Г. Н. МЕДВЕДЕВ

УДК 517.9

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon X[x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau),\ \varepsilon], \\ \dot{\psi}(t) &= \omega[x(t),\ x(t-\tau)] + \varepsilon Y[x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau),\ \varepsilon], \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерная векторная функция, $\psi(t)$ — скалярная функция (вращающаяся фаза), $\varepsilon>0$ — малый параметр, τ — неотрицательная постоянная.

В первом (относительно параметра ε) приближении системы (1) изучались в работе [1].

В настоящей статье дается разработка общей схемы построения приближений высших порядков и ее обоснование.

Для систем типа (1) без запаздывания метод усреднения разрабатывался в работах [2—4]. Вопросам применимости метода усреднения к некоторым системам с отклоняющимся аргументом посвящены работы [5] и [6].

Основные результаты. Будем рассматривать решения системы (1), удовлетворяющие на начальном множестве $[-\tau,\ 0]$ условиям $x(t)=a(t)$, $\psi(t)=b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные функции.

Приведем основные требования теоремы о втором приближении.

1. Функции $X\equiv X(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ \varepsilon)$ и $Y\equiv Y(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ \varepsilon)$ определены в области $z_1,\ z_2 \in D_0$; $|z_3|,\ |z_4|<\infty$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, где D_0 — некоторая открытая область n-мерного пространства $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

В этой области функции X и Y непрерывны, равномерно ограничены и имеют по ε непрерывные ограниченные частные производные до второго порядка включительно. Функции $X_1 = X|_{\varepsilon=0}$, $X_2 = X'_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, $Y_1 = Y|_{\varepsilon=0}$ имеют непрерывные ограниченные частные производные по всем аргументам. Функция $\omega\equiv\omega(z_1,\ z_2)$ определена и равномерно ограничена в D_0 вместе со вторыми производными, удовлетворяющими условию Липшица.

Начальные данные принадлежат указанной выше области.

2. На сегменте $\left[0,\ \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ существует решение системы (1), причем точки $(\xi,\ \theta,\ \varphi)$ при $z_1=\xi$, $z_2=\xi$, $z_3=\varphi$, $z_3-z_4=\theta$ принадлежат некоторой открытой области D переменных ξ и θ, целиком лежащей внутри области D_0 вместе со своей границей, а $|\varphi|<\infty$.

Пусть в области D равномерно по отношению к ξ и θ существуют не зависящие от φ_0 пределы — средние значения вида

$$\overline{X}_{1,2}(\xi,\ \theta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\varphi_0}^{T+\varphi_0} X_{1,2}(\xi,\ \xi,\ \varphi,\ \varphi-\theta)\,d\varphi \tag{2}$$

для функций $X_{1,2}$, Y_1, $u_1(\xi,\ \varphi,\ \theta)$, $u_1(\xi,\ \varphi-\theta,\ \theta)$,

$$u_1(\xi,\ \varphi,\ \theta)\cdot u_1(\xi,\ \varphi-\theta,\ \theta),\quad \frac{\partial X_1}{\partial\xi},\quad \frac{\partial Y_1}{\partial\varphi},$$

$$\left(u_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)X_1(\xi,\ \xi,\ \varphi,\ \varphi-\theta)$$

и некоторых других,

где

$$u_1(\xi,\ \varphi,\ \theta) = \frac{1}{\omega(\xi,\ \xi)}\int_{\varphi_0}^{\varphi}[X_1(\xi,\ \xi,\ \varphi,\ \varphi-\theta) - \overline{X}_1(\xi,\ \theta)]\,d\varphi. \tag{3}$$

3. Назовем усредненной системой второго приближения систему вида

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \varepsilon A_1(\xi, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\xi, \theta), \\
\dot{\theta} &= \varepsilon B_1(\xi, \theta) + \varepsilon^2 B_2(\xi, \theta), \qquad (4) \\
\dot{\varphi} &= \omega(\xi, \xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi, \theta),
\end{aligned}
$$

правые части которой представляют собой средние значения (в смысле (2)) некоторых известных выражений, определяемых правыми частями исходной системы (1)

$$
A_1(\xi, \theta) = \overline{X}_1(\xi, \theta),
$$

$$
A_2(\xi, \theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\varphi_0}^{T+\varphi_0} \Big\{ X_2(\xi, \xi, \varphi, \varphi-\theta) +
$$

$$
+ \left[\left(u_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) - \tau \left(A_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \left(u_1(\xi, \varphi-\theta, \theta) \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \right.
$$

$$
\left. + v_1 \frac{\partial}{\partial z_3} + (v_1 - w_1) \frac{\partial}{\partial z_4} \right] X_1'(\xi, \xi, \varphi, \varphi-\theta) -
$$

$$
- \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \Phi_1 - \left(A_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} B_1 \Big\} d\varphi,
$$

где $v_1(\xi, \varphi, \theta)$ и $w_1(\xi, \varphi, \theta)$ — функции типа u_1. Выражения для остальных коэффициентов системы (4) не выписываем.

Начальные данные для усредненной системы задаются в точке $t=2\tau$ и определяются приближенным интегрированием исходной системы на первых двух шагах с точностью до величин порядка ε включительно.

Предполагается, что при этих начальных данных существует единственное решение усредненной системы (4), принадлежащее D вместе с некоторой своей окрестностью и определенное для значений $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ промежутке $t \in \left[2\tau, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$.

Кроме указанных основных требований вводятся также некоторые дополнительные условия гладкости для рассматриваемых функций, которые мы не перечисляем.

Теорема. При указанных ограничениях для сколь угодно малого $\delta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех значениях $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ равномерно для всех $t \in \left[2\tau, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ имеют место неравенства:

$$
\begin{aligned}
|x - \xi - \varepsilon u_1(\xi, \varphi, \theta)\varepsilon| &\leqslant \varepsilon\delta, \\
|\alpha - \theta - \varepsilon w_1(\xi, \varphi, \theta)| &\leqslant \varepsilon\delta, \\
|\psi - \varphi| &\leqslant \delta,
\end{aligned}
$$

где x, ψ — решение системы (1), $\alpha(t) = \psi(t) - \psi(t-\tau)$, ξ, θ, φ — решение усредненной системы, u_1 определяется формулой (3), а

$$
w_1(\xi, \varphi, \theta) = \frac{1}{\omega(\xi, \xi)} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \Big\{ \Big[(u_1(\xi, \varphi, \theta) - u_1(\xi, \varphi-\theta, \theta)) \frac{\partial}{\partial z_1} +
$$

$$
+ (u_1(\xi, \varphi-\theta, \theta) - u_1(\xi, \varphi-2\theta, \theta)) \frac{\partial}{\partial z_2} \Big] \omega(\xi, \xi) +
$$

$$
+ Y_1(\xi, \xi, \varphi, \varphi-\theta) - Y_1(\xi, \xi, \varphi-\theta, \varphi-2\theta) \Big\} d\varphi.
$$

На интервале $t \in [0, 2\tau]$ функции x, α, ψ могут быть непосредственно найдены с помощью приближенного интегрирования системы (1) с точностью до членов порядка ε.

Теоремы о приближениях более высоких порядков формулируются в аналогичных терминах.

В заключение приношу благодарность В. М. Волосову и Б. И. Моргунову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1965.
2. Волосов В. М. Диссертация, Киев, Ин-т механики АН УССР, 1961.
3. Волосов В. М. «Усп. матем. наук», **17**, вып. 6 (108), 1962.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1955.
5. Халанай. Revue de math. pures et appl., **6**, No. 3, 1959.
6. Рубаник В. П. Научн. ежегодн. Черновиц. ун-та за 1959 и 1960 гг.

Поступила в редакцию
1. 2 1966 г.

Кафедра
математики

М. Д. КАРАСЕВ, Е. А. ШАРКОВ

УДК 621.376.223

О ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ РЕЗОНАНСНОГО МОДУЛЯТОРА НА ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ДИОДЕ

Известно, что при совместном периодическом изменении емкости (или индуктивности) и сопротивления, если они изменяются в квадратуре, наблюдаются явления, отличные от тех, которые наблюдаются при изменении чистой емкости [1, 2, 3]. В параметрическом диоде, используемом в реактивных модуляторах и усилителях, активная проводимость меняется синфазно с емкостью. Оказывается, что синфазные пульсации емкости и проводимости при определенных условиях также могут привести к новым явлениям. В частности, интересна возможность появления в этом случае конечной дифференциальной отрицательной активной входной проводимости у резонансного модулятора на частотах входного сигнала вплоть до нуля.

Положим, что резонатор модулятора содержит параметрический диод, который в отношении к малому сигналу может быть отображен параллельно соединенными, пульсирующими под действием накачки емкостью

$$C(t) = C_0 + 2C_1 \cos\theta + 2C_2 \cos 2\theta + \ldots \qquad (1)$$

и проводимостью

$$g(t) = g_0 + 2g_1 \cos\theta + 2g_2 \cos 2\theta + \ldots \qquad (2)$$

Здесь $\theta = w_n t$, где ω_n — частота накачки.

Эквивалентная схема резонансного модулятора, удобная для расчета его входной проводимости $\dot{Y}_{\text{вх}}$, изображена на рис. 1. Здесь $\dot{I}_c$ — комплексная амплитуда тока подводимого к модулятору сигнала $i_c = \dot{I}_c \exp(j\omega_1 t)$ частоты ω_1, $\dot{V}_1$ — комплексная амплитуда напряжения сигнала, возникающего на комплексной проводимости $\dot{Y}_1$ входного фильтра нижних частот в модуляторе. $\dot{Y}_2$, $\dot{Y}_3$ — проводимости резонатора модулятора на частотах $\omega_2 = \omega_{\text{н}} + \omega_1$, $\omega_3 = \omega_{\text{н}} - \omega_1$. $Y_i = \infty$ для всех частот $\omega \neq \omega_i$. $C(t)$, $g(t)$ — емкость и проводимость параметрического диода, пульсирующие под действием не показанного напряжения накачки. Напряжение u на параметрическом диоде имеет вид

$$u = \dot{U}_1 \exp(j\omega_1 t) + \dot{U}_2 \exp(j\omega_2 t) + \dot{U}_3 \exp(j\omega_3 t),$$

а ток i через диод, соответственно,

$$i = \dot{I}_1 \exp(j\omega_1 t) + \dot{I}_2 \exp(j\omega_2 t) + \dot{I}_3 \exp(j\omega_3 t) + \ldots,$$

при этом $\dot{I}_i = \dot{Y}_i \dot{U}_i$.

При расчете приняты обозначения:

Q, ω_0 — добротность и резонансная частота резонатора, нагруженного емкостью C_0—C_2 и проводимостью g_0 параметрического диода, $Q \gg 1$. $[(\omega_{\text{н}} - \omega_0)/\omega_{\text{н}}] = \xi_0' \ll 1$, $(\omega_1/\omega_{\text{н}}) = \xi \ll 1$ — относительные расстройки. $(C_1/C) = m_1$ и $(C_2/C) = m_2$ $(g_1/g) = M_1$ и $(g_2/g) = M_2$ — коэффициенты модуляции емкости и проводимости, где C, g означают эффективные величины емкости и проводимости нагруженного резонатора, приведенные ко входу диода.