Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 530.145

Е. М. ВОРОБЬЕВ

# АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУМЕРНОГО СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЭКВИДИСТАНТНЫХ КРИВЫХ

Приводится метод построения асимптотики собственных функций уравнения $\Delta u+k^2 n(x, y) u=0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых, основанный на приближении геометрической оптики при больших $k$.

В последние годы в теории волноводных и резонаторных систем, работающих в миллиметровом и оптическом диапазоне длин волн, заметную роль стали играть методы, основанные на приближении геометрической оптики [1, 2, 3]. Эти методы применяются также для нахождения собственных функций и собственных значений скалярного волнового уравнения $\Delta u+k^2 u=0$ при $k\rightarrow\infty$.

В настоящей работе мы, следуя в основном работе [3], приведем метод нахождения асимптотики при $k\rightarrow\infty$ собственных функций и собственных значений уравнения

$$\Delta u+k^2 n^2(x, y) u=0, \tag{1}$$

где $\Delta$ — двумерный оператор Лапласа, $n^2(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция, причем $n^2(x, y)\geqslant\delta>0$. Уравнение (1) рассматривается в некоторой области, ограниченной либо двумя замкнутыми эквидистантными кривыми, либо двумя эквидистантными кривыми и двумя нормалями к ним.

Пусть

$$u|_{\Gamma}=0, \tag{2}$$

$\Gamma$ — граница области. Заметим, что рассматриваемая область может являться поперечным сечением регулярного волновода или коаксиальной волноводной линии передач. Предлагаемым методом может быть найдена асимптотика собственных функций и собственных значений поперечных сечений, для которых нельзя применить метод разделения переменных.

Настоящее замечание основано на том, что для волн электрического типа компонент $E_z$ электромагнитного поля удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2), если представить $E_z$ в виде $E_z = v(x, y) e^{k_z z}$.

В качестве системы координат выберем длину дуги внутренней (при положительной кривизне $\varkappa(s)$) эквидистантной кривой и длину $r$ нормали к ней. Формулы перехода от системы $(r, s)$ к декартовой имеют вид: $x = \xi(s) - r\eta'(s)$, $y = \eta(s) + \eta\xi'(s)$, причем $(x, y) = (\xi(s), \eta(s))$ параметрически задает внутреннюю эквидистантную кривую. В координатах $(r, s)$ область описывается неравенствами

$$0 < r < a, \; 0 < s < L.$$

Будет рассмотрен случай

$$n^2(x, y) \equiv n^2(r). \tag{3}$$

Тогда асимптотика собственной функции $u_{pq}(r, s)$ имеет вид

$$u_{pq}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{n(r)(1 + xr)}} \left\{ \varphi_q(s) \sin k_{pq}^{(1)} \int_0^r n(\xi)\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2k_{pq}^{(1)}} u_q^{(1)}(r, s) \cos k_{pq}^{(1)} \int_0^r n(\xi)\, d\xi \right\} + 0\left( \frac{1}{k_{pq}^{(1)^2}} \right) \tag{4}$$

при условии

$$\left| \frac{\gamma_{pq}}{k_{pq}^{(1)}} \right| \ll 1, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{pq} = \sqrt{k_{pq}^{(1)^2} - \left( \frac{\pi p}{\int_0^a n(\xi)\, d\xi} \right)^2}.$$

Функции $\varphi_q(s)$, $w_q^{(1)}(r, s)$ будут приведены в дальнейшем.

Первый же член асимптотики (4) и (5) соответствует приближению геометрической оптики и представляет собой суперпозицию двух волн вида $\mathrm{Al}^{ek\psi}$, $\psi$ — эйконал геометрической оптики. При условии (5) поверхности волновых фронтов параллельны эквидистантным кривым. Следовательно, формула (4) дает асимптотику не всех собственных функций, а лишь тех, которые быстро осциллируют в направлении $r$. Подобная задача рассматривалась В. П. Масловым [3], выписавшим первый член асимптотики для случая $n^2(x, y) = 1$. Нахождению асимптотики собственных функций и собственных значений при больших $k$ методами приближения геометрической оптики посвящена также работа Келлера и Рубинова [4].

Для получения асимптотики (4) запишем уравнение (1) в так называемом «квазиклассическом» представлении (см. [5]) и в криволинейных координатах.

Для этого, сделав замену

$$u(r, s) = l^{ek\psi(r, s)} v(r, s),$$

получим

$$e_{-ik\psi} \{\Delta u + k^2 n^2(r) u\} = k^2 [n^2(r) - (\nabla\psi)^2] + ik [2\nabla v \nabla\psi + v\Delta\psi] + \Delta v = 0. \tag{6}$$

Положим

$$\psi_{1,2}(r) = \pm \int_0^r n(\xi)\, d\xi + \psi_{1,2}^{(0)}. \tag{7}$$

Замена

$$v_\pm(r, s) = \frac{w_\pm(r, s)}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}}$$

приводит уравнение (6) к виду

$$\frac{\partial w_\pm(r, s)}{\partial r} \pm \frac{1}{2ik}\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}\,\Delta \frac{w_\pm(r, s)}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}} = 0, \tag{8}$$

что и является при условиях (5) и (7) искомым «квазиклассическим» представлением. Уравнение (6), записанное в виде (8), очень удобно для применения метода последовательных приближений. Полагая

$$w_\pm(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_\pm^{(n)}(r, s)}{(ik)^n},$$

получаем для $u_\pm^{(n)}(r, s)$ рекуррентные соотношения

$$\frac{\partial w_\pm^{(n)}(r, s)}{\partial r} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{n(r)(1+xr)}\,\Delta \frac{w_\pm^{(n-1)}(r, s)}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial w_\pm^{(0)}(r, s)}{\partial r} = 0. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $w^{(0)}(r, s) = \varphi_\pm(s)$, где $\varphi_\pm(s)$ — произвольные пока функции. Для того чтобы нулевой член асимптотики удовлетворял граничным условиям, достаточно положить $\psi_{1,2}^{(0)}=0$ в формуле (7), $\varphi_+(s) = \varphi_-(s) = \varphi(s)$; $k_p^{(0)}\int_0^a n(\xi)\, d\xi = p\pi\, (p=1, 2, \ldots)$, а в качестве решения взять комбинацию

$$u(r, s) = \frac{1}{2i}(u_+ - u_-) = \frac{\sin \dfrac{\pi p \int_0^r n(\xi)\, d\xi}{\int_0^a n(\xi)\, d\xi}}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}} \cdot \varphi(s). \tag{11}$$

Для определения $\varphi(s)$ составим секулярное уравнение. В случае вырождения конечной кратности, обычная процедура получения секулярного уравнения состоит в следующем. Рассматривается уравнение

$$(\widehat{H}_0 + \lambda \widehat{W})\,\psi = E\psi, \tag{12}$$

где $\widehat{H}_0$ и $\widehat{W}$ — некоторые самосопряженные операторы, $\lambda$ — малый параметр, $E$ — собственное значение. $E$ и $\psi$ раскладываются в асимптотические ряды по малому параметру:

$$\begin{aligned} E &= E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \ldots \\ \psi &= \psi^0 + \lambda \psi^{(1)} + \lambda^2 \psi^{(2)} + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекают уравнения

$$\hat{H}_0\psi^{(0)} = E^{(0)}\psi^{(0)}, \tag{14}$$

$$(\hat{H}_0 - E^{(0)})\,\psi^{(1)} = (E^{(1)} - \hat{W})\,\psi^{(0)}. \tag{15}$$

Уравнение (14) означает, что $\psi^{(0)}$ и $E^{(0)}$ являются собственной функцией и собственным значением невозмущенного оператора. Пусть собственное значение $E^{(0)}$ $n$-кратно вырождено. Как известно, в этом случае функция $\psi^{(0)}$ подчиняется требованию, чтобы ее изменение под влиянием возмущения $\lambda\hat{W}$ было малым, порядка $\lambda$.

Пусть $\varphi_\alpha$ $(\alpha=1, ..., n)$ — некоторая ортонормированная система собственных функций оператора $\hat{H}_0$, отвечающая собственному значению $E^{(0)}$. Тогда

$$\psi^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \varphi_\alpha, \tag{16}$$

и коэффициенты $c_\alpha$ находятся из алгебраической системы уравнений, которая получается, если левую и правую части уравнения (15) умножить скалярно на функции $\varphi_k$

$$(\psi_k, (\hat{H}_0 - E^{(0)})\,\psi^{(1)}) = \left(\varphi_k, (E^{(1)} - \hat{W}) \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\varphi_\alpha\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

В силу самосопряженности $\hat{H}_0$ левая часть (22) равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (E^{(1)}\delta_{k\alpha} - W_{k\alpha})\, c_\alpha = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

где

$$W_{k\alpha} = (\varphi_k, \hat{W}\varphi_\alpha).$$

Но заметим, что систему уравнений (18) можно получить, отыскивая экстремум функционала $F(c_1 c_2, \ldots, c_n, \cdot c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*) = ((\hat{H}_0 + \lambda\hat{W})\,\varphi, \varphi)$ в классе функций $\varphi = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\varphi_\alpha$; $\|\varphi\| = 1$.

Эта задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум функционала:

$$\Phi(c_1, \ldots, c_n;\ c_1^*, \ldots, c_n^*) = ((\hat{H}_0 + \lambda\hat{W})\,\varphi, \varphi) - E(\varphi, \varphi) =$$

$$= \left((\hat{H}_0 + \lambda\hat{W} - E) \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\varphi_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n} c_\beta\varphi_\beta\right) = \lambda\left((\hat{W} - E^{(1)}) \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\varphi_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n} c_\beta\varphi_\beta\right) =$$

$$= \lambda \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_\alpha c_\beta^* \,(W_{\alpha,\beta} - E^{(1)}\delta_{\alpha\beta}). \tag{19}$$

Коэффициенты $c_k$ находятся из уравнений

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial c_k^*} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha (W_{\alpha k} - E^{(1)}\delta_{\alpha k}) = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Система (19) совпадает с (16). В соответствии с этим замечанием, $\varphi(s)$ в (11) находится как элемент, реализующий экстремум функционала $F[u]=-\int\limits_{\Omega} u\Delta u d\sigma$ при условии

$$\int\limits_{\Omega} u^2 \, d\sigma = 1 \tag{20}$$

в классе функций

$$u = \frac{\sin \dfrac{\pi p \int\limits_0^r n(\xi)\, d\xi}{\int\limits_c^a n(\xi)\, d\xi}}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}} . \tag{21}$$

Следовательно, нужно найти безусловный экстремум функционала

$$\Phi[u] = \int\limits_{\Omega} \{u\Delta u + k^2 n^2 u^2\}\, d\sigma \tag{22}$$

в классе функций (20) и (21). Оператор Лапласа в криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{1+\varkappa r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left((1+\varkappa r)\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{1+\varkappa r}\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\}.$$

Найдем $\Delta u$

$$\Delta u = \left\{-\left(\frac{\pi p}{\int\limits_0^a n(\xi)\, d\xi}\right)^2 \frac{n^2(r)\varphi(s)}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)}} + \frac{3}{4}\frac{n'^2(r)\varphi(s)}{n^{5/2}(r)\sqrt{1+\varkappa r}} - \frac{1}{2}\frac{n''(r)\varphi(s)}{n^{3/2}(r)\sqrt{1+\varkappa r}} + \right.$$

$$+ \frac{x^2}{4}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{n(r)}(1+\varkappa r)^{5/2}} + \frac{\varphi''(s)}{(1+\varkappa r)^{5/2}\sqrt{n(r)}} - \frac{2\varphi'\varkappa' r}{\sqrt{n(r)(1+\varkappa r)^7}} - \tag{23}$$

$$\left. -\frac{1}{2}\frac{\varphi(s)x''(r)}{\sqrt{n(r)'}(1+xr)^{7/2}} + \frac{5}{4}\frac{\varphi x'^2 r^2}{\sqrt{n(r)}(1+xt)^{9/2}}\right\} \sin \frac{\int\limits_0^r n(\xi)\, d\xi}{\int\limits_0^a n(\xi)\, d\xi} p\pi.$$

При условии $n^2 \geqslant \delta > 0$ $\sin^2 \dfrac{\int\limits_0^r n(\xi)\, d\xi}{\int\limits_0^a n(\xi)\, d\xi} p\pi$ слабо сходится к $1/2$ при $p \to \infty$. Учитывая это и подставляя (23) и (21) в (22), получим

$$\Phi[u] = \int\limits_0^a\int\limits_0^L dr\, ds \left\{\left[\gamma^2 n(r) + \frac{3}{4}\frac{n'^2(r)}{n^3(r)} - \frac{1}{2}\frac{n''(r)}{n^2(r)} + \frac{\varkappa^2(s)}{4}\frac{1}{n(r)(1+\varkappa r)^2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\varkappa''(s) r}{n(r)(1+\varkappa r)^3} + \frac{5}{4}\frac{\varkappa'^2(s) r^2}{n(r)(1+\varkappa r)}\right]\varphi^2(s) - \frac{2\varphi'(s)\varphi(s)\varkappa'(s) r}{n(r)(1+\varkappa r)^3} +$$

$$\left. + \frac{\varphi''(s)\varphi(s)}{n(r)(1+\varkappa r)^2}\right\} = \int\limits_0^L ds\, \{A(\gamma^2, s)\varphi^2(s) - 2B(s)\varphi'(s)\varphi(s) + c(s)\varphi''(s)\varphi(s)\},$$

где

$$A(\gamma^2, s) = \int_0^a dr\left[\gamma^2(nr) + \frac{3}{4}\frac{n'^2(r)}{n^3(r)} - \frac{1}{2}\frac{n''(r)}{n^2(r)}\right] + \frac{\varkappa'(s)}{4}\int_0^a \frac{dr}{n(r)(1+\varkappa r)^2} -$$

$$-\frac{1}{2}x''(s)\int_0^a \frac{dr}{n(r)(1+xr)^3} + \frac{5}{4}x'^2(s)\int_0^a \frac{r^2\,dr}{n(r)(1+xr)^4},$$

$$B(s) = \varkappa'(s)\int_0^a \frac{r\,dr}{n(r)(1+\varkappa r)^3},$$

$$c(s) = \int_0^a \frac{dr}{n(r)(1+\varkappa(s)r)^2}. \tag{24}$$

Для функционала (24) напишем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{ds}\left[c(s)\frac{d\varphi}{ds}\right] + \left[\frac{1}{2}c''(s) + B'(s) + A(\gamma^2, s)\right]\varphi = 0. \tag{25}$$

В (25) в зависимости от вида области ставится либо условие периодичности, либо нулевые граничные условия при $s=0$, $s=L$. Уравнением (25) и граничными условиями определяются собственные значения $\gamma_q$ и собственные функции $\varphi_q(s)$. В соответствии с формулой (7), запишем

$$k_{pq}^{(1)^2} = \left(\frac{\pi p}{\int_0^a n(\xi)\,d\xi}\right)^2 + \gamma_q^2. \tag{26}$$

Перейдем к определению $w_q^{(1)}(r, s)$. Из уравнения (9) имеем

$$w_{\pm}^{(1)}(r, s) = \mp\frac{1}{r}\int_0^r \frac{\sqrt{n(\xi)(1+\varkappa\xi)}}{n(\xi)}\,\Delta\,\frac{\varphi(s)}{\sqrt{n(\xi)(1+\varkappa\xi)}}\,d\xi + w_{\pm}^{(1)}(0, s) =$$

$$\begin{aligned} &= \mp\frac{1}{r}\int_0^r \left\{\left[\frac{3}{4}\frac{n'^2(\xi)}{n^3(\xi)} - \frac{1}{2}\frac{n''(\xi)}{n^2(\xi)} + \frac{\varkappa^2}{4}\frac{1}{n(\xi)(1+\varkappa\xi)^2} -\right.\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}\frac{\varkappa''\xi}{n(\xi)(1+x\xi)^3} + \frac{5}{4}\frac{\varkappa'^2\xi^2}{n(\xi)(1+\varkappa\xi)^4}\right]\varphi(s) - \frac{2\varphi''(s)\varkappa'\xi}{n(\xi)(1+x\xi)^3} + \\ &\left. + \frac{\varphi''(s)}{n(\xi)(1+\varkappa\xi)^2}\right\}d\xi + w_{\pm}^{(1)}(0, s). \end{aligned} \tag{27}$$

Для того чтобы удовлетворялось граничное условие при $r=0$, нужно положить $w_{\pm}^{(1)}(0, s)=0$. Линейная комбинация

$$u = \frac{1}{2i}(u_+ - u_-)$$

дает в качестве асимптотики (4), где $w_q^{(1)}(r, s) = w_{q+}^{(1)}(r, s)$. При $r=a$, сравнивая (27) и (24), замечаем, что

$$w_q^{(1)}(a, s) = \gamma_q^2\int_0^a n(\xi)\,d\xi\cdot\varphi_q(s),$$

поэтому $k_{pq}^{(1)}$ при больших $p$ является корнем трансцендентного уравнения:

$$\sin k_{pq}^{(1)} \int\limits_1^a n(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2ik_{pq}^{(1)}}\,\gamma_q^2 \int\limits_0^a n(\xi)\,d\xi \cos k_{pq}^{(1)} \int\limits_0^a n(\xi)\,d\xi = 0,$$

что обеспечивает выполнение граничного условия при $r=a$. Дальнейшие члены асимптотики получаются аналогично, т. е. интегрированием уравнения (9).

**Приложение.** * Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{28}$$

в кольце $r_1<\rho<r_2$, т. е. области, ограниченной двумя замкнутыми эквидистантными кривыми — концентрическими окружностями. Пусть

$$u/\Gamma = 0, \tag{29}$$

где $\Gamma$ состоит из двух окружностей. Введем полярную систему координат $(\rho,\theta)$. Асимптотика собственных функций и собственных значений (28) и (29) известна:

$$u_{pq}(\rho,\theta) = \frac{e^{ip\theta}}{\sqrt{\rho}}\left\{\sin k_{pq}(\rho - r_1) - \frac{p^2-1/4}{2k_{pq}}\,\frac{\rho - r_1}{\rho r_1}\cdot\cos k_{pq}(\rho - r_1)\right\} + 0\left(\frac{1}{k_{pq}^2}\right), \tag{30}$$

где $k_{pq}$ — корень уравнения.

$$I_p(k_{pq} r_1) N_p(k_{pq} r_2) - I_p(k_{pq} r_2) N_p(k_{pq} r_1) = 0, \tag{31}$$

$I_p(x)$, $N_p(x)$ — функции Бесселя и Неймана,

$$k_{pq} = \frac{\pi q}{r_2 - r_1} + \frac{r_2 - r_1}{r\pi q r_1 r_2}\left(p^2 - \frac{1}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{q^2}\right). \tag{32}$$

В рассматриваемом случае (4) совпадает с (30). Заметим, что $\varkappa(s) = \frac{1}{2}$, поэтому $1 + \varkappa r = 1 + \frac{\rho - u}{r_1} = \frac{\rho}{r_1}$;

$$1 + \varkappa a = 1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1} - \frac{r_2}{r_1}.$$

Секулярное уравнение (24) принимает вид

$$\varphi''(s) + \left(\frac{1}{4r_1^2} + \gamma^2\,\frac{r_r}{r_1}\right)\varphi(s) = 0. \tag{33}$$

Функция $\varphi(s)$ должна кроме того удовлетворять условию периодичности. Следовательно:

$$\varphi_p(s) = ce^{\frac{ips}{r_1}} = ce^{ip\theta},$$
$$\frac{1}{4r_1^2} + \gamma_p^2\,\frac{r_2}{r_1} = \frac{p^2}{r_1^2}. \tag{34}$$

Откуда

$$\gamma_p^2 = \frac{p^2 - 1/4}{r_1 r_2}.$$

---

* Рассмотрен пример, показывающий, что асимптотика (4) совпадает в частном случае с известной асимптотикой для области, допускающей разделение переменных в уравнении (I).

Подставляя это значение $\gamma_p^2$ в (26), получаем

$$k_{pq}^{(1)} = \left[\left(\frac{\pi q}{r_2 - r_1}\right)^2 + \frac{p^2 - 1/4}{r_1 r_2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi q}{r_2 - r_1} + \frac{r_2 - r_1}{2\pi q r_1 r_2}(p^2 - 1/4) + 0\left(\frac{1}{q^2}\right). \tag{35}$$

Мы видим, что (35) совпадает с (32). Уравнение (9) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial w_{\pm}^{(1)}(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \pm \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{4} - p^2\right)}{\rho^2},$$

откуда

$$w_{\pm}^{(1)}(\rho, \theta) = \pm \frac{p^2 - 1/4}{2} \frac{r_1 - \rho}{r_1 - \rho} e^{ip\theta}. \tag{36}$$

Подстановка (36), (34) и (33) в (4) приводит к (30).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Каценеленбаум Б. З. «Усп. физич. наук.», **83**, вып. 1, 1964.
2. Вайнштейн Л. А. ЖЭТФ, **45**, 3(9), 1963.
3. Маслов В. П. ДАН СССР, **123**, № 4, 1958.
4. Keller J. B., Rubinov S. J. Ann. Phys., **9**, No. 1, 1960.
5. Маслов В. П. «Журн. вычислит. мат. и матем. физ.», **1**, № 1, 1961.



Поступила в редакцию
13. 4 1965 г.



Кафедра
математики