Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 530.145 : 532.503.1

В. А. КРАСНИКОВ

К УРАВНЕНИЯМ КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

На основе квантовой статистики получены уравнения гидродинамики для многокомпонентных систем в приближении идеальной жидкости.

В настоящей статье дается обобщение применительно к квантовому случаю результатов работы [1]. Здесь мы также ограничимся получением уравнений гидродинамики в приближении идеальной жидкости. Для однокомпонентных систем этот вопрос исследовался в [2], [3] и [4].

Рассмотрим взаимодействующую посредством центральных сил систему ферми- и бозе-частиц, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид

$$H = \sum_{1\leqslant i\leqslant M} \int \psi_i^+(t, r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\right)\Delta\psi_i(t, r)\,d\vec{r} - \sum_{1\leqslant i\leqslant M}\lambda_i\int \psi_i^+(t, r)\,\psi_i(t, r)\,d\vec{r} + \sum_{1\leqslant i\leqslant M}\int U_i(t, r)\,\psi_i^+(t, r)\,\psi_i(t, r)\,d\vec{r} + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i, j\leqslant M}\int \psi_i^+(t, r)\,\psi_j^+(t, r')\,\Phi_{ij}(|r-r'|)\,\psi_j(t, r')\,\psi_i(t, r)\,d\vec{r}d\vec{r}',$$

где индексы $i, j=1, 2, \ldots, M$ относятся к различным сортам частиц и операторы $\psi_i(t, r)$ и $\psi_j^+(t, r')$ в представлении Гейзенберга удовлетворяют условиям коммутации

$$\psi_i(t, r)\,\psi_j^+(t, r') \pm \psi_j^+(t, r')\,\psi_i(t, r) = \Delta(i-j)\,\delta(r-r'),$$
$$\psi_i\psi_j \pm \psi_j\psi_i = 0, \qquad \psi_i^+\psi_j^+ \pm \psi_j^+\psi_i^+ = 0. \tag{2}$$

Верхний знак соответствует ферми-частицам одного сорта, а нижний бозе-частицам и различным $(i\neq j)$ фермионам. Суммирование по спинам тривиально и везде опущено.

Для получения уравнений гидродинамики нам потребуются выражения для производных по времени от средней плотности $n_i(t, r)$, среднего потока $\varepsilon(t, r)$ частиц и от средней энергии на одну частицу $\varepsilon(t, r)$. Эти величины определяются обычным образом:

$$n_i(t, r) = \langle \psi_i^+(t, r)\,\psi_i(t, r)\rangle, \tag{3}$$

$$j_i^\alpha = \frac{i\hbar}{2}\left\langle \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\alpha}\psi_i(t, r) - \psi_i^+(t, r)\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}\right\rangle, \tag{4}$$

$$n(t, r)\,\varepsilon(t, r) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant M}\frac{\hbar^2}{4m_i}\langle\Delta\psi_i^+\psi_i + \psi_i^+\Delta\psi_i\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i, j\leqslant M}\int\Phi_{ij}(|r - r'|)\langle\psi_i^+(t, r)\,\psi_j^+(t, r')\,\psi_j(t, r')\,\psi_i(t, r)\rangle\,d\vec{r}', \tag{5}$$

где средние взяты с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором. Суммирование по спинам тривиально и везде опущено.

С помощью (1) и (2) нетрудно получить уравнения движения для операторных волновых функций:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_i(t, r)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta\psi_i(t, r) - (\lambda_i - U_i)\,\psi_i(t, r) +$$

$$+\sum_{1\leqslant k\leqslant M}\int\Phi_{ik}(|r - r'|)\,\psi_k^+(t, r')\,\psi_k(t, r')\,\psi_i(t, r)\,d\vec{r}', \tag{6}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_i^+(t, r)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta\psi_i^+(t, r) + (\lambda_i - U_i)\,\psi_i^+(t, r) -$$

$$-\sum_{1\leqslant k\leqslant M}\int\Phi_{ik}(|r - r'|)\,\psi_i^+(t, r)\,\psi_k^+(t, r')\,\psi_k(t, r')\,d\vec{r}'. \tag{7}$$

Перейдем к вычислению производных по времени от (3), (4) и (5). Используя (6) и (7) и проводя такие же, как в [4], преобразования, получим

$$m_i\frac{\partial n_i(t, r)}{\partial t} + \sum_{1\leqslant\beta\leqslant 3}\frac{\partial j_i^\beta}{\partial r^\beta} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial j_i^\alpha(t, r)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{4m_i}\frac{\partial(\Delta n_i)}{\partial r^\alpha} - \frac{\hbar^2}{2m_i}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r^\beta}\left\langle\frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta} + \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}\right\rangle -$$

$$-\frac{\partial U_i}{\partial r^\alpha}n_i(t, r) - \frac{1}{2}\sum_k\int\frac{\partial\Phi_{ik}(|R|)}{\partial R^\alpha}\{D_{ik}(t, r, -R) + D_{ki}(t, r - R, R)\}\,d\vec{R}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} = \sum_i\frac{i\hbar^3}{8m_i^2}\Delta\langle\Delta\psi_i^+\cdot\psi_i - \psi_i^+\cdot\Delta\psi_i\rangle - \sum_i\frac{1}{m_i}\sum_\beta j_i^\beta\frac{\partial U_i}{\partial r^\beta} +$$

$$+\sum_i\frac{i\hbar^3}{4m_i^2}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r^\beta}\left\langle\frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\beta}\cdot\Delta\psi_i - \Delta\psi_i^+\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}\right\rangle +$$

$$+\sum_{i,k}\frac{1}{m_i}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r^\beta}\int\Phi_{ik}(|R|)\,G_{ik}^\beta(t, r, R)\,d\vec{R} +$$

$$+\sum_{i,k}\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial R^\beta}\left\{\frac{1}{m_i}G_{ik}^\beta(t, r, -R) + \frac{1}{m_k}G_{ki}^\beta(t, r - R, R)\right\}d\vec{R}, \tag{10}$$

где

$$D_{ik}(t, r, r' - r) = \langle\psi_i^+(t, r)\,\psi_k^+(t, r')\,\psi_k(t, r')\,\psi_i(t, r)\rangle = D_{ki}(t, r', r - r')$$

и

$$G_{ik}^{\alpha}(t, r, r'-r) = \frac{i\hbar}{4} \Big\langle \psi_i^+(t, r)\, \psi_k^+(t, r')\, \psi_k(t, r')\, \frac{\partial \psi_i(t, r)}{\partial r^{\alpha}} - $$

$$- \frac{\partial \psi_i^+(t, r)}{\partial r^{\alpha}}\, \psi_k^+(t, r')\, \psi_k(t, r')\, \psi_i(t, r) \Big\rangle.$$

Прежде чем перейти к получению уравнений гидродинамики, рассмотрим состояние статистического равновесия при $U_i=0$, которое характеризуется обычными параметрами — плотностью числа частиц всех компонентов $n_i(t, r)$, температурой $\theta(t, r)$, скоростью движения системы как целого $\vec{V}(t, r)$. Для состояния статистического равновесия средние типа $<...>$ ... n_i, ..., ..., θ, V можно выразить посредством преобразования операторных функций $\psi_i \to e^{\frac{im_iVr}{\hbar}} \psi_i$ через значения средних $<...>$... ...n_i, ..., θ при $\vec{V}=0$. Тогда получим

$$j_i^{\alpha} = m_i n_i V^{\alpha}, \quad n\varepsilon = n\varepsilon_0 + \frac{\rho V^2}{2}, \tag{11}$$

где $n = \sum\limits_i n_i$ и $\rho = \sum\limits_i m_i n_i$, а $\varepsilon_0(\ldots n_i \ldots, \theta)$

является средней энергией на одну частицу для состояния статистического равновесия покоящейся жидкости. Очевидно, что в этом случае все диффузионные потоки равны

$$I_i^{\alpha} = j_i^{\alpha} - n_i m_i V^{\alpha} = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим величину типа

$$A_{ik} = \langle (D_1 \psi_i^+(t, r))\,(D_2 \psi_k^+(t, r'))\,(D_3 \psi_k(t, r'))\,(D_4 \psi_i(t, r)) \rangle,$$

где D_{ν} представляют линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования по пространственным переменным.

В силу пространственной однородности состояния статистического равновесия

$$A_{ik} = A_{ik}(r'-r \mid \ldots n_i \ldots, \theta, V).$$

В гидродинамике величины

$$A_{ik}(t, r, R) = \langle (D_1 \psi_i^+(t, r))\,(D_2 \psi_k^+(t, r'))\,(D_3 \psi_k(t, r'))\,(D_4 \psi_i(t, r)) \tag{13}$$

и внешнее поле $U_i(t, r)$ мало меняются при пространственных и временных трансляциях. Предполагаем, что величины типа (13) достаточно мало отличаются от соответствующих равновесных значений $A_{ik}(R \mid \ldots n_i(t, r), \ldots, \theta(t, r), \ldots, U_i(t, r), \ldots, V(t, r))$, причем тем меньше, чем меньше градиенты величин $n_i(t, r)$, $\theta(t, r)$, $U_i(t, r)$ и $\vec{V}(t, r)$, где $\vec{V}$ и θ выражаются согласно

$$V^{\alpha} = \frac{j^{\alpha}}{\rho} = \frac{j_i^{\alpha}}{\rho_i}, \tag{14}$$

$$j^{\alpha} = \sum_i j_i^{\alpha}. \ \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\ldots, n_i, \ldots, \Theta).$$

Для формального выражения сделанных допущений удобно ввести малый параметр μ. Тогда средние рассматриваемого типа и внешнее поле примут вид

$$U_i(t, r) = \widetilde{U}_i(\tau, \xi),$$

$$A_{ik}(t, r, r' - r) = \widetilde{A}_{ik}(\tau, \xi, R; \mu), \tag{15}$$

$$\tau = \mu t, \quad \vec{\xi} = \mu \vec{r}.$$

В силу сделанного предположения о малости отклонения от статистического равновесия имеем

$$\widetilde{A}_{ik}(\tau, \xi, R; \mu) = \widetilde{A}_{ik}^{(0)}(\tau, \xi, R) + \mu \widetilde{A}_{ik}^{(1)}(\tau, \xi, R) + \mu^2 \ldots, \tag{16}$$

где

$$\widetilde{A}_{ik}^{(0)}(\tau, \xi, R) = \widetilde{A}_{ik}(R \mid \ldots \widetilde{n}_i(\tau, \xi) \ldots, \widetilde{\theta}(\tau, \xi), \widetilde{V}(\tau, \xi))$$

и

$$\widetilde{V}^\alpha(\tau, \xi) \text{ и } \widetilde{\theta}(\tau, \xi)$$

определяются в соответствии

$$\widetilde{V}^\alpha = \frac{\widetilde{j}^\alpha}{\rho}, \quad \widetilde{n}\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{n}\,\varepsilon_0(\ldots \widetilde{n}_i \ldots, \widetilde{\theta}) + \frac{\widetilde{\rho}\,\widetilde{V}^2}{2}. \tag{17}$$

Выражение $\widetilde{A}_{ik}^{(1)}$ представляет собой линейную форму по градиентам $\widetilde{n}_i(\tau, \xi)$, $\widetilde{\theta}(\tau, \xi)$ $\vec{\widetilde{V}}(\tau, \xi)$ и $U_i(\tau, \xi)$.

Переходя в (8), (9) и (10) от переменных t, $\vec{r}$ к переменным τ, $\vec{\xi}$, получим

$$m_i \frac{\partial \widetilde{n}_i(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_\beta \frac{\partial \widetilde{j}_i^\beta(\tau, \xi)}{\partial \xi^\beta} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \widetilde{j}^\alpha}{\partial \tau} = \mu^2 \sum \frac{\hbar^2}{4m_i} \frac{\partial(\Delta_\xi \widetilde{n}_i)}{\partial \xi^\alpha} - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi \beta} \left\langle \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\beta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\beta} \right\rangle -$$

$$- \sum_i \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial \xi^\alpha} \widetilde{n}_i - \frac{1}{2\mu} \sum_{i,k} \int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^\alpha} \{D_{ik}(\tau, \xi, -R) + D_{ki}(\tau, \xi - \mu R, R)\}\, d\vec{R}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{n\varepsilon})}{\partial \tau} = \mu \sum_i \frac{i\hbar^3}{8m_i^2} \Delta_\xi \langle \Delta\psi_i^+ \cdot \psi_i - \psi_i^+ \Delta\psi_i \rangle -$$

$$- \sum_i \frac{i\hbar^3}{4m_i^2} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi \beta} \left\langle \Delta\psi_i^+ \frac{\partial \psi_i}{\partial r \beta} - \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r \beta} \Delta\psi_i \right\rangle +$$

$$+ \sum_{i,k} \frac{1}{m_i} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \int \Phi_{ik} \widetilde{G}_{ik}^\beta(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} - \sum_i \frac{1}{m_i} \sum_\beta \widetilde{j}_i^\beta \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial \xi^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \sum_{i,k} \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^\beta} \left\{ \frac{1}{m_i} \widetilde{G}_{ik}^\beta(\tau, \xi, -R) + \frac{1}{m_k} \widetilde{G}_{ki}^\beta(\tau, \xi - \mu R, R) \right\} d\vec{R}. \tag{20}$$

Рассмотрим входящую в (20) величину

$$\sum_{i,k} \sum_\alpha \int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^\alpha} \left\{ \frac{1}{m_i} \widetilde{G}_{ik}^\alpha(\tau, \xi, -R) + \frac{1}{m_k} \widetilde{G}_{ki}^\alpha(\tau, \xi - \mu R, R) \right\} d\vec{R}.$$

Учитывая, что в подынтегральное выражение входит очень быстро убывающая величина $\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}}$, и проводя в соответствии с (16) разложение $\widetilde{G}^{\alpha}_{ki}(\tau, \xi-\mu R, R)$ по μR, получим

$$\sum_{i,k}\sum_{\alpha}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}}\left\{\frac{1}{m_i}\widetilde{G}^{\alpha}_{ik}(\tau, \xi, -R)+\frac{1}{m_k}\widetilde{G}^{\alpha}_{ki}(\tau, \xi-\mu R, R)\right\} d\vec{R} =$$

$$= -\mu\sum_{i,k}\frac{1}{m_k}\sum_{\alpha,\beta}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta}\frac{\partial \widetilde{G}^{\alpha}_{ki}}{\partial \xi^{\beta}} d\vec{R} +$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\sum_{i,k}\frac{1}{m_k}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta}R^{\gamma}\frac{\partial^2 \widetilde{G}^{\alpha}_{ki}}{\partial \xi^{\beta}\partial \xi^{\gamma}} d\vec{R} + 0(\mu^3).$$

Мы переменили индексы суммирования и воспользовались четностью выражения $\widetilde{G}^{\alpha}_{ik}(\tau, \xi, -R)+\widetilde{G}^{\alpha}_{ik}(\tau, \xi, R)$.

Точно также получим

$$\sum_{i,k}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}}\{\widetilde{D}_{ik}(\tau, \xi, -R)+\widetilde{D}_{ki}(\tau, \xi-\mu R, R)\} d\vec{R} =$$

$$= -\mu\sum_{i,k}\sum_{\beta}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta}\frac{\partial D_{ki}}{\partial \xi^{\beta}} d\vec{R} + 0(\mu^3).$$

Тогда, отбрасывая в (19) и (20) члены порядка μ и выше, найдем

$$\frac{\partial \widetilde{j}^{\alpha}}{\partial \tau} = \sum_{\beta}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi^{\beta}} - \sum_{i}\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial \xi^{\alpha}}\widetilde{n}_i(\tau, \xi), \tag{21}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{n}\,\widetilde{\varepsilon})}{\partial \tau} = -\sum_{i}\frac{1}{m_i}\sum_{\beta}\widetilde{j}^{\beta}_i\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial \xi^{\beta}} + \sum_{\alpha}\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \tag{22}$$

где

$$T_{\alpha\beta} = -\sum_{i}\frac{\hbar^2}{2m_i}\left\langle \frac{\partial \psi_i^{+}}{\partial r^{\alpha}}\frac{\partial \psi_i}{\partial r^{\beta}} + \frac{\partial \psi_i^{+}}{\partial r^{\beta}}\frac{\partial \psi_i}{\partial r^{\alpha}}\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta}\widetilde{D}_{ki}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} \tag{23}$$

и

$$S_{\alpha} = -\sum_{i}\frac{i\hbar^3}{4m_i^2}\left\langle \Delta\psi_i^{+}\frac{\partial \psi_i}{\partial r^{\alpha}} - \frac{\partial \psi_i^{+}}{\partial r^{\alpha}}\Delta\psi_i\right\rangle +$$

$$+\sum_{i,k}\frac{1}{m_i}\int \Phi_{ik}\widetilde{G}^{\alpha}_{ik}(\tau, \xi', R)\, d\vec{R} - \sum_{i,k}\frac{1}{m_k} -$$

$$-\sum_{i,k}\frac{1}{m_k}\sum_{\beta}\int \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial R^{\beta}} R^{\alpha}\widetilde{G}^{\beta}_{ki}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R}. \tag{24}$$

Все средние берутся уже по состоянию статистического равновесия, определяемому параметрами $\widetilde{n}_i(\tau, \xi)$, $\widetilde{\theta}(\tau, \xi)$ и $\widetilde{\vec{V}}(\tau, \xi)$. Произведем замену операторных волновых функций $\psi_i \to e^{\frac{im_i Vr}{\hbar}} \psi_i$. В состоянии статистического равновесия покоящейся жидкости все средние должны быть инвариантны относительно преобразования $\vec{r} \to -\vec{r}$ и $\vec{k} \to -\vec{k}$ (k — волновой вектор).

Тогда для величин $T_{\alpha\beta}$ и S_α в нашем приближении получим

$$T_{\alpha\beta} = -\tilde{\rho}\tilde{V}^\alpha\tilde{V}^\beta - \delta_{\alpha\beta}P(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}), \tag{25}$$

$$S_\alpha = -\tilde{V}^\alpha(\widetilde{n\mathcal{E}}_0(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}) + \frac{\tilde{\rho}\tilde{V}^2}{2} - P(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}), \tag{26}$$

где

$$P(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}) = \sum_i \frac{\hbar^2}{m_i}\left\langle \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\int\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial R^\alpha}R^\alpha\tilde{D}_{ki}(R\,|\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta})\,d\vec{R}. \tag{27}$$

При выводе (26) использованы также соотношения

$$\tilde{G}^\alpha_{ik}(R\,|\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta},\tilde{V}) = -\frac{m_i\tilde{V}^\alpha}{2}\tilde{D}_{ik}(R\,|\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta})$$

и

$$\tilde{n}\tilde{\varepsilon}_0(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}) = \sum_i\frac{\hbar^2}{2m_i}\sum_\beta\left\langle\frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}\right\rangle_{\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\int\Phi_{ik}\tilde{D}_{ik}(R\,|\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta})\,d\vec{R}.$$

Тогда уравнения (21) и (22) примут вид

$$\frac{\partial\tilde{j}^\alpha}{\partial\tau} = -\sum_\beta\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{V}^\alpha\tilde{V}^\beta)}{\partial\xi^\beta} - \frac{\partial P(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta})}{\partial\xi^\alpha} - \sum_i\frac{\partial\tilde{U}_i}{\partial\xi^\alpha}\tilde{n}_i, \tag{28}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{n\varepsilon})}{\partial\tau} = -\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left\{\tilde{V}^\alpha\left[(\tilde{n}\tilde{\varepsilon}_0(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta}) + \frac{\tilde{\rho}\tilde{V}^2}{2} + P(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\theta)\right]\right\} -$$

$$-\sum_i\frac{1}{m_i}\sum_\beta\tilde{j}^\beta_i\frac{\partial\tilde{U}_i}{\partial\xi^\beta}. \tag{29}$$

Для полного гидродинамического описания многокомпонентной системы к полученным уравнениям надо добавить выражение для диффузионных потоков. Однако легко видеть, что в принятом здесь приближении, как и должно быть, диффузия отсутствует. Действительно,

$$\tilde{I}^\alpha_i(\tau,\xi) = {}^{(0)}\tilde{j}_i - \tilde{\rho}_i\tilde{V}^\alpha = 0,$$

так как ${}^{(0)}\tilde{j}^\alpha_i(\ldots\tilde{n}_i\ldots,\tilde{\theta},\tilde{V})$ определяется по состоянию локального равновесия и в согласии с (14) ${}^{(0)}\tilde{j}^\alpha_i = \tilde{\rho}_i\tilde{V}^\alpha$.

Введем энтропию на одну молекулу $\tilde{s} = -\frac{\partial F(\ldots \tilde{n}_i \ldots, \tilde{\theta})}{\partial \tilde{\theta}}$, где $F(\ldots \tilde{n}_i, \ldots, \tilde{\theta})$ — свободная энергия. Тогда точно так же, как и в работе [1], уравнение (29) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\tilde{s}}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} + \sum_{\alpha} \tilde{V}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi^{\alpha}} = 0. \tag{30}$$

Возвращаясь в уравнениях (18), (28), (30) к переменным t, r, получим известную систему уравнений гидродинамики идеальной жидкости.

Учет в (23) и (24) членов порядка μ приводит к уравнениям гидродинамики с учетом вязкости, теплопроводности и диффузии. Этот случай будет рассмотрен в следующей статье.

Автор выражает искреннюю признательность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе, а также И. А. Квасникову и В. Д. Кукину за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красников В. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 1966.
2. Боголюбов Н. Н. Праць Ин-ту Мат., № 10, 1948.
3. Гуров К. П. ЖЭТФ, 18, 110, 1948.
4. Боголюбов Н. Н. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ. Дубна, 1963.

Поступила в редакцию
6. 1 1965 г.

Кафедра
теоретической физики