$

Выражение (13) для поляризации  $\rho(\omega_1, \omega_2)$  с учетом соотношений (16) и (19) преобразуется к виду

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \rho_{12} (1 + 2a\varepsilon) (\rho_{12} + \rho_{21}) + (C - DN_{21}) \varepsilon,$$

где

$$C = \frac{\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2}{\hbar \omega_{31}} N_0, \quad D = \frac{\rho_{13}^2 - \frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} \rho_{23}^2}{\hbar \omega_{31}}. \quad (21)$$

Уравнения (12), (20) и (21) при выполнении условий (14), (15) и (18) полностью описывают нестационарные процессы в двухфотонном лазере.

Последнее слагаемое в (21) учитывает изменение собственной частоты резонатора при внесении в него активного вещества.

Решение этой системы уравнений ищем в виде

$$\rho_{12} = \rho_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + \rho_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} + P_3(t) e^{i[\omega_{21} t + \psi(t)]} = \rho_{21}^*, \quad (22)$$

$$\varepsilon = \sum_{r=1}^2 E_r(t) e^{i[\omega_r t + \varphi_r(t)]} + \text{к. с.},$$

$$N_{21} = N_{21}(t),$$

где  $\rho_1, \rho_2 = \text{const}$ , ибо резонансное воздействие на вещество имеет место на частоте  $\omega_{21}$ .  $P_3(t), \psi(t), E_r(t), \varphi_r(t)$  и  $N_{21}(t)$  — медленно меняющиеся (по сравнению с  $e^{i\omega_r t}$ ) функции времени.

Проводя обычным способом вывод укороченных уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dP_3}{dt} &= - \frac{P_3}{T_{12}} - \frac{2\rho_{12}}{\hbar} a E_1 E_2 N_{21} \sin \Phi, \\ \frac{dE_1}{dt} &= - \left( \delta_1 - 2\pi\omega_1 \frac{\rho_{12}^2}{\hbar T_{12} \omega_2^2} N_{21} \right) E_1 - 4\pi\rho_{12} \omega_1 a E_2 P_3 \sin \Phi, \\ \frac{dE_2}{dt} &= - \left( \delta_2 - 2\pi\omega_2 \frac{\rho_{12}^2}{\hbar T_{12} \omega_1^2} N_{21} \right) E_2 - 4\pi\rho_{12} \omega_2 a E_1 P_3 \sin \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta + \varepsilon N_{21} - \frac{2\rho_{12}}{\hbar} N_{21} a \frac{E_1 E_2}{P_3} \cos \Phi - \\ &\quad - 4\pi\rho_{12} a \left( \omega_1 \frac{E_2}{E_1} + \omega_2 \frac{E_1}{E_2} \right) P_3 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (23)$$



$$\frac{dN_{21}}{dt} = -\frac{N_{21} - N_{21}^0}{T_1} - \frac{4\rho_{12}^2}{\hbar^2 T_{12}} \left( \frac{E_1^2}{\omega_2^2} + \frac{E_2^2}{\omega_1^2} \right) N_{21} + \frac{8\rho_{12}}{\hbar} a E_1 E_2 P_3 \sin \Phi + 2(A - BN_{21})(E_1^2 + E_2^2),$$

где разность фаз  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi$ , расстройка

$$\Delta = \Delta\omega - 2\pi\omega_{21} C, \quad \mathcal{E} = 2\pi\omega_{21} D + \frac{2\pi\rho_{12}^2}{\hbar} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right).$$

При выводе уравнений (23) считали выполненными неравенства

$$\frac{1}{T_{12}} \gg \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} \left( \frac{\rho_{13}^2}{T_{13}} + \frac{\rho_{23}^2}{T_{23}} \right), \quad \omega_{21} \gg \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \omega_{31}^2} (\omega_{32} \rho_{23}^2 - \omega_{31} \rho_{13}^2). \quad (24)$$

Если  $T_{13}$  и  $T_{23}$  одного порядка, то первое из неравенств (24) эквивалентно условию (15).

Правые части системы уравнений (23) содержат члены, ответственные за двухквантовые процессы и пропорциональные  $a = \frac{\rho_{13} \rho_{23}}{\hbar \omega_{31} \rho_{12}}$  и члены нерезонансного взаимодействия

с коэффициентами  $A$ ,  $B$  и  $\frac{\rho_{12}^2}{\hbar}$ . В пятом уравнении системы члены нерезонансного взаимодействия связаны с действием полей  $E_1$  и  $E_2$  на заселенность рабочих уровней. Как показано в [4], слагаемыми  $2(A - BN_{21})(E_1^2 + E_2^2)$  можно пренебречь по сравнению с членом

$\frac{4\rho_{12}^2}{\hbar^2 T_{12}} \left( \frac{E_1^2}{\omega_2^2} + \frac{E_2^2}{\omega_1^2} \right) N_{21}$ , если второй уровень является метастабильным. В интересующем нас случае, когда должен быть сильно запрещен одноквантовый переход  $2 \rightarrow 1$ , можно пренебречь членом

$\frac{4\rho_{12}^2}{\hbar^2 T_{12}} \left( \frac{E_1^2}{\omega_2^2} + \frac{E_2^2}{\omega_1^2} \right) N_{21}$ . Члены же нерезонансного взаимодействия в уравнениях для  $E_1$  и  $E_2$  можно не учитывать при выполнении неравенств

$\frac{\delta_r}{N_{21}} \gg 2\pi\omega_r \frac{\rho_{12}^2}{\hbar T_{12} \omega_k^2}$ ;  $r, k = 1, 2$ .

$$\frac{\delta_r}{N_{21}} \gg 2\pi\omega_r \frac{\rho_{12}^2}{\hbar T_{12} \omega_k^2}; \quad r, k = 1, 2. \quad (25)$$

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Р. В. Хохлову за предложение темы и постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sorokin P. P., Braslau N. JBM J. Res. and Dev., 8, No. 2, 177, 1964.
2. Garwin R. L. JBM J. Res. and Dev., 8, No. 3, 338, 1964.
3. Клышко Д. Н. Диссертация МГУ, 1964.
4. Хронополо Ю. Г. «Изв. вузов», радиофизика, 7, № 4, 674, 1964.
5. Гуревич Г. Л., Хронополо Ю. Г. «Изв. вузов», радиофизика, 8, № 3, 493, 1965.
6. Халдре Х. Ю., Хохлов Р. В. «Изв. вузов», радиофизика, 1, № 5—6, 60, 1958.

Поступила в редакцию  
27. 3 1965 г.

Кафедра  
физики колебаний