

Г. А. АБАКУМОВ, Р. В. ХОХЛОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ  
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРЕ**

Квазиклассическим методом найдены собственные функции и квантовые условия, налагаемые на собственные значения энергии, системы двух взаимодействующих типов колебаний в резонаторе.

В данной работе рассматривается применение квазиклассического метода к расчету собственных функций и нахождению квантовых условий системы двух взаимодействующих типов колебаний в резонаторе, частотное соотношение которых имеет простейший вид  $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$ . Зависимость между электрической индукцией  $\vec{D}$  и электрическим полем  $\vec{E}$  в среде, заполняющей резонатор, имеет малый член, квадратично зависящий от поля:  $\vec{D} = \vec{E} + \hat{\mu}\vec{E}\vec{E}$ , благодаря которому и осуществляется взаимодействие между типами колебаний, в результате чего их амплитуда и фазы медленно меняются с течением времени. Потери в нелинейной среде и стенках резонатора отсутствуют. К решению квантовой задачи о нахождении собственных функций системы двух связанных типов колебаний применяется известный метод квазиклассического приближения [1, 2], который позволяет приближенно описать квантовую систему в терминах классических величин.

**Собственные функции системы в квазиклассическом приближении**

Как было показано в работе [4], гамильтониан системы связанных электромагнитных колебаний в резонаторе можно записать в виде

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \omega J_0 + \frac{3}{2} \hbar \omega,$$
$$H_1 = -\frac{1}{2} \kappa [e^{i\Phi} (\omega J_0 - 2\omega J - \hbar \omega)^{1/2} (\omega J_0 - 2\omega J)^{1/2} (\omega J + \hbar \omega)^{1/2} + e^{-i\Phi} (\omega J_0 - 2\omega J + \hbar \omega)^{1/2} (\omega J_0 - 2\omega J + 2\hbar \omega)^{1/2} (\omega J)^{1/2}], \quad (1)$$

где  $\Phi = \omega t + \varphi_1$ ,  $\varphi_1$  — фаза колебаний на частоте  $\omega$ ,  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — фаза

за колебаний на частоте  $2\omega$ ,  $\omega J_0 = -i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial \Phi}$  — оператор полной энергии системы,  $2\omega J = -i\hbar 2\omega \frac{\partial}{\partial \Phi}$  — оператор энергии на частоте  $2\omega$ ,  $\kappa$  — постоянная взаимодействия.

Собственными функциями гамильтониана (1) будут функции вида

$$\psi = e^{im\Phi} \Psi_m(\Phi) \quad (2)$$

при условии, что  $\Psi_m(\Phi)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa} H_{1m} \Psi_m(\Phi) &= [e^{i\Phi} (E_m - 2\omega J - \hbar\omega)^{1/2} (E_m - 2\omega J)^{1/2} (\omega J + \hbar\omega)^{1/2} + \\ &+ e^{-i\Phi} (E_m - 2\omega J + \hbar\omega)^{1/2} (E_m - 2\omega J + 2\hbar\omega)^{1/2} (\omega J)^{1/2}] \Psi_m(\Phi) = \\ &= \varepsilon_m (\hbar\omega)^{3/2} \Psi_m(\Phi), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon_m (\hbar\omega)^{3/2}$  — собственное значение оператора  $\frac{2}{\kappa} H_{1m}$ ,  $E_m = \hbar\omega m$  — собственное значение энергии свободных колебаний.

Отсюда следует, что собственные значения оператора  $H$  равны

$$H_m = E_m + \frac{3}{2} \hbar\omega - \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_m (\hbar\omega)^{3/2}.$$

Для приближенного нахождения собственных функций  $\Psi_m(\Phi)$  и собственных значений  $\varepsilon_m$  используем квазиклассический метод, развитый в работах [1, 2] применительно к решению уравнения Шредингера для ангармонического осциллятора. Решение уравнения (3), согласно этому методу, следует искать в виде волны

$$\Psi_m(\Phi) = A e^{iS/\hbar}, \quad (4)$$

где  $A$  и  $S$  — функции переменной  $\Phi$ . Подставляя (4) в уравнение (3) и действуя оператором  $\frac{2}{\kappa} H_{1m}$  на фазовый член функции  $\Psi_m(\Phi)$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_m A &= \left[ e^{i\Phi} \left( E_m - 2\omega \frac{dS}{d\Phi} + i2\hbar\omega \frac{d}{d\Phi} - \hbar\omega \right)^{1/2} \left( E_m - 2\omega \frac{dS}{d\Phi} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. i2\hbar\omega \frac{d}{d\Phi} \right)^{1/2} \left( \omega \frac{dS}{d\Phi} - i\hbar\omega \frac{d}{d\Phi} + \hbar\omega \right)^{1/2} + e^{-i\Phi} \left( E_m - 2\omega \frac{dS}{d\Phi} + i\hbar 2\omega \frac{d}{d\Phi} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \hbar\omega \right)^{1/2} \left( E_m - 2\omega \frac{dS}{d\Phi} + i\hbar\omega \frac{d}{d\Phi} + 2\hbar\omega \right)^{1/2} \left( \omega \frac{dS}{d\Phi} - i\hbar\omega \frac{d}{d\Phi} \right)^{1/2} \right] A, \end{aligned}$$

из которого при предположении малости членов, содержащих  $\hbar$ , т. е.

$$\frac{1}{\hbar\omega} \left( E_m - 2\omega \frac{dS}{d\Phi} \right) \gg 1, \quad \frac{1}{\hbar\omega} \omega \frac{dS}{d\Phi} \gg 1, \quad (5)$$

легко получить уравнения нулевого и первого приближения для определения  $\Psi_m(\Phi)$ :

$$(\hbar\omega)^{3/2} \varepsilon_m - 2 \cos \Phi (E_m - 2\rho^2) \rho = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left( i \frac{E_m + 6\rho^2}{4\rho^3} \cos \Phi \frac{d\rho^2}{d\Phi} - i \frac{E_m - 6\rho^2}{\rho} \cos \Phi \frac{d}{d\Phi} + \right. \\ \left. + \frac{E_m - 3\rho^2}{2\rho} e^{i\Phi} + \frac{3}{2} \rho e^{-i\Phi} \right) A = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho^2 = \omega \frac{dS}{d\Phi}$ . Уравнение (6) совпадает с классическим уравнением траектории на фазовой плоскости. Оно имеет три корня  $\rho_k = \rho_k(\Phi, \epsilon_m)$  ( $k=1, 2, 3$ ). Корень  $\rho_3$ , соответствующий внешним интегральным кривым [4], так же как и в классическом случае, мы исключаем из рассмотрения, так как он приводит к волне, средняя энергия которой больше собственного значения энергии системы  $E_m$ . На рис. 1 приведены фазовые траектории системы в декартовых координатах.

Решение уравнения (7) приводит к следующему виду искомой функции:

$$\Psi_m(\Phi) = \frac{C}{\sqrt{\frac{6\rho^2 - E_m}{\rho} \cos \Phi}} \exp\left(i \frac{E_m}{2} \int \frac{d\Phi}{6\rho^2 - E_m} + \frac{i}{\hbar\omega} \int \rho^2 d\Phi\right), \quad (8)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

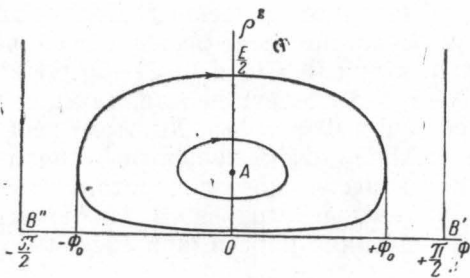


Рис. 1. Фазовые траектории системы

Из выражения (8) легко установить, что  $\Psi_m(\Phi)$  стремится к бесконечности в тех областях, где нарушаются условия применимости квазиклассического решения. Из (6) и (8) видно также, что функции  $\Psi_m(\Phi)$  определяются параметрами некоторой орбиты классического движения на фазовой плоскости. Обращению функции  $\Psi_m(\Phi)$  в бесконечность соответствуют точки поворота  $\Phi = \pm \Phi_0$  (рис. 1) классических траекторий, где  $\dot{\Phi} = 0$  [4]. Справедливость условий (5) нарушается также для траекторий, проходящих вблизи особой точки  $A$  или сепаратрисы  $B'B''$ .

Так как физический смысл имеют только два корня уравнения (6), то общее решение для  $\Psi_m(\Phi)$  будет состоять из суммы двух независимых решений вида (8) с произвольными постоянными множителями

$$\Psi_m = \frac{B_1}{\sqrt{|\Phi_1|}} \exp\left(i \frac{E_m}{2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{6\rho_1^2 - E_m} + \frac{i}{\hbar\omega} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \rho_1^2 d\Phi\right) + \frac{B_2}{\sqrt{|\Phi_2|}} \exp\left(i \frac{E_m}{2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{6\rho_2^2 - E_m} + \frac{i}{\hbar\omega} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \rho_2^2 d\Phi\right) \text{ при } \Phi < \Phi_0, \quad (9)$$

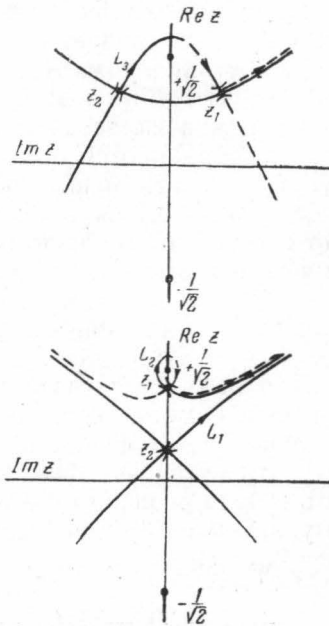


Рис. 2. Седловые точки, линии спуска и пути интегрирования

$$\Psi_m = \frac{C_1}{\sqrt{V_{\Phi_1}}} \exp \left( i \frac{E_m}{2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{6\rho_1^2 - E_m} + \frac{i}{\hbar\omega} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \rho_1^2 d\Phi \right) +$$

$$+ \frac{C_2}{\sqrt{V_{\Phi_2}}} \exp \left( i \frac{E_m}{2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{6\rho_2^2 - E_m} + \frac{i}{\hbar\omega} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \rho_2^2 d\Phi \right) \text{ при } \Phi > \Phi_0, \quad (10)$$

где  $\Phi_k \cong -\frac{6\rho_k^2 - E_m}{\rho_k} \cos \Phi$  и предполагается, что в классически доступной области  $\rho_1 > \rho_2$ .

В классически недоступных областях, т. е. при  $\Phi > \Phi_0$  и  $\Phi < -\Phi_0$ , корни уравнения (6) комплексные и сопряженные, поэтому одно решение будет в этих областях экспоненциально нарастать, а другое экспоненциально убывать. В дальнейшем для определенности будет предполагаться, что  $Im\rho_1 = -Im\rho_2 \geq 0$ .

Из физических соображений очевидно, что в классически недоступных областях следует выбирать убывающее решение. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы связать осциллирующее решение в области  $[-\Phi_0, +\Phi_0]$  с убывающими решениями при  $\Phi > \Phi_0$  и  $\Phi < -\Phi_0$ . Исходя только из квазиклассических решений, это сделать нельзя, так как эти решения обращаются в бесконечность при  $\Phi = \pm\Phi_0$ ; для этого необходимо привлекать точные решения вблизи точек поворота. Сшивание будет производиться только в точках классического поворота. Это связано с тем, что для классической системы переход через линию сепаратрисы невозможен ни при каких значениях параметров системы.

### Формулы связи в точках поворота

Для получения связи между решениями в точках поворота воспользуемся методикой, аналогичной примененной в работах [1 и 2]. В уравнении (3) функции  $e^{i\Phi}$  и  $e^{-i\Phi}$  заменяются линейными функциями  $\Phi$  относительно точки поворота. Для определенности будем искать связь между решениями в правой точке поворота  $\Phi = +\Phi_0$ , в этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\epsilon_m \Psi_m(\xi) = [(1 + i\Phi_0 + i\xi)(m - 2I_\xi - 1)^{1/2} (m - 2I_\xi)^{1/2} (I_\xi + 1)^{1/2} +$$

$$+ (1 - i\Phi_0 - i\xi)(m - 2I_\xi + 1)^{1/2} (m - 2I_\xi + 2)^{1/2} (I_\xi)^{1/2}] \Psi_m(\xi), \quad (11)$$

где

$$\xi = \Phi - \Phi_0, \quad I_\xi = -i \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Для уравнения (11) квазиклассические функции (8) переходят, как легко проверить, в функции

$$\Psi_m(\xi) = \frac{C}{\sqrt{\frac{6z^2 - 1}{z} (\cos \Phi_0 - \xi \sin \Phi_0)}} \exp \left\{ i \left( \frac{1}{2} \int_0^\xi \frac{d\xi}{6z^2 - 1} + m \int_0^\xi z^2 d\xi \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_0 [\xi + \operatorname{ctg} \Phi_0 \ln (\operatorname{ctg} \Phi_0 - \xi)] \right\}, \quad (12)$$

где  $z$  — удовлетворяет уравнению

$$2(\cos \Phi_0 - \xi \sin \Phi_0)(1 - 2z^2)z = \frac{\epsilon_m}{m\sqrt{m}}. \quad (13)$$

В выражениях (12, 13) для простоты величины  $z = \frac{\rho}{\sqrt{m\hbar\omega}}$  выражаются в безразмерных единицах. Предположим, что найдено в замкнутом виде общее решение (11) вместе с его асимптотиками по обе стороны от точки поворота, тогда, выбирая то решение, которое убывает при  $\xi > 0$ , можно определить вид соответствующей ему осциллирующей функции в области  $\xi < 0$ . Асимптотические выражения точного решения (11) должны в конечном счете выражаться через функции типа (12), что и позволит нам связать квазиклассические решения по обе стороны точки поворота первоначального уравнения (3).

Решение уравнения (11) ищем с помощью преобразования Лапласа:

$$\Psi_m(\xi) = \int_L e^{i\xi x m} F(x) dx. \quad (14)$$

Подставив (14) в (11) и проведя необходимые вычисления, получим

$$F(x) = f(x) \exp\left(im \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \Phi_0 \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}} - imx \operatorname{ctg} \Phi_0\right) \quad (15)$$

при условии, что на концах контура интегрирования:

$$\left\{ F(x) e^{imx} \left[ 2im(1-2x)\sqrt{x} \sin \Phi_0 - 3\sqrt{x} \cos \Phi_0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{i\Phi_0} \right] \right\}_L = 0, \quad (16)$$

где

$$f(x) = \exp\left[-\ln(1-2x)\sqrt{x} + \frac{1}{4} \int \frac{1-6x}{x(1-2x)} dx - \frac{i}{6\sqrt{6}} \operatorname{ctg} \Phi_0 \int \frac{dx}{x^{3/2}(1-2x)^2} + \operatorname{ctg}^2 \Phi_0 \int \frac{(6x-1)(2-3\sqrt{6}x(1-2x))}{12\sqrt{6}x^{3/2}(1-2x)^2} dx\right]. \quad (17)$$

При получении (15) и (16) учитывались только члены нулевого и первого порядка малости относительно  $m$  и использовалось соотношение между  $\varepsilon_m$ ,  $m$  и  $\Phi_0$

$$\varepsilon_m = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} m \sqrt{m} \cos \Phi_0, \quad (18)$$

которое получается из (6) при слиянии корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в точке поворота. С учетом (15)

$$\Psi_m(\xi) = \int_L f(x) e^{m\varphi(x)} dx,$$

где

$$\varphi(x) = i \left( \xi x + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \Phi_0 \ln \frac{x^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} + x \operatorname{ctg} \Phi_0 \right).$$

Главный член асимптотического разложения  $\Psi_m(\xi)$  при больших  $m\xi$  легко найти методом наискорейшего спуска. Седловые точки, через которые должен проходить контур интегрирования, определяются из равенства нулю  $\frac{d}{dx} \varphi(x)$ , что приводит к следующему алгебраическому

уравнению для их определения

$$z^3 - \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \frac{\operatorname{ctg} \Phi_0}{\operatorname{ctg} \Phi_0 - \xi}, \quad (19)$$

где  $z = x^{1/2}$ , которое совпадает с (13), если учесть (18). На рис. 2 приведено расположение седловых точек и ход линий спуска для функции  $\varphi(x) = \varphi(z^2)$  на плоскости  $z$ .

Разрез для логарифмической функции проведен от особых точек  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  вдоль действительной оси в  $\pm \infty$  соответственно. Пунктирной линией обозначен ход линии спуска на нижней полуплоскости. Для получения одного из независимых решений в качестве путей интегрирования в соответствии с расположением седловых точек и ходом линий спуска выберем пути, помеченные на рис. 2 стрелками, откуда видно, что два контура интегрирования  $L_1$  и  $L_2$  при  $\xi < 0$  вырождаются в один контур  $L_3$  при  $\xi > 0$ .

Для выбранных путей интегрирования решение имеет вид

$$\Psi_m(\xi) = \int_{L_1+L_2} f(x) e^{m\varphi(x)} dx \quad \text{при } \xi < 0,$$

$$\Psi_m(\xi) = \int_{L_3} f(x) e^{m\varphi(x)} dx \quad \text{при } \xi > 0.$$

Второе независимое решение получается, если направление интегрирования по одному из контуров  $L_1$  или  $L_2$  изменить на обратное. Его мы рассматривать не будем, так как оно приводит к возрастающему решению в классически недоступной области.

Проведя стандартные расчеты, получаем следующие асимптотические связанные между собой решения:

$$\Psi_m(\xi) = \frac{C}{\sqrt{\left| \frac{6z_1^2 - 1}{z_1} \right| (\cos \Phi_0 - \xi \sin \Phi_0)}} \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} + \frac{i}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{6z_1^2 - 1} + \right. \\ \left. + im \int_0^{\pi} z_1^2 d\xi - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_0 [\xi + \operatorname{ctg} \Phi_0 \ln (\operatorname{ctg} \Phi_0 - \xi)] \right\}, \quad (20)$$

такое же выражение с заменой индекса 1 на 2 при  $\xi < 0$  и

$$\Psi_m(\xi) = \frac{C}{\sqrt{\frac{6z_2^2 - 1}{z_2} (\cos \Phi_0 - \xi \sin \Phi_0)}} \exp \left\{ -\frac{i\pi}{4} + \frac{i}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{6z_2^2 - 1} + \right. \\ \left. + im \int_0^{\pi} z_2^2 d\xi - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_0 [\xi + \operatorname{ctg} \Phi_0 \ln (\operatorname{ctg} \Phi_0 - \xi)] \right\}, \quad (21)$$

где  $z_k$  ( $k=1, 2$ ) — корни уравнения (11). В (20) квадратный корень понимается в смысле своего главного значения.

Возвращаясь к первоначальному виду функций (8), получаем следующее шитое в точке  $+\Phi_0$  квазиклассическое решение уравнения (1):

$$\Psi_m(\Phi) = \frac{C}{\sqrt{|\Phi_1|}} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} + i \int_{\Phi_0}^{\Phi} r_1(\Phi) d\Phi \right] +$$

$$+ \frac{C}{\sqrt{\Phi_2}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} + i \int_{\Phi_0}^{\Phi} r_2(\Phi) d\Phi \right] \quad \text{при } \Phi < \Phi_0, \quad (22)$$

$$\Psi_m(\Phi) = \frac{C}{\sqrt{\Phi_2}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} + i \int_{\Phi_0}^{\Phi} r_2(\Phi) d\Phi \right] \quad \text{при } \Phi > \Phi_0, \quad (23)$$

где

$$r_k(\Phi) = \frac{E_m}{2} \frac{1}{6\epsilon_k^2 - E_m} + \frac{1}{\hbar\omega} \epsilon_k^2.$$

Аналогично сшиваются решения в точке  $-\Phi_0$

$$\Psi_m(\Phi) = \frac{B}{\sqrt{|\Phi_1|}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} + i \int_{-\Phi_0}^{\Phi} r_1(\Phi) d\Phi \right] +$$

$$+ \frac{B}{\sqrt{\Phi_2}} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} + i \int_{-\Phi_0}^{\Phi} r_2(\Phi) d\Phi \right] \quad \text{при } \Phi > -\Phi_0, \quad (24)$$

$$\Psi_m(\Phi) = -\frac{B}{\sqrt{\Phi_1}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} + i \int_{-\Phi_0}^{\Phi} r_1(\Phi) d\Phi \right] \quad \text{при } \Phi < -\Phi_0. \quad (25)$$

### Квантовые условия

Правила квантования значения энергии взаимодействия получают-ся из того условия, что функции (22) и (24) должны совпадать для любого значения переменной  $\Phi$  в интервале углов  $[-\Phi_0, +\Phi_0]$ . Нетрудно установить, что это приводит к квантовому условию

$$\int_{-\Phi_0}^{+\Phi_0} [r_2(\Phi) - r_1(\Phi)] d\Phi = \oint r(\Phi) d\Phi = 2\pi \left( l + \frac{1}{2} \right), \quad (26)$$

где  $l$  — неотрицательное целое число, и следующей связи между коэффициентами  $C$  и  $B$

$$C = B \exp \left[ -i \int_{-\Phi_0}^{+\Phi_0} r_1(\Phi) d\Phi - \frac{i\pi}{2} \right].$$

Формула (26) несколько отличается от квантового условия Бора, которое в обозначениях, принятых для данной задачи, имеет вид

$$\oint \rho^2(\Phi) d\Phi = 2\pi/\hbar\omega. \quad (27)$$

Квантовые условия (26), которые содержат дополнительный член нулевого порядка относительно  $m$ , являются более точными по сравнению с боровскими.

Условие (26) приводит к дискретным значениям энергии взаимодействия  $-\frac{1}{2} \kappa(\hbar\omega)^{3/2} \epsilon_{m,l}$  и соответствующим собственным функциям

$\Psi_{m,l}(\Phi)$ , причём квантовое число  $l$  может принимать целые значения  $0, 1, 2, \dots, l_{\text{макс}} \leq \frac{m}{4} - \frac{1}{4}$ .

Ограничение на  $l_{\text{макс}}$  особенно наглядно видно из квантового условия Бора, когда  $2\pi l_{\text{макс}} \hbar \omega$  не должно превышать наибольшей площади, которую может охватывать классическая орбита, т. е.  $e \frac{m \hbar \omega}{2} \pi$ . Квазиклассические собственные функции  $\Psi_{m,l}(\Phi)$ , вычисленные для сравнительно небольших значений  $m$ , довольно хорошо согласуются с соответствующими точными собственными функциями оператора  $\frac{2}{\kappa} H_{1m}$ . На рис. 3 и 4 приведена зависимость квадратов модулей  $\Psi_{m,l}$  от  $\Phi$  точной и квазиклассической собственных функций для  $m=16$  и  $l=2$ .

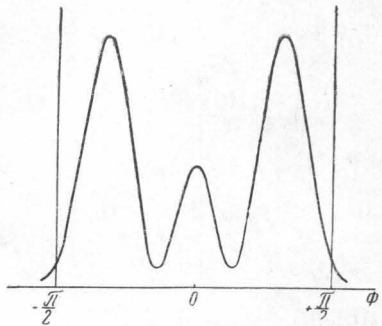


Рис. 3. Зависимость квадрата модуля точной функции от  $\Phi$  ( $m=16, l=2$ )

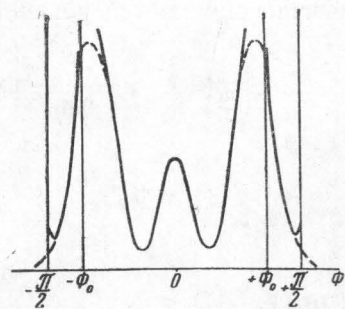


Рис. 4. Зависимость квадрата модуля квазиклассической функции от  $\Phi$  ( $m=16, l=2$ )

Из этих рисунков следует, что квазиклассические собственные функции существенно отличаются от точных только вблизи точек квазиклассического поворота  $\pm \Phi_0$ , при этом, конечно, предполагается, что квазиклассические функции соответствуют классическим орбитам, достаточно удаленным как от линии сепаратрисы  $B'B''$ , так и от особой точки  $A$  (см. рис. 1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крамерс Н. А. *Zs. f. Phys.*, **39**, 828, 1926.
2. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. *Квантовая механика*. М., 1962.
3. Дирак П. А. М. *Принципы квантовой механики*. М., ИЛ, 1960.

Поступила в редакцию  
9. 4 1965 г.

Кафедра  
физики колебаний