3. Schauer R., Steward R. Pohm A., Read A. IRE Trans. Electronic Computers EC — 9, No. 3, 315—320, 1960.
4. Сб. «Тонкие ферромагнитные пленки». Под ред. Р. В. Телеснина. М., ГИТТЛ, 1964.

Поступила в редакцию
10. 12 1965 г.

Кафедра
физики колебаний

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

УДК 530.145

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРУППЫ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Предположим, что задано уравнение

$$L\varphi = 0, \tag{1}$$

где L — некоторый оператор, и требуется определить все его группы симметрии. При этом следует отличать случаи линейных уравнений: 1) $L \equiv L_a$ построен только из координат x_α ($\alpha = 1, 2, \ldots\ldots n$) и производных $y_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$; 2) когда $L \equiv L_b$ помимо x_α, y_α содержит еще некоторый вектор типа γ_α и нелинейных уравнений; 3) когда $L \equiv L_c$ помимо x_α, y_α, γ_α содержит еще и искомую функцию φ.

В данной статье рассмотрим случай 1 (т. е. $L \equiv L_a(x_\alpha, y_\alpha)$), причем будем разыскивать только соответствующие группы Ли. Тогда задача сводится к отысканию допустимых алгебр и реализующих их генераторов пространственных групп Ли уравнения (1) [см. 1, 2, 3].

Очевидно, искомые генераторы p_α должны быть построены в пространстве

$$1,\ x_\alpha,\ y_\alpha \quad (2) \qquad [x_\alpha, y_\alpha] = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{2'}$$

Рассматривая 1, x_α, y_α как гиперкомплексные числа, можно поставить вопрос об определении всех независимых элементов алгебры (2′), построенных в пространстве (2). Далее, можно расширить постановку задачи и определить все независимые элементы всевозможных алгебр

$$\{[p_\alpha, p_\beta] - c_{\alpha,\beta,\gamma} p_\gamma\}\ \varphi = 0, \tag{3}$$

построенных в пространстве (2). Здесь $c_{\alpha\beta\gamma}$ — так называемые структурные коэффициенты искомой алгебры. Для практической реализации поставленной задачи введем некоторые ограничения.

В пространстве (2) вводим только операции умножения и сложения (вычитания). Это накладывает ограничение на операторы L_a, p_α — они могут содержать только целые положительные степени величин.

Даже при указанных ограничениях число возможных операторов, построенных в (2), бесконечно. Расклассифицируем эти операторы по двум признакам: по порядку степени k относительно x_α, y_α и по рангу тензора r. При этом предполагается, что в (2) задана метрика в соответствии с (1) и определено понятие тензора. Для тензоров с $k \leqslant 2$, $\tau \leqslant 2$ имеем, например:

$k \backslash r$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	$\left\{\begin{matrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{matrix}\right.$	0
2	$\left\{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}\right.$	0	$\left\{\begin{matrix} M_{\alpha\beta} \\ \theta_{\alpha\beta} \\ q_{\alpha\beta} \\ p_{\alpha\beta} \end{matrix}\right.$

$$M_{\alpha\beta} \equiv x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha, \quad \theta_{\alpha\beta} \equiv x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha \quad \alpha \neq \beta,$$

$$q_{\alpha\beta} \equiv x_\alpha x_\beta, \quad p_{\alpha\beta} \equiv y_\alpha y_\beta \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_1 \equiv x_\alpha y_\alpha = 2\left(iI_1 - \frac{1}{4}\delta_{\alpha\alpha}\right), \quad A_2 \equiv x_\alpha^2 = 2(I_2 + iI_3), \tag{4}$$

$$A_3 \equiv y_\alpha^2 = 2(I_2 - iI_3),$$

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_2, I_3] = I_1, \quad [I_3, I_1] = I_2.$$

Следующие наборы проведенных операторов ($k \leqslant 2$; $r \leqslant 2$) образуют замкнутые коммутационные соотношения:

$$\{1, x_\alpha\}\ \{1, y_\alpha\}, \quad \{1, x_\alpha, y_\alpha\}, \quad \{1, M_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, x_\alpha, M_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, y_\alpha, M_{\alpha\beta}\},$$

$$\{1, A_1, A_2, A_3\}, \quad \{1, x_\alpha, y_\alpha, A_1, A_2, A_3\},$$

$$\{1, A_1, A_2, A_3, M_{\alpha\beta}\}. \tag{5}$$

$$\{1, \theta_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, x_\alpha, M_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, y_\alpha, M_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, q_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, p_{\alpha\beta}\},$$

$$\{1, x_\alpha, q_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, y_\alpha, q_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, x_\alpha, p_{\alpha\beta}\}, \tag{5'}$$

$$\{1, y_\alpha, p_{\alpha\beta}\}, \quad \{1, q_{\alpha\beta}, p_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}\},$$

$$\{A_1, A_2, A_3, p_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}\}.$$

Для дальнейшего понадобятся алгебры:

$$[\xi_\alpha, M_{\beta\gamma}] = \xi_\gamma\delta_{\alpha\beta} - \xi_\beta\delta_{\alpha\gamma}, \quad \xi_\alpha \equiv x_\alpha \pm y_\alpha,$$

$$[A_1, A_2] = 2A_2, \quad [A_1, A_3] = -2A_3,$$

$$[A_2, A_3] = -2(\delta_{\alpha\alpha} + 2A_1), \tag{6}$$

$$[x_\alpha, A_1] = -y_\alpha, \quad [x, A_2] = 0, \quad [x_\alpha, A_3] = -2y_\alpha,$$

$$[y_\alpha, A_1] - y_\alpha, \quad [y_\alpha, A_2] = 2x_\alpha, \quad [y_\alpha, A_3] = 0,$$

$$[A_j, M_{\alpha\beta}] = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$[A_1, \theta_{\alpha\beta}] = 0, \quad [A_2, \theta_{\alpha\beta}] = -4q_{\alpha\beta}, \quad [A_3, \theta_{\alpha\beta}] = 4p_{\alpha\beta},$$

$$[x_j, p_{\alpha\beta}] = -y_\alpha\delta_{\beta\gamma} - y_\beta\delta_{\alpha\gamma}, \quad [y_\gamma, q_{\alpha\beta}] = x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\alpha\gamma}, \quad [A_1, q_{\alpha\beta}] = -\theta_{\alpha\beta}, \tag{6'}$$

$$[A_3, \theta_{\alpha\beta}] = \theta_{\alpha\beta}, \quad [A_1, p_{\alpha\beta}] = \theta_{\alpha\beta},$$

$$[A_2, p_{\alpha\beta}] = -\theta_{\alpha\beta},$$

$$[M_{\alpha\beta}, q_{\mu\nu}] = q_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + q_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - q_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} - q_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu},$$

$$[M_{\alpha\beta}, p_{\mu\nu}] = p_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + p_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - p_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} - p_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu},$$

$$[p_{\alpha\beta}, q_{\mu\nu}] = [\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) + \frac{1}{2}\delta_{\beta\mu}(M_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2}\delta_{\beta\nu}(M_{\mu\alpha} + \theta_{\mu\alpha}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\delta_{\alpha\mu}(M_{\nu\beta} + \theta_{\nu\beta}) + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\nu}(M_{\mu\beta} + \theta_{\mu\beta}).$$

Рассмотрим операторы более высокого порядка ($k > 2$). Скаляр порядка m будет иметь вид

$$\varkappa_{(j)}m = \sum_{\mu,\nu,\sigma=0}^{2m=\mu+\nu+\sigma} a_{\mu\nu\sigma}^{(j)} A_1^\mu A_2^\nu A_3^\sigma, \tag{7}$$

где $a_{\mu\nu\sigma}^{(j)}$ — некоторые постоянные коэффициентов. Векторы $(m+1)$ порядка запишутся так:

$$\begin{aligned}\xi_\alpha(m+1) &= \varkappa_1(m)\,x_\alpha + \varkappa_2(m)\,y_\alpha,\\ \eta_\alpha(m+1) &= \varkappa_3(m)\,x_\alpha + \varkappa_4(m)\,y_\alpha.\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичным образом можно строить тензоры более высокого ранга ($r>2$) и высокого порядка ($k>2$). Хотя $M_{\alpha\beta}$ в виду $[\varkappa_j(m);\ M_{\alpha\beta}]=0$ нельзя обобщать.

Введем еще одно ограничение. Будем рассматривать только такие группы Ли уравнения (1), генераторы которых даются в рамках тензоров — скаляра, вектора и антисимметричного тензора 2-го ранга, т. е. (5) (но любого порядка k). Случай симметричных тензоров, т. е. (5′), следует рассмотреть отдельно.

Из тензорной размерности и свойства коммутаторов находим общий вид коммутаторов

$$\begin{aligned}&\{[\xi_\alpha, \xi_\beta] - \varkappa^{(1)}M_{\alpha\beta}\}\,\varphi = 0,\\ &\{[\eta_\alpha, \eta_\beta] - \varkappa^{(2)}M_{\alpha\beta}\}\,\varphi = 0,\\ &\{[\xi_\alpha, \eta_\beta] - (\varkappa^{(3)}\delta_{\alpha\beta} + x_\alpha y_\beta\varkappa^{(4)} + x_\beta y_\alpha\varkappa^{(5)} + x_\alpha x_\beta\varkappa^{(6)} + y_\alpha y_\beta\varkappa^{(7)})\}\,\varphi = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

где $\varkappa^{(j)}$ — скаляры вида (7). Для того чтобы ξ_α, η_α и $M_{\alpha\beta}$ были генераторами групп уравнения (1), необходимо

$$\begin{aligned}&[L_a, \xi_\alpha]\,\varphi = (x_\alpha\varkappa^{(8)} + y_\alpha\varkappa^{(9)})\,\varphi = 0,\\ &[L_a, \eta_\alpha]\,\varphi = (x_\alpha\varkappa^{(10)} + y_\alpha\varkappa^{(11)})\,\varphi = 0,\\ &[L_a,\ M_{\alpha\beta}]\,\varphi = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

т. е.

$$\varkappa^{(8)}\varphi = \varkappa^{(9)}\varphi = \varkappa^{(10)}\varphi = \varkappa^{(11)}\varphi = 0. \tag{10′}$$

Для того чтобы ξ_α, η_α, $M_{\alpha\beta}$ образовывали замкнутые коммутационные соотношения, необходимо

$$\begin{aligned}&(\varkappa^{(1)} - \lambda_1)\,\varphi = 0,\ \ (\varkappa^{(2)} - \lambda_2)\,\varphi = 0,\\ &(\varkappa^{(4)} - \lambda_4)\,\varphi = (\varkappa^{(5)} + \lambda_4)\,\varphi = 0\end{aligned} \tag{11}$$

и, кроме того, $\varkappa^{(3)}$ должно быть генератором группы, т. е.

$$[L_a, \varkappa^{(3)}]\,\varphi = \varkappa^{(12)}\varphi = 0. \tag{12}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\{[\xi_\alpha, \xi_\beta] - \lambda_1 M_{\alpha\beta}\}\,\varphi = 0,\ \ \{[\eta_\alpha, \eta_\beta] - \lambda_2 M_{\alpha\beta}\}\,\varphi = 0,\\ &\{[\xi_\alpha, \eta_\beta] - (\varkappa^{(3)}\delta_{\alpha\beta} + \lambda_4 M_{\alpha\beta})\}\,\varphi = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, относительно постоянных коэффициентов $a_{\mu\nu\sigma}^{(j)}$ в (7), (8) получаем систему алгебраических уравнений (10′), (11), (12). Решения указанной системы уравнений определяют как допустимые алгебры (4), так и вид реализующихся генераторов. Подбирая значения постоянных λ_1, λ_2, λ_4 и генератора $\varkappa^{(3)}$, можно получить разные алгебры. Так, при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = 0$ и $\varkappa^{(3)} \neq 0$, вводя обозначения [2] : $I_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}\,(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$, $I_{\alpha,n+1} \equiv \xi_\alpha$, $I_{\alpha,n+2} \equiv \eta_\alpha$ и $I_{n+1,n+2} \equiv \varkappa^{(3)}$ можно получить $(n=4)$ алгебру D_3. Аналогичным образом (при $\varkappa^{(3)} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$; $\lambda_4 = 0$ имеем $\xi_\alpha \equiv \eta_\alpha = I_{\alpha,n+1}$, $I_{\alpha,n+2} = 0$) можно получить $(n=4)$ алгебру B_2. При $\varkappa^{(3)} = 1$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ имеем алгебру (2′) и т. д.

Главный результат данной работы состоит в том, что построение допустимых групп Ли уравнения $L_a(x_\alpha,\ y_\alpha)\,\varphi = 0$ в пространстве $\{1,\ x_\alpha,\ y_\alpha\}$ при определенных ограничениях сводится к отысканию решений системы алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов $a_{\mu\nu\sigma}^{(j)}$ в (7), (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. ДАН СССР, **132**, 44, 1960.
2. Смородинский Я. А., Тугаев И. И. препринт Р—2307, Дубна, 1965.
3. Малкин В. И., Манько М. Л. ЖЭТФ, **2**, № 5, 230, 1965.

Поступила в редакцию
12. 1 1966 г.

Кафедра
теоретической физики