Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 538.3 : 621.372.809

Л. П. ИГУШКИН, В. И. КОТОВ, Э. И. УРАЗАКОВ

ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ВДОЛЬ ОСИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА

Определено полное поле при равномерном движении магнитного диполя вдоль оси полубесконечного круглого волновода. Задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решена методом Винера-Хопфа [1]. Найдено выражение для потерь на изучение при влете магнитного диполя в полубесконечный круглый волновод.

Излучение, возникающее при влете (или вылете) в полубесконечный волновод магнитного диполя, имеет непрерывный спектр в пространстве вне волновода и дискретный внутри него. Исследование такого излучения при пролете заряда через открытый конец волновода сделано в [2]. В отличие от заряда, возбуждающего в волноводе E-волны, магнитный диполь будет возбуждать H-волны. Исследование потерь энергии на излучение в этом случае представляет интерес для многих задач, связанных с пролетом через волноводы весьма интенсивных токовых (например, плазменных) образований.

Пусть по оси полубесконечного круглого волновода радиуса a летит со скоростью $u=\beta c$ магнитный диполь, ориентированный по оси z. Совместим ось волновода с осью z цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, z\}$. Будем предполагать, что волновод расположен в области $z \geqslant 0$.

В рассматриваемом случае Фурье-компонент по времени при частоте ω вектора—потенциала A имеет только одну составляющую A_φ [3]:

$$A_\varphi (r, z, \omega) = \frac{i\pi a}{e} \int\limits_0^\infty f(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} I_1(vr)\, H_1(va) \text{ при } r < a \\ I_1(va)\, H_1(vr) \text{ при } r > a \end{matrix} \right\} e^{iw(t-\xi)}\, dw, \quad (1)$$

где $I_1(x)$, $H_1(x)$ — цилиндрические функции Бесселя первого и третьего рода, $v = \sqrt{k^2 - w^2}$, $k = \frac{\omega}{c}$, $Im v > 0$. Электрическое и магнитное поля этого потенциала находятся по формулам

$$E_\varphi = ikA_\varphi, \; H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \; H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi). \quad (2)$$

Вектор-потенциал неподвижного магнитного диполя $A_d = \frac{[m_0 R]}{R^3}$ имеет также только азимутальный компонент. Ищем выражение для этого компонента в виде

$$A_{d\varphi}(r, z, \omega_\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(r, \omega_\alpha, w) e^{iwz+i\omega_\alpha t} dw, \tag{3}$$

где

$$\alpha(r, \omega_\alpha, w) e^{i\omega_\alpha, t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{d\varphi}(r, z, \omega_d, t) e^{-iwz} dz. \tag{4}$$

После преобразований интеграла в выражении (4), получим

$$A_{\alpha\varphi}(r, z, \omega_\alpha, t) = \frac{m_0}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[v_d K_1(v_d r) - \frac{i\pi}{2} K_d e^{-wr} \right] e^{iwz+i\omega_d t} dw, \tag{5}$$

где $K_1(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $v_d = \sqrt{w^2 - k_d^2}$, $k_d = \frac{\omega_d}{c}$ — волновой вектор магнитного диполя. После магнитного диполя, движущегося вдоль оси z со скоростью $u = \beta e$, находим с помощью преобразования Лоренца для полей и координат

$$E_{d\varphi}(r, z, \omega_d, t) = \frac{iw_0(1-\beta^2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[v_d' K_1(v_d r') - \frac{i\pi}{2} k_d' e^{-w'r'} \right] \times$$

$$\times (k_d' + \beta w') e^{i\left(w' - \omega_d' \frac{\beta}{2}\right) z + i(w_d' - uw')t} dw', \tag{6}$$

или

$$E_{d\varphi}'(r, z, \omega_d, \omega) = \frac{im_0(1-\beta^2)}{\sqrt{(2\pi)^3} u} \left[v_{dh}', K_1(v_{dh}', r') - \frac{i\pi}{2} K_d' e^{-w'r'} \right] \times$$

$$\times (k_d' + \beta w_1) e^{ihz}, \tag{7}$$

где $v_d' = \sqrt{w'^2 - k_d^2}$, $v_{dh_1}' = \sqrt{h_1^2 - k_t'^2}$, $h_1 = \frac{\omega_d - \omega}{u}$, $h = h_1 - \omega_d' \frac{\beta}{c}$.

Поле, наведенное на стенках волновода,

$$E_\varphi = -\frac{\pi ak}{e} \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_1(vr) H_1(va) \text{ при } r < a \\ I_1(va) H_1(vr) \text{ при } r < a \end{bmatrix} e^{iw(z-\xi)} dw. \tag{8}$$

Для нахождения этого поля нужно знать $f(z)$ — плотность поверхностных индуцированных токов на стенках волновода:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwz} dw.$$

Следовательно, задача определения поля, наведенного диполем на стенках волновода, сводится к определению функции $F(w)$, так как

$$E_\varphi = -\sqrt{2\pi} \frac{k}{c} \pi a \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_1(vr) H_1(va) \text{ при } r < a \\ I_1(va) H_1(vr) \text{ при } r > a \end{bmatrix} F(w) e^{iwz} dw, \tag{9}$$

$F(w)$ найдем методом, аналогичным методу, использованному в [2] и

[3]. Для этого воспользуемся граничными условиями для полного поля, представляющего сумму поля диполя и наведенного поля:

$$\text{а) } E_\varphi + E'_{d\varphi} = 0 \quad \text{при } r = a \; z \geqslant 0,$$
$$\text{б) } f(z) = 0 \qquad \text{при } z < 0.$$

Оба условия записываются в виде:

$$\text{а) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(w)\, F(w)\, e^{iwz}\, dw = \frac{im_0 e\,(1-\beta^2)}{(2\pi)^2\, ku} \left[v'_{dh},\; k_1(v_{dh}, a') - \frac{i\pi}{2}\, k'_d e^{-w'a'} \right] \times$$
$$\times\, (k_d + \beta h_1)\, e^{ihz},$$

$$\text{б) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwz}\, dw = 0, \tag{10}$$

где $L(w) = \pi a I_1(av)\, H_1(av)$.

Для решения системы интегральных уравнений воспользуемся методом Винера—Хопфа [1]. Ядро $L(w)$ представим следующим образом:

$L(w) = \dfrac{L_1(w)\, L_2(w)}{w^2 - h^2}$, где $L_1(w)$ регулярна и не имеет нулей в верхней полуплоскости, а $L_2(w)$ регулярна и не имеет нулей в нижней полуплоскости комплексного переменного w. В этом случае решение имеет вид $F(w) = \dfrac{B}{L_2(w)}$, где B — const (w). При этом второе уравнение системы (10) удовлетворяется тождественно, а первое позволяет определить B.

$$B = -\frac{IhG}{L_1(h)} = -\frac{m_0 eh\,(1-\beta^2)}{(2\pi)^2\, ku L_1(h)} \left[v'_{dh},\; k_1(v'_{dh}, a') - \frac{i\pi}{2}\, k'_d e^{-h'a'} \right] (k'_d + \beta h_1). \tag{11}$$

Разложение ядра $L(w)$ на множители аналогично разложению, сделанному в [2] и [3]:

$$L_1(w) = \frac{w_t h}{\sqrt{k+w}}\, \psi_1(w), \quad L_2(w) = \frac{w-h}{\sqrt{k-w}}\, \psi_2(w), \tag{12}$$

где функции $\psi_1(w)$ и $\psi_2(w)$ аналитичны и не имеют нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного w и связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\psi_1(w) = \psi_2(-w), \\ &\psi_1(w)\, \psi_2(w) = \pi av \Gamma_1(av)\, H_1(av). \end{aligned} \tag{12'}$$

Окончательно получим

$$F(w) = \frac{m_0 c\,(1-\beta^2)(k+h)}{2\,(2\pi)^2\, ku\psi_i(h)} \left[v'_{dh},\; k_1(v'_{dh}, a') - \frac{i\pi}{2}\, k'_d e^{-w'a'} \right] \times$$
$$\times\, \frac{(k'_d + \beta h_1)\sqrt{k+w}}{(w-h)\, \psi_2(w)} \tag{13}$$

и в случае движения постоянного диполя ($k_d = 0$).

$$F(w) = -i\, \frac{m_0 ck\,(1-\beta^2)}{(4\pi)^2\, ua\beta I_1}\, \frac{\psi_2(h)}{\left(ak\, \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right) \psi_2(w)\,(w-h)} \sqrt{\frac{k-w}{k-h}}. \tag{13'}$$

Полюс $w=h$ следует считать лежащим выше действительной оси. Кроме этого полюса функция $F(w)$ имеет полюсы в нулях функции $\psi_2(w)$. Соответствующие им точки определяются равенством $w_h=\sqrt{k^2-\frac{\nu_n^2}{a^2}}$, где ν_n — корни номера n функции Бесселя $I_1(x)$, $\psi_2(w)$ достигает нуля на действительной оси лишь при $k>\frac{\nu_1}{a}$ и, кроме того, при заданном значении частоты $\psi_2(w)$ имеет конечное число нулей, расположенных на действительной оси. Физически это соответствует дискретному числу собственных волн, распространяющихся в волноводе без затухания. Наведенное поле внутри волновода $(r<a,\ z\geqslant 0)$ равно

$$E_\varphi=-\sqrt{2\pi}\,\frac{k}{c}\,\pi a\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(w)\,\Gamma_1(vr)\,H_1(va)\,e^{iwz}\,dw=$$

$$=\frac{m_0(1-\beta^2)\sqrt{k+h}}{4\sqrt{2}\,\pi ku\psi_1(h)}\left[v'_{dh},\ k_1(v'_{dh},\ a')-\frac{i\pi}{2}\,k'_d e^{w'a'}\right]\times$$

$$\times(k'_d+\beta h_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{k-w}\ I_1(vr)\,H_1(va)}{(w-h)\,\psi_2(w)}\,e^{iwz}\,dw \tag{14}$$

и определяется поведением подынтегральной функции в верхней полуплоскости комплексного переменного w. Особенностями подынтегральной функции являются полюсы, расположенные в точках $w=h$ и в нулях функции $\psi_2(w)$.

Интеграл в формуле (14) легко берется при использовании теории вычетов

$$E_\varphi=\frac{m_0(1-\beta^2)\sqrt{k+h}}{4\sqrt{2}\,\pi ku\psi,(h)}\left[v^1_{dh},\ k,(v_{dh},\ a^1)-\frac{i\pi}{2}\,k_d e^{w^1a^1}\right]\times$$

$$\times(k^1_d+\beta h_1)\left\{\frac{\sqrt{k-h}\,\varphi_1(v_n r)\,H_1(v_n a)}{\psi_2(h)}\,e^{ihz}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{n}\frac{\sqrt{k-w_m}\ I_1(v_m r)\,H_1(v_m a)}{[\psi_2(w_m)]}\,e^{iwmt}\right\}. \tag{15}$$

Поле, связанное с постоянным диполем, движущимся по оси бесконечного волновода, дается формулой

$$E^0_\varphi=-i\,\frac{m_0k^2(1-\beta^2)}{2\pi u\beta}\,e^{ihz}\left\{k_1\left(rk\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{k_1\left(ka\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)}{I_1\left(ka\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)}\,I_1\left(rk\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)\right\}. \tag{15'}$$

Сумма по m в формуле (15) соответствует излучению, вызванному пролетом магнитного диполя через открытый конец волновода.

Полные потери на излучение внутрь волновода определяются выражением

$$N = 2\pi c \int_0^a \int_0^\infty E_{\omega\varphi} H_{-\omega r} r dr d\omega = \int_0^\infty N\omega d\omega. \tag{16}$$

При этом спектральная плотность излучения равна

$$N_\omega = 2\pi e k \sum_n \frac{e_n^2 a^2 w_n}{2} I_0 (\nu_n^{(')}), \tag{17}$$

где $C_n = \frac{\sqrt{k - w_n}}{(w_n - h)} \frac{H_1 (a v_n)}{\psi_1^2 (w_n)}$, $\nu_n^{(1)}$ — корень номера n функции Бесселя $I_1(x)$.

Рассмотрим поле вне волновода

$$E_\varphi^\partial = -\sqrt{2\pi}\, \frac{k}{e}\, \pi a \int_{-\infty}^{\infty} I_1 (va)\, H_1 (vr)\, e^{iwz} F(w)\, dw. \tag{18}$$

Обозначим $r = k \sin\theta$, $z = k\cos\theta$; при $vk \sin\theta \to \infty$ функцию $H_1(vK \sin\theta)$ заменим приближенным асимптотическим выражением

$$H_1 (vR \sin\theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi v R \sin\theta}}\, e^{i\left(vR \sin\theta - \frac{3}{4}\pi\right)}.$$

Тогда

$$E_\varphi^b = -\frac{2\pi a k e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{e \sqrt{R \sin\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_1 (va)}{\sqrt{v}}\, e^{i(v \sin\theta + w\cos\theta)R} F(w)\, dw,$$

вычисленное методом «перевала», равно

$$E_\varphi^b = -\frac{(2\pi)^{3/2} a k}{c} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}\, I_1 (ka \sin\theta)\, F(k\cos\theta).$$

Подставляя в эту формулу значение $F(k\cos\theta)$ из (13), получим

$$E_\varphi^b = -\frac{m_0 a (1 - \beta^2)}{2\sqrt{2\pi}\, u} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sqrt{k + n}}{\psi_1 (n)} I_1 (ka \sin\theta) \times$$

$$\times \left[v'_{dh},\ K_1 (v'_{dh}, a') - \frac{i\pi}{2} k'_d e^{-n'a'} \right] \frac{(k'_d + \beta h_1 \sqrt{k - \cos\theta}}{(k\cos\theta - h)\, \psi_2 (k\cos\theta)}. \tag{19}$$

Принимая во внимание, что интенсивность излучения на частоте ω в телесный угол $d\Omega$ равна

$$N_\omega^b (\theta) = e \sin^2\theta\, |E_\varphi^b|^2 R^2 d\Omega, \tag{20}$$

для интенсивности излучения во все пространство получим

$$N_\omega^b = 2\pi \int_0^\pi N_\omega^b (\theta) \sin\theta d\theta = M \int_0^\pi \frac{(1 - \cos\theta)\, I_1^2 (ka \sin\theta)\, \sin^3\theta d\theta}{(h - k\cos\theta)^2\, \psi_2^2 (k\cos\theta)},$$

где

$$M = \frac{m_0^2 a^2 (1 - \beta^2)^2 k (k + h) e}{4u^2 \psi_1^2 (h)} \left[v'_{dh},\ K_1 (v'_{dh}, a_1) - \frac{i\pi}{2} k'_d e^{-w'a'} \right] (k'_d + \beta h_1)^2. \tag{21}$$

Отсюда интенсивность излучения постоянного диполя ($k_d=0$) при вылете его из открытого конца волновода определяется выражением

$$N_{\omega}^{b}(k_d=0)=\frac{m_0^2k^2(1-\beta)(1-\beta^2)\psi_2^2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{16u\beta I_1^2\left(ak\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos\theta)I_1^2(ka\sin\theta)\sin^3\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2\psi_2^2(k\cos\theta)}d\theta. \qquad (21')$$

Рассмотрим частный случай вылета постоянного магнитного диполя из волновода ($u<0$). При больших частотах воспользуемся тем обстоятельством, что $\psi_2(k\cos\theta)$ от больших аргументов стремится к единице.

В этом случае для выражения углового распределения излучения в области углов $\pi-\theta\approx\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$ для постоянного диполя ($k_d=0$) получим (ультрарелятивистский случай)*:

$$N_{\omega}^{b}(\theta)\cong\frac{m_0^2\omega^2}{4e^3}\frac{\sin^4\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}. \qquad (21'')$$

Это выражение совпадает (с точностью до числового коэффициента) с измененным** выражением, полученным как следствие из формулы для энергии переходного магнитного диполя, вылетающего из металла в вакуум (3).

Полные потери на излучение при пролетании постоянного диполя через открытый конец волновода равны

$$N\cong\int_0^{\frac{c}{a}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}\omega^2d\omega\int_{\pi-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}}^{\pi}\frac{\sin^5\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}d\theta=\frac{1}{36}\frac{m_0^2\beta^2}{a^3(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (22)$$

Выражение, полученное по формуле (22) с точностью до числового коэффициента, равно энергии, теряемой на излучение магнитным диполем, пролетающим через отверстия радиуса a (в наших обозначениях) в бесконечно проводящем экране, как это было показано в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., ИЛ, 1962.
2. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. ЖТФ, **34**, вып. 4, 711, 1964.
3. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М., «Сов. радио», 1953.
4. Аматуни А. Ц. «Изв. АН АрмССР», сер. физич., **12**, 111, 1960.
5. Гинзбург В. Л., Франк И. М. ЖТФ, **16**, 15, 1946.
6. Колпаков О. А., Котов В. И. Препринт ОИЯИ, 1964, стр. 1901.

Поступила в редакцию
15.3 1965 г.

НИИЯФ

* Для ультрарелятивистских скоростей движения диполя спектр излучения лежит в области частот, удовлетворяющих неравенству $\omega<\frac{c}{a}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

** В работе [4] дано более общее решение переходного излучения дипольных моментов. Если решать эту задачу в элементарном рассмотрении, используя теорему взаимности, как это было сделано для переходного излучения заряда в [5], то результат данной работы совпадает с измененным выражением, следующим из формул (3).