Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 533.951

Б. ЧАКРАБРОТИ

ВЗАИМООТНОШЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ, ПОВЕРХНОСТНОЙ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ

Показано, что падающая поперечная волна возбуждает в плазме поверхностную волну, волну сжатия и поперечную волну. Получены общие выражения для амплитуд, интенсивностей энергии и фаз всех четырех видов волн, включая отражательную волну в вакууме.

Задача решена в нескольких вариантах, смотря по тому, включаются ли в рассмотрение продольные, поверхностные волны в плазме и учитывается ли поверхностное натяжение на границе.

Критз и Минтзер [1] рассмотрели вопрос о возбуждении волн в плазме для случая двух плазм, разделенных границей и отличающихся концентрацией заряженных частиц. Однако их результаты нельзя применить к плазме на границе с вакуумом, например, на границе металл — вакуум. Кроме того, использованное ими граничное условие исключает возможность возбуждения поверхностной волны.

Фельдерхоф [2] решил задачу об отражении и преломлении волн на границе плазмы с точки зрения функций распределения, однако он ограничился в своем рассмотрении только нормальным падением волн к границе. Задача об общем случае остается открытой.

§ 1. Уравнения, граничные условия и потоки энергии волн

Пусть плазма заполняет полупространство $z>0$. Электромагнитная волна с амплитудой E_t^i падает на границу под углом Φ с осью x, которая направлена вдоль линии пересечения плоскости падения волны и границы плазмы.

Используем линейризованные уравнения плазмы в гидродинамическом приближении:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p, \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div}\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e\rho_0}{mc}\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = -\frac{4\pi e}{m}\delta\rho, \tag{1}$$

где

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho=p_0} \delta\rho \equiv p_0 + v_T^2 \delta\rho.$$

Из уравнения (1) получим

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{v_T}, \quad K = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c} \tag{2}$$

(см. [4] или [1]), где k — модуль волнового вектора продольной и K — поперечной волны.

Исследуем продольную и поперечную плоские волны внутри плазмы, а на границе кроме них и поверхностную волну. Падающую и отраженную волну можем записать в виде

$$E_t^i (\vec{I}_x \sin\Phi - \vec{I}_z \cos\Phi)\, e^{\frac{i\omega}{c}(x\cos\Phi + z\sin\Phi) - i\omega t},$$

$$E_t^r (-\vec{I}_x \sin\Phi - \vec{I}_z \cos\Phi)\, e^{\frac{i\omega}{c}(x\cos\Phi - z\sin\Phi) - i\omega t}. \tag{3}$$

На границе имеем четыре неизвестные амплитуды полей: E_t^r — отраженной волны, E_t^t — прошедшей поперечной, E_e^t — продольной и E — поверхностной. Чтобы определить их, используем следующие граничные условия.

а. Оптические условия непрерывности:

$$E_x^i + E_x^r = E_x^t, \; H_y^i + H_y^r = H_y^t. \tag{4}$$

б. Из условия разрывности нормальных компонентов электрических полей получим

$$E_z^i + E_z^r - E_z^t = \frac{4\pi e \rho_0}{m} \delta z, \tag{5}$$

где $\frac{e\rho_0}{m}\delta z \left(\equiv \frac{ie\rho_0}{m\omega} v_z\right)$ — концентрация зарядов на границе (см. уравнение (8)).

в. Предполагаем на границе существование условия

$$p - p_0 = \hat{v}_T^2 \delta\rho - \rho_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \tag{6}$$

где $\hat{v}_T$ — скорость звука на границе и Φ_1 — потенциал скорости поверхностной волны, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ и имеющий решение в виде $e^{\varepsilon(ix - z) - i\omega t}$. Имеем $\Phi_1 = -\frac{iEe}{m\omega\varepsilon}$ для отношения между E и Φ_1.

В уравнении (6) мы объединили адиабатическое объемное и поверхностное возмущение.

Далее предполагаем, что электронная плазма находится под влиянием поверхностного натяжения, природу которого мы не раскрываем. Для гидродинамического равновесия можем написать

$$\delta p = -\sigma \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}, \tag{7}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а

$$\delta z = \alpha e^{ikx\cos\theta - i\omega t} \tag{8}$$

возмущение поверхности. Из $\frac{\partial \delta z}{\partial t} = v_z (\equiv -i\omega\delta z)$ и уравнений (1) получим четвертое граничное условие

$$\widehat{v}_T^2 \delta\rho - \rho_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{i\sigma k^2 \cos^2\theta}{\omega} v_z. \qquad (9)$$

Заметим, что условие (9) удовлетворяется только на границе. Для скорости звука в условии (9) мы брали символ $\widehat{v}_T$ и в остальных случаях v_T, чтобы определить члены, полученные от сжимаемости на границе.

Связь между продольной, поверхностной и поперечными волнами получается из этих четырех уравнений.

Сравнение величины волны в вакууме и в плазме (см. (5)) дает закон преломления в виде

$$\frac{\omega \cos \Phi}{c} = K \cos \Phi' = k \cos \theta = \varepsilon, \qquad (10)$$

где Φ' — угол волнового вектора поперечной и θ — продольной волны с осью x. Итак, получим $\cos \Phi' = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-\Omega}}$ и $\cos\theta = \frac{v_T \cos \Phi}{c\sqrt{1-\Omega}}$, где $\omega_0^2 = \frac{4\pi^2 e \rho_0}{m^2}$ и $\Omega = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

Эти выражения показывают, что $\cos\Phi' > \cos\Phi$, и в силу того, что $v_T \ll c$, а $\cos\theta < \cos\Phi$, прошедшая поперечная волна отклонена от нормали больше, чем падающая, а возникшая продольная меньше. Для $\omega \gg \omega_0$ имеем $\cos\Phi' \approx \cos\Phi$ и $\cos\theta \approx \frac{v_T}{c}\cos\Phi$, так что направление прошедшей поперечной волны практически совпадает с направлением падения, а волна сжатия направлена почти нормально к границе.

Пройдя расстояние $\frac{2\pi}{\varepsilon} \left(\equiv \frac{2\pi c}{\omega \cos \Phi}\right)$ вдоль нормали в границе, поверхностная волна убывает в отношении $e^{2\pi} : 1$.

Для отношения интенсивностей энергии отраженных и преломленных волн на границе двух плазм имеем

$$(r, s, d, f) = \frac{\sin\Phi^r |\langle S_t^r\rangle|,\ \sin\theta^r |\langle S_l^r\rangle|,\ \sin\Phi^t |\langle S_t^t\rangle|,\ \sin\theta^t |\langle S_l^t\rangle|}{\sin\varphi^i |\langle S_t^i\rangle| + \sin\theta^i |\langle S_l^i\rangle|}, \qquad (11)$$

где $|\langle S_t\rangle|$ — среднее значение энергии по времени для поперечной и $|\langle S_l\rangle|$ продольной волны Φ, и θ — углы волновых векторов с осью x; индекс i соответствует падающей, r — отраженной, t — прошедшей волнам;

$$|\langle S_t\rangle| = \frac{c}{8\pi} |E_t|^2 \sqrt{1-\Omega},\quad |\langle S_l\rangle| = \frac{c}{8\pi} |E_l|^2 \frac{v_T\sqrt{1-\Omega}}{c\Omega}$$

(см. [3]). Закон сохранения энергии волн при отражении и преломлении на границе запишется так:

$$r + s + d + f = 1. \qquad (12)$$

Если в среде падающей волны создается вакуум, то $E_l^i = 0$, $E_l^r = 0$, и поэтому в (11) $s = 0$.

Для выражения интенсивности энергии поверхностной волны предполагаем

$$g = \frac{|\langle S_x \rangle|}{\sin\Phi^i\,|\langle S_t^i \rangle| + \sin\theta^i\,|\langle S_l^i \rangle|},$$

где $s_x = \rho_0 \dot{\Phi}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \Phi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x}$ [3] и Φ — потенциал электрического поля поверхностной волны.

§ 2. Шесть типов решения задачи

1. Случай TT — поперечный случай. Используем оптические условия (5), исключая поверхностную и продольную волны. Для амплитуд отраженной и преломленно-поперечной волн имеем

$$\frac{E_t^r,\, E_t^t}{E_t^i} = \frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi',\; 2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi'}.$$

Заметим, что фазы этих волн не изменяются и закон сохранения энергии $(r+d=1)$ удовлетворяется.

2. Случай TTS — плазменный поперечный случай с учетом поверхностной волны. Используя условия (4) и (5) без E_e^t, получим

$$\frac{(E_t^r,\, E_t^t, E}{E_t^i} = \frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi' + \frac{i2\Omega}{1+\Omega},\; 2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi,\; -\frac{4\Omega\sin\Phi}{1+\Omega}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi' - \frac{i2\Omega}{1+\Omega}}.$$

При учете поверхностной волны совместно с условием (5) включаются новые члены, например $-\frac{i2\Omega}{1+\Omega}$ в знаменателе всех амплитуд и $\frac{i2\Omega}{1+\Omega}$ в числителе E_t^r.

Благодаря этому r увеличивается, а d уменьшается так, что $r+d=1$, E имеет значительную величину и фазы волн становятся разными. Если λ аргумент знаменателей, а μ — числителя E_t^r, то $\lambda+\mu$ и λ соответственно дают изменения фазы отраженной и преломленной волн.

3. Случай TTS_σ — поперечный случай с учетом поверхностной волны и поверхностного натяжения (без продольной волны).

Используя уравнения (4) и (9) без E_l^t, получим

$$\frac{(E_t^r,\, E_t^t,\, E)}{E_t^i} =$$

$$= \frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi' + \frac{i\sigma\omega\cos^3\Phi}{\rho_0 c^3 + \sigma\omega\cos^3\Phi},\; 2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi,\; -\frac{2\sigma\omega\cos^3\Phi\sin\Phi}{\rho_0 c^3 + \sigma\omega\cos^3\Phi}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi' - \frac{i\sigma\omega\cos^3\Phi}{\rho_0 c^3 + \sigma\omega\cos^3\Phi}}.$$

При этом закон сохранения энергии удовлетворяется $(r+d=1)$. Если подставить $\sigma = \frac{2\rho_0\Omega c^3}{\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi}$, то полученные формулы переходят в формулы случая 2. Это указывает на то, что случай 2 формально можно описать действием поверхностного натяжения электростатической природы, так как при $\Omega \to 0$ и $\sigma \to 0$. Аналогичное явление (см. в [3]).

4. Случай TTL — с учетом поперечных и продольной волн без поверхностного натяжения (σ) и без поверхностной волны. Используя

уравнения (4) и (5) без E, получим

$$\frac{(E_t^r,\ E_t^t,\ E_l^t)}{E_t^i}=\frac{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi-\operatorname{tg}\Phi'-\Omega\operatorname{ctg}\theta,\ 2\sqrt{1-\Omega}\operatorname{tg}\Phi,\ -\dfrac{i2\,\Omega\sin\Phi}{\sin\theta}}{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'+\Omega\operatorname{ctg}\theta}.$$

Закон сохранения энергии, а именно $r+d+f=1$, удовлетворяется. Рассматриваемый случай не приводит практически к новым результатам, так как $\theta\approx\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg}\theta\approx 0$ и, следовательно, r и d почти не отличаются от их величин в случае 1, а f имеет очень малую величину. На границе плазмы нормальная составляющая скорости электронов (v_z) отсутствует и, следовательно, в рассматриваемом случае граница будет плоской.

5. Случай TTL_σ — с учетом продольной и поперечной волн при наличии поверхностного натяжения и без поверхностной волны.

Уравнения (4) и (9) без E дают

$$\frac{(E_t^r,\ E_t^t,\ E_l^t}{E_t^i}=\frac{\left(1-\dfrac{i\sigma k\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2\operatorname{tg}\theta}\right)\{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi-\operatorname{tg}\Phi'\}+\dfrac{i\sigma k\Omega\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2},\quad 2\sqrt{1-\Omega}\operatorname{tg}\Phi\left(1-\dfrac{i\sigma k\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2\operatorname{ctg}\theta}\right),\ -\dfrac{2\sigma k\Omega\cos^2\theta\sin\Phi}{\rho_0\widehat{v}_T^2}}{\left(1-\dfrac{i\sigma k\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2\operatorname{ctg}\theta}\right)\{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'\}-\dfrac{i\sigma k\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2}}.$$

Эти выражения удовлетворяют закону сохранения энергии и переходят в результате в случай 4 при $\widehat{v}_T=0$ или $\sigma=0$. В последнем случае $v_z=0$ на границе, и, следовательно, поверхность электронной плазмы является плоской. При учете сжимаемости дополнительные члены в выражениях комплексные; в силу того, что E_l^t содержит множитель σ, заключаем, что продольная волна возбуждается благодаря наличию поверхностного натяжения на границе.

Представим полученные формулы для рассматриваемого случая в другом виде. Разделим падающую волну на две части

$$\frac{E_{i_1}^t}{E_t^i}=\frac{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'}{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'-\dfrac{i\sigma k\cos^3\theta}{\rho_0\widehat{v}_T^2\operatorname{ctg}\theta}\{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'+\Omega\operatorname{ctg}\theta\}}$$

и

$$E_{t_2}^i=E_t^i-E_{t_1}^i.$$

Первая возбуждает только поперечные волны, вторая кроме них и продольные. При этом амплитуды отраженной поперечно-преломленной и продольной волн также разделяются на две части

$$\frac{(E_{t_1}^r,\ E_{t_1}^t}{E_{t_1}^i}=\frac{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi-\operatorname{tg}\Phi',\ 2\sqrt{1-\Omega}\operatorname{tg}\Phi}{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'},$$

$$\frac{(E_{t_2}^r,\ E_{t_2}^t,\ E_l^t}{E_{t_2}^i}=\frac{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi-\operatorname{tg}\Phi'-\Omega\operatorname{ctg}\theta,\ 2\sqrt{1-\Omega}\operatorname{tg}\Phi,\ -\dfrac{i2\,\Omega\sin\Phi}{\sin\theta}}{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'+\Omega\operatorname{ctg}\theta}.$$

Общая энергия складывается аддитивно из энергий парциальных волн, потому что разница фаз разделенных волн равна $\frac{\pi}{2}$. Причем возможна интерференция отраженных и поперечно-преломленных частей. Первая часть волнового поля произведенного разделения совпадает с рассмотренным случаем 1, вторая — со случаем 4. Заметим, что второй случай связан с наличием поверхностного натяжения σ, так что при $\sigma=0$ разделения исчезает ($E^i_{t_2}=0$) и продольная волна не возбуждается.

6. Случай $TT(LS)_\sigma$ — общий случай с учетом поверхностной, продольной и поперечных волн. Используя уравнения (4), (5) и (9), получим

$$\frac{E^r_t}{E^i_t}=\frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi-\mathrm{tg}\,\Phi'+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\{(1-\Omega)\mathrm{tg}\,\Phi-\mathrm{tg}\,\Phi'-\Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}+\dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\times\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}-\dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}},$$

$$\frac{E^t_t}{E^i_t}=\frac{2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi\left[1+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\right]}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\times\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}-\dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}},$$

$$\frac{E^t_l}{E^i_t}=\frac{2cv_T\Omega\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi\,\dfrac{\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\times\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}-\dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}},$$

$$\frac{E}{E^i_t}=\frac{-\dfrac{4\Omega\sin\Phi}{1+\Omega}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\dfrac{i\{2\rho_0\Omega c^3-\sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\times\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi+\mathrm{tg}\,\Phi'+\Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}-\dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}}.$$

Общий случай отличается от предыдущих одновременным возбуждением поверхностной и продольной волн. При этом возникает парадокс: $r+d+f\neq1$. Возникает вопрос о физической причине парадокса, так как формально полученное решение удовлетворяет исходному уравнению и всем граничным условиям.

§ 3. Обсуждение результатов

Оценим порядок для интенсивностей, углов преломления и фаз волн при различных Ω и Φ в условиях газовой плазмы, полагая $N=4\times10^9$ $^1/см^3$, $T\simeq10^5$ °K, тогда $\omega_0=3{,}58\times10^9$ и $v_T=1{,}58\times10^9$ *см/сек*.

Таблица

Ω	0,9	0,5	0,1	0,1	
Φ, *град*	80	80	60	30	
Φ', *град*	56,19	75,46	58,40	24,6	
r, %	20,2	2,4	0,1	1,06	Случай TT
d, %	79,8	97,6	99,7	98,6	
r, %	34,6	4,1	3,2	25,7	Случай TTS
d, %	65,4	95,9	96,8	74,3	
g, %	39,13	10,92	1,9	5,22	
λ, *град*	24,36	5,36	3	10,18	
μ, *град*	—45,33	—32,24	—63,26	10	
r, %	35,9	4,5	8,9	50,8	Случай TTS_{σ} при $\sigma=\infty$
d, %	64,1	95,5	91,1	49,2	
λ, *град*	25,27	8,25	17,20	45	
μ, *град*	—47,10	—43,36	—85,26	84,7	
g, %	52,9	24,3	55,37	104,5	

Находим, что с увеличением ω и Φ r и g уменьшаются, а d увеличивается. При учете поверхностной волны (случай 2) r увеличивается, а d уменьшается. Отсюда заключаем, что наличие поверхностной волны ведет к увеличению отражения. При $\sigma=\infty$ (случай 3) r больше, чем в случае 2 и поверхностная волна сильнее выражена. Если $\Omega \ll 1$ и $\Phi \ll \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\Phi' < \operatorname{tg}\Phi < 1$ и $g > d$, причем есть вероятность появления поверхностной волны с интенсивностью $g > 1$. Например, для $\Omega=0{,}1$ и $\Phi=30^{\circ}$ имеем $g=104{,}5\%$.

Если исключить случай $\omega \geqslant \omega_0$, то прошедшая поперечная волна более интенсивна, чем остальные волны, и с увеличением ω по сравнению с ω_0 величины r, f и g уменьшаются. При $\omega \gg \omega_0$ получаем $\Omega \approx 0$, $\Phi \approx \Phi'$, $(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi \approx \operatorname{tg}\Phi'$, $\{(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi+\operatorname{tg}\Phi'\}^2 \approx 4(1-\Omega)\operatorname{tg}\Phi\operatorname{tg}\Phi'$ и таким образом, d увеличивается, а r, f и g уменьшаются.

Отметим, что при учете продольной волны в числителе величины r и d содержат $\operatorname{tg}^2\theta$, f содержит $\operatorname{tg}\theta$, а g не содержит угол θ. Так как $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ большая часть энергии переходит в отраженную и поперечно-преломленную волны, продольная волна получает относительно малую долю, а поверхностная волна практически не возбуждается. Без продольной волны поверхностная волна сильно возбуждается, при учете же сжимаемости как продольная, так и поверхностная волны возбуждаются слабо.

Разобьем рассмотренные шесть случаев на две группы. В первую группу отнесем случаи: TT, TTS, TTL, во вторую группу: TTS_{σ}, TTL_{σ} и $TT(LS)_{\sigma}$.

Для первой группы условия (5) и (12) одновременно выполняются. Для волн TTS_{σ} и TTL_{σ} условие (5) не удовлетворяется, хотя задача решается однозначно с помощью условий непрерывности тангензиальных компонентов (4) и баланса сил на границе (9), а закон сохранения точно удовлетворяется. Для волн $TT(LS)_\sigma$ условие (5) и (9) удовлетворяется, поскольку расчет основывается на этих условиях, однако закон сохранения (12) для этого случая места не имеет. Причину указанного парадокса мы можем усмотреть в следующем. Во второй группе сделано неявное предположение об одновременной совместимости поверхностного натяжения как эффекта, обусловленного короткодействующими силами взаимодействия, и граничного условия (5), предполагающего, что между частицами действуют дальнодействующие электростатические силы взаимодействия. Парадокс и указывает на невозможность такого совмещения. Это естественное предположение подтверждается также двумя фактами.

1. Если поверхностное натяжение сводится в частном случае (что оказывается возможным) к электростатическим $\left(\sigma = \frac{2\rho_0 \Omega c^3}{\omega (1 - \Omega) \cos^3 \Omega}\right)$, то парадокс исчезает, так как вместе с этим исчезает продольная волна и общий случай сводится к случаю 3.

2. Сам факт нарушения закона сохранения должен рассматриваться как указание на невозможность одновременного совмещения поверхностных и продольных волн, ибо при возбуждении только одного из этих типов конфликт не возникает. В общем случае так же возможно разделение полей на две части, как и в случае 5. Однако, хотя для каждой части, взятой порознь $r_1 + d_1 = 1$ и $r_2 + d_2 + f_2 = 1$ (см. приложение), парадокс не устраняется, так как для суммарного поля $r + d + f \neq 1$. Формально причина несохранения обусловлена тем, что разность фаз между разделенными падающими волнами или отраженными волнами $\neq \frac{\pi}{2}$, т. е. это и является иным выражением несохранения.

Первая часть волнового поля совпадает со случаем 2, вторая — со случаем 4. Случай 2 связан не только с наличием поверхностного натяжения σ, но при $\sigma = 0$ продольная волна возбуждается.

Используя три из четырех граничных условий и условие сохранения энергий (уравнение (12)) как четвертое условие, задачу нельзя решить в случае $TT(LS)_\sigma$. Это происходит потому, что три линейных граничных уравнения при разделении действительной и мнимой частей дают шесть уравнений, а условие сохранения энергии дает только одно уравнение, а не два. Число же неизвестных величин восемь, так как амплитуды всех возбужденных волн комплексные. Поэтому, чтобы решить задачу таким образом, придется налагать еще одно условие: например, предполагать, что амплитуда поверхностной волны или действительна, или чисто мнима.

Приложение. Возможно разделение амплитуды падающей волны на две части так, что для каждой части в отдельности граничные условия (4), (5) и (12) будут удовлетворены. Полагая

$$E_t^i = E_{t_1}^i + E_{t_2}^i, \text{ получим}$$

$$\frac{E_{t_1}^i}{E_{t_2}^i} = \frac{(1 - \Omega) \operatorname{tg} \Phi + \operatorname{tg} \Phi' - \dfrac{i 2\Omega}{1 + \Omega}}{(1 - \Omega) \operatorname{tg} \Phi + \operatorname{tg} \Phi' + \dfrac{i \{2\rho_0 \Omega c^3 - \sigma\omega (1 - \Omega) \cos^3 \Phi\} v_T^2}{\rho_0 c^3 v_T^2 (1 - \Omega^2) \operatorname{ctg} \theta} \times}$$

$$\times \{(1 - \Omega) \operatorname{tg} \Phi + \operatorname{tg} \Phi' + \Omega \operatorname{ctg} \theta\} - \frac{i 2\Omega}{1 + \Omega}.$$

Поступая аналогично случаю TTL_{σ}, получим

$$\frac{E^r_{t_1}, E^t_{t_1}, E_1}{E^i_{t_1}} = \frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi' + \dfrac{i2\Omega}{1+\Omega},\ 2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi,\ -\dfrac{4\Omega\sin\Phi}{1+\Omega}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg} + \mathrm{tg}\,\Phi' - \dfrac{i2\Omega}{1+\Omega}},$$

$$\frac{E^r_{t_2}, E^t_{t_2}, E^t_e}{E^i_{t_2}} = \frac{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi' - \Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta,\ 2\sqrt{1-\Omega}\,\mathrm{tg}\,\Phi,\ -\dfrac{i2\Omega\sin\Phi}{\sin\theta}}{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi' + \Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta},$$

$$\frac{E_2}{E^i_{t_2}} = \frac{-\dfrac{4\Omega\sin\Phi}{1+\Omega}}{\dfrac{i\,\{2\rho_0\Omega c^3 - \sigma\omega(1-\Omega)\cos^3\Phi\}\,v_T^2}{\rho_0 c^3\hat{v}_T^2(1-\Omega^2)\,\mathrm{ctg}\,\theta}\,\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi' + \Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}}.$$

Отсюда

$$(r_1, \alpha_1) = \frac{\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi'\}^2 + \dfrac{4\Omega^2}{(1+\Omega)^2},\ 4(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi\,\mathrm{tg}\,\Phi'}{\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi'\}^2 + \dfrac{4\Omega^2}{(1+\Omega)^2}},$$

$$(r_2, d_2, t_2) = \frac{\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi - \mathrm{tg}\,\Phi' - \Omega\,\mathrm{ctg}\}^2,\ 4(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi\,\mathrm{tg}\,\Phi',\ 4\Omega(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{\{(1-\Omega)\,\mathrm{tg}\,\Phi + \mathrm{tg}\,\Phi' + \Omega\,\mathrm{ctg}\,\theta\}^2}.$$

В заключение автор выражает благодарность проф. А. А. Власову за предложенную тему и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kritz A. H., Mintzer D. Phys. Rev., **117**, 382, 1960.
2. Felderhof B. U. Physica, **29**, 293, 1963.
3. Власов А. А. «Уч. зап.», вып. 75, физика, кн. вторая, 1945, стр. 57; ЖЭТФ, 7, 224, 1954.
4. Чжао кэй-хуа. Диссертация. МГУ, 1958.

Поступила в редакцию
19. 4 1965 г.

Кафедра
теоретической физики