Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 530.12

Ю. П. ПЫТЬЕВ

ПЯТИМЕРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СХЕМА (II). ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Продолжено исследование пятимерного принципа относительности.

В настоящей работе будет рассмотрен общий случай пятимерного риманова пространства R_5 с метрической формой *

$$-d\sigma^2 = G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

и дана соответствующая физическая интерпретация.

Как неоднократно подчеркивалось в предыдущих сообщениях [1], рассматриваемое пятимерное пространство вводится в силу представления классических частиц как сингулярностей соответствующих полей. Получаемая при этом структура метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ такова, что его пятые строка и столбец G_{4i}, G_{i4} составлены из величин, пропорциональных потенциалам электромагнитного поля. Отсюда следует, что отражение $x^4 \longleftrightarrow -x^4$ по пятой координате изменяет знак этих компонентов. Это в дальнейшем будет рассматриваться как переход частица$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$античастица (электрический заряд меняет знак в коэффициенте перед электромагнитными потенциалами). При этом 4×4 часть тензора $G_{\alpha\beta}$ инвариантна относительно отражения, так как здесь электромагнитные потенциалы встречаются только в виде билинейных комбинаций.

В первой части работы основное внимание сосредоточено на выяснении физического смысла пространства R_5, на его связи с пространством Эйнштейна R_4 общей теории относительности. Пространство R_4 общей теории относительности выделяется как подпространство R_5 (вообще говоря неголономное). При этом первые четыре координаты $x^0 \div x^3$ отождествляются с соответствующими координатами R_4 и используются два свойства фотона: мировая линия фотона, изотропная в R_5, имеющая общую точку с некоторым R_4, целиком принадлежит этому R_4 и изотропна в R_4 и фотон тождествен своей античастице.

Эти свойства позволяют связать метрику R_5 с метрикой R_4. Выделяемое таким образом пространство общей теории относительности естественно назвать видимой частью R_5 или видимым миром. При этом одномерное неголономное, ортогональное R_4 подпространство, дополняющее R_4 до R_5, имеет смысл собственного времени свободной частицы. Что касается поведения частиц и античастиц (электрически заря-

* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0{,}4$ $a, b, c, \ldots = 0{,}3$.

женных), то оно оказывается, грубо говоря, зеркально отраженным относительно R_4.

Далее коротко обсуждается формализм, связанный с выделением видимых частей мировых пятимерных величин, вводится оператор проектирования на видимый мир и обсуждается подгруппа общих преобразований координат в R_5, инвариантами которой являются видимые величины.

Во второй части работы лагранжевым методом рассматриваются уравнения слабого метрического поля. Выражение для лагранжиана выбирается по аналогии с соответствующим выражением в общей теории относительности, в качестве координатных условий используется условие гармоничности.

Как следует из этой части работы, случай, когда метрическое поле R_5 представлено только метрическим полем видимого мира R_4, включает кроме обычного слабого гравитационного поля также и поля тяжелых гравитонов и при дополнительном условии постоянства массы частиц, соответствующих полю, приводит к уравнениям Фирца—Паули для частиц спина два. В противоположном случае, когда метрическое поле R_5 таково, что видимый мир — плоский, последнее описывается уравнениями Максвелла и представляет электромагнитное поле. В этом случае, как и следовало ожидать, метрическое поле не содержит тяжелых векторных частиц (в противном случае была бы отлична от нуля плотность массы покоя поля, что в рассматриваемом приближении привело бы к возникновению гравитационного поля).

Наконец, общий случай произвольного слабого метрического поля, коротко описанный в конце работы, включает поля скалярных, векторных и тензорных частиц. Координатное условие фиксирует связь между этими полями.

Видимый мир

В этой части работы выясняется связь метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ пятимерного пространства R_5 и метрического тензора g_{ik} пространства Эйнштейна R_4 общей теории относительности. Решению этой задачи мы предпошлем короткое обсуждение некоторых свойств плоского пятимерного пространства, рассмотренного в предыдущей работе [1], что сделает более прозрачной основную идею.

Прежде всего, как это следует из работы [1], любая из гиперплоскостей $x^4=\mathrm{const}$ плоского пятимерного пространства представляет псевдоевклидово пространство специальной теории относительности. Физической характеристикой этого пространства как гиперплоскости пятимерного пространства является тот факт, что проекция мировой линии фотона на эту гиперплоскость остается изотропной геодезической. Более наглядно можно сказать, что если фотон представлять локализованным в пространстве $x^1 \div x^4$, то, возникнув в гиперплоскости $x^4=\mathrm{const}$, он никогда ее не покидает.

Если далее мы представим себе наблюдателя, изучающего с помощью фотонов поведение свободных частиц в плоском пятимерном пространстве, то в конечном счете все полученные им сведения будут касаться только лишь проекций его мировой линии и мировых линий частиц на какую-нибудь из гиперплоскостей $x^4=\mathrm{const}$ (речь идет таким образом о хронометрии в специальной теории относительности). Как следует отсюда, x^4 координаты наблюдателя и частиц останутся при этом полностью неопределенными [1].

Отметим, наконец, связь мировых линий частиц, античастиц и фотонов. Рассмотрим частицу и античастицу с одинаковыми энергиями

P^0 и импульсами P^i, $i=1, 2, 3$, находящиеся в точках

$$A_1(x^i+\delta x^i,\ x^4+\delta_1 x^4) \text{ и } A_2(x^i+\delta x^i,\ x^4+\delta_2 x^4) \tag{1}$$

соответственно. Пусть в будущем их мировые линии пересекаются и точка пересечения B имеет координаты x^i, x^4. Так как $A_{1,2}B=(\delta x^i,\ \delta_{1,2}x^4)$ — изотропные векторы, для них имеет место равенство

$$-\delta\sigma^2 = -(\delta x^0)^2 + (\delta x^1) + (\delta x^2) + (\delta x^3) + (\delta x^4)^2 = 0,$$

так что

$$-\delta_{1,2}x^4 = \pm\sqrt{(\delta x^0)^2 - (\delta x^1)^2 - (\delta x^2)^2 - (\delta x^3)^2}. \tag{2}$$

Здесь знак плюс соответствует частице, минус — античастице. Рассмотрим третью точку A с координатами $x^i+\delta x^i$, $x^4+\delta x^4$,

где
$$\delta x^4 = \frac{1}{2}(\overline{\delta}_1 x^4 + \overline{\delta}_2 x^4) \tag{3}$$

и $\overline{\delta}_1 x^4$, $\overline{\delta}_2 x^4$ берутся из формулы (2), в которую справа подставляется $\overline{\delta} x^i$ (в плоском случае $\overline{\delta} x^4=0$). Если δx^σ ограничить требованием, чтобы выпущенная из A частица также попала в мировую точку B встречи частицы и античастицы, то нетрудно видеть, что это будет мировая линия частицы и соответствующей античастицы, в нашем случае — фотона. Эта мировая линия целиком принадлежит гиперплоскости $x^4=\mathrm{const}$.

Вернемся к основной задаче, сформулированной в начале параграфа. Мы без изменения перенесем предыдущие рассуждения на общий случай пятимерного риманова пространства R_5, и это позволит нам установить метрику в подпространстве R_4, соответствующем $x^4=\mathrm{const}$ плоского пространства. Это подпространство представляет мир Эйнштейна общей теории относительности; как и в плоском случае, фотон, возникший в этом подпространстве, никогда его не покидает (в указанном выше смысле). Мы будем называть это подпространство видимым миром.

Итак, в R_5 мы рассматриваем две мировых точки $A_1(x^i+\delta x^i,\ x^4+\delta_1 x^4)$ и $A_2(x^i+\delta x^i,\ x^4+\delta_2 x^4)$ и проводим через первую мировую линию частицы, а через вторую — античастицы. Требование, чтобы в будущем эти линии пересекались в $B(x^i, x^4)$ и приводит к равенству

$$-\delta\sigma^2 = G_{ik}\delta x^i\delta x^k + 2G_{4i}\delta_{1,2}x^4\delta x^i + G_{44}(\delta_{1,2}x^4)^2 = 0,$$

из которого находим

$$\delta_{1,2}x^4 = -\frac{1}{G_{44}}\left\{G_{4i}\delta x^i \pm \sqrt{(G_{4i}G_{4k} - G_{44}G_{ik})\,\delta x^i\delta x^k}\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим далее точку A $(x^\sigma+\overline{\delta} x^\sigma)$, где $\overline{\delta} x^4$ связано с $\overline{\delta}_{1,2}x^4$, $\overline{\delta} x^i$ формулами (2, 3). Нетрудно видеть, что мировая линия частицы, проведенная через A, проходит через B только в том случае, если последняя одновременно является мировой линией частицы и античастицы, т. е. фотона. Действительно, элемент пятимерного интервала

$$-\overline{\delta}\sigma^2 = G_{\sigma\mu}\overline{\delta} x^\sigma\overline{\delta} x^\mu = \left(G_{ik} - \frac{G_{i4}G_{k4}}{G_{44}}\right)\overline{\delta} x^i\overline{\delta} x^k,$$

соединяющего A и B, равен нулю, если мировая линия AB является общей для частицы и соответствующей античастицы, т. е. $\overline{\delta}_1 x^4=\overline{\delta}_2 x^4$ (4). Верно и обратное утверждение. Таким образом, выпущенный из A фотон попадает в B, и метрическая форма видимого мира имеет вид

$$-ds^2 = \left(G_{ik} - \frac{G_{4i}G_{k4}}{G_{44}}\right)dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k.$$

Если ввести обозначения

$$A_\sigma = G_{\sigma 4}/\sqrt{G_{44}},\quad A^\sigma = G^{\sigma\mu}A_\mu = \delta_4^\sigma/A_4$$

(подчеркнем, что первые четыре компонента A_σ образуют ковариантный вектор в R_4), то для метрического тензора R_4 получим выражение $g_{ik}=G_{ik}-A_iA_k$, а метрический тензор R_5 можно представить в виде

$$G_{\sigma\mu} = \begin{pmatrix} g_{ik} + A_iA_k & A_iA_4 \\ A_kA_4 & A_4A_4 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Что касается соответствующего полностью контравариантного тензора, то нетрудно убедиться, что

$$G^{\sigma\mu} = \begin{pmatrix} g^{ik} & -\dfrac{1}{A_4}g^{is}A_s \\ -\dfrac{1}{A_4}g^{ks}A_s & \dfrac{1}{A_4^2}(1 + g^{sm}A_sA_m) \end{pmatrix}, \quad G^{\sigma\mu}G_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\sigma.$$

Для того чтобы дать наглядную интерпретацию выделенного R_5 видимого мира, нам будет удобно переписать метрическую форму (1) в следующем виде:

$$-d\sigma^2 = G_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{ik}dx^i dx^k + (A_\sigma dx^\sigma) = -ds^2 + (A_\sigma dx^\sigma)^2. \qquad (6)$$

Это выражение для $d\sigma$ указывает, что R_5 в итоге проведенных построений расщепляется на видимый мир — пространство Эйнштейна R_4 и ортогональное одномерное (вообще говоря неголономное) подпространство в направлении A_σ. Равенство (4), переписанное в виде

$$A_\sigma \delta x^\sigma = \pm\, \delta s,$$

позволяет пояснить предложенную интерпретацию рисунком.

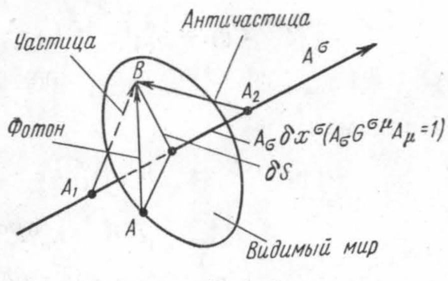

Рис. 1

Характеризуя полученные результаты более точно, следует подчеркнуть, что описанное расщепление пятимерного пространства на видимый мир и ортогональное подпространство получено введением в R_5 неголономной системы координат. При этом неголономной оказывается только новая пятая координата, определяемая равенством [2]

$$d\bar{x}^4 = A_\sigma\, dx^\sigma. \qquad (7)$$

Для свободной частицы $\pm d\bar{x}^4 = ds$ соответствует собственному времени (умноженному на скорость света), причем переход частица$\leftrightarrow$античастица соответствует отражению $d\bar{x}^4 \leftrightarrow -d\bar{x}^4$ (или $dx^4 \leftrightarrow -dx^4$).

Рассмотренное выделение видимого мира как подпространства R_5 формально достигается введением в каждой точке R_5 неголономного репера [2]

$$\lambda_\mu^{(0)} = (10\,000),\ \lambda_\mu^{(1)} = (01\,000),\ \lambda_\mu^{(2)} = (00\,100),$$
$$\lambda_\mu^{(3)} = (00\,010),\ \lambda_\mu^{(4)} = A_\mu = (A_0A_1A_2A_3A_4). \qquad (8)$$

Взаимный репер определяется при этом формулами

$$\lambda^{(\alpha)}_{\mu}\lambda^{\mu}_{(\beta)} = \delta^{\alpha}_{\beta},\ \lambda^{(\alpha)}_{\mu}\lambda^{\nu}_{(\alpha)} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

$$\delta^{\theta}_{\varphi} = \begin{cases} 1, & \theta = \varphi \\ 0, & \theta \neq \varphi \end{cases} \tag{9}$$

и имеет вид

$$\lambda^{\mu}_{(0)} = \left(1000 - \frac{A_0}{A_4}\right),\ \lambda^{\mu}_{(1)} = \left(0100 - \frac{A_1}{A_4}\right),$$
$$\lambda^{\mu}_{(3)} = \left(0001 - \frac{A_3}{A_4}\right),\ \lambda^{\mu}_{(4)} = A^{\mu} = \left(0000\ \frac{1}{A_4}\right). \tag{10}$$

Видимый мир формируется первыми четырьмя векторами репера. Метрический тензор $G_{\sigma\mu}$ в неголономной системе координат определяется равенствами

$$G_{(\sigma\mu)} = G_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(\sigma)}\lambda^{\beta}_{(\mu)},\ G_{\sigma\mu} = \begin{pmatrix} g_{ik} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

так что метрическая форма в неголономной системе координат имеет вид (6), если при этом учесть (7). Соответствующий полностью контравариантный тензор записывается следующим образом:

$$G^{(\sigma\mu)} = G^{\alpha\beta}\lambda^{(\sigma)}_{\alpha}\lambda^{(\mu)}_{\beta} = \begin{pmatrix} g^{ik} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ G^{(\sigma\mu)}G_{\mu\lambda} = \delta^{\sigma}_{\lambda}.$$

Воспользовавшись введенной неголономной системой координат, любую мировую пятимерную величину можно также расщепить на видимую часть, рассматриваемую в R_4, и соответственно часть в ортогональном подпространстве, которую естественно назвать невидимой. Например, видимая часть метрического тензора $G_{\sigma\mu}$ дается равенствами (11), в которых индексы $(\sigma\mu)$ принимают значения 0—3, т. е. совпадает с метрическим тензором Эйнштейна R_4. Видимая часть любого пятимерного вектора P_{σ} или P^{σ} дается соответственно равенствами

$$P_{(i)} = \lambda^{\sigma}_{(i)}P_{\sigma} = P_i - P_4A_i/A_4 = P_i - A_iP_{\sigma}A^{\sigma},$$
$$P^{(i)} = \lambda^{(i)}_{\sigma}P^{\sigma} = P^i.$$

Невидимая

$$P_{(4)}\lambda^{\sigma}_{(4)}P_{\sigma} = \frac{1}{A_4}P_4 = P_{\sigma}A^{\sigma},$$
$$P^{(4)} = \lambda^{(4)}_{\sigma}P^{\sigma} = A_{\sigma}P^{\sigma} = P_{(4)}.$$

Обратно, в силу равенств (9) любая мировая величина может быть восстановлена по видимой и невидимой частям, например, для рассмотренного вектора имеем

$$P^{\sigma} = \lambda^{\sigma}_{(\mu)}P^{(\mu)},\ P_{6} = \lambda^{(\mu)}_{\sigma}P_{(\mu)}.$$

Нетрудно видеть, что для многоиндексных объектов имеют место такие же соотношения.

Если интерес представляет только видимая часть, то для ее выделения удобно пользоваться оператором проектирования на видимый мир

$$\Pi^{\alpha}_{\beta} = \lambda^{\alpha}_{(i)}\lambda^{(i)}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \lambda^{\alpha}_{(4)}\lambda^{(4)}_{\beta}.$$

При этом видимая часть дается первыми четырьмя компонентами после свертывания с оператором проектирования. Например, видимая часть вектора, полученная в предыдущих равенствах, может быть получена также из соотношений

$$P_{(i)} = \Pi_i^\sigma P_\sigma = P_i - A_i P_\sigma A^\sigma, \; P^{(i)} = \Pi_\sigma^i P^\sigma = P^i.$$

В заключение этого параграфа уместно подчеркнуть, что так как введенный неголономный репер (8, 10) связан с метрическим тензором R_5 не ковариантно, то необходимо выделить подгруппу общих преобразований координат в R_5, относительно которых видимый мир оставался бы инвариантным. Рассмотрим с этой целью преобразования вида

$$x'^i = x^i, \; x'^4 = \varphi(x^\sigma). \tag{12}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что прежде всего

$$g'_{ik} = G'_{ik} - \frac{G'_{i4}G'_{k4}}{G'_{44}} = G_{ik} - \frac{G_{i4}G_{k4}}{G_{44}} = g_{ik},$$

т. е. метрический тензор видимого мира — инвариант этой группы. Точно также инвариантами оказываются видимые части пятимерных объектов, например, для векторов

$$P'_{(i)} = P_{(i)}, \; P'^{(i)} = P^{(i)},$$

хотя, с другой стороны,

$$P'_i = P_i + P_4\varphi, \; \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}.$$

Что касается подгруппы преобразований координат видимого мира

$$x'^i = x'^i(x^j), \; x'^4 = x^4,$$

то следствия их очевидны. В качестве иллюстрации можно привести преобразования для видимой и невидимой частей вектора:

$$P'^{(i)} = P^{(j)} \frac{\partial x'^i}{\partial x_j}, \; P'_{(j)} = P_{(i)} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j},$$

$$P_{(4)} = P^{(4)} = inv.$$

Слабое метрическое поле в R_5

В качестве лагранжиана пятимерного метрического поля по аналогии с теорией гравитации Эйнштейна будет использовано следующее выражение:

$$L = \sqrt{-G}\, G^{\sigma\mu} (\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}), \tag{13}$$

в котором G — дискриминант метрического тензора, $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ — пятимерные христофели. Следующие из (13) уравнения поля имеют вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial \Phi^{\mu\nu}_{,\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = 0, \tag{14}$$

где $\Phi^{\mu\nu}$ — известная тензорная плотность

$$\Phi^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}\sqrt{-G}, \; \Phi^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Phi^{\mu\nu} \tag{15}$$

и $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи. Совместно с уравнениями поля будет использовано дополнительное координатное условие — условие гармоничности Фока—де-Дондера [3] $\Phi^{\mu\nu}_{,\mu} = 0$.

В этой работе мы ограничимся случаем слабого метрического поля, т. е. будем считать, что

$$G_{\sigma\mu} = \overset{0}{G}_{\sigma\mu} + H_{\sigma\mu},\ H_{\sigma\mu} \ll 1,$$

$$\overset{0}{G}_{\sigma\mu} = diag(-1, 1, 1, 1, 1),\ G^{\sigma\mu} = \overset{0}{G}{}^{\sigma\mu} - H^{\sigma\mu}.\ H^{\sigma\mu} = \overset{0}{G}{}^{\sigma\alpha}\overset{0}{G}{}^{\mu\beta}H_{\alpha\beta},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta} = \overset{0}{G}_{\alpha\beta}.$$

Как следует из явного выражения (5) для тензора $G_{\sigma\mu}$, соотношения для окаймляющих членов означают, что

$$A_i = a_i \ll 1,\ A_4 = 1 + a_4,\ a_4 \ll 1.$$

Таким образом, произведения A_iA_k в первом приближении могут быть опущены, и мы полагаем

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} + h_{ik},\ h_{ik} = H_{ik},\ \overset{0}{g}_{ik} = diag(-1,\ 1,\ 1,\ 1),$$

$$H_{4k} = a_k,\ H_{44} = 2a_4,$$

где h_{ik} можно рассматривать как возмущения метрики видимого мира, не зависимые от a_σ

Функции поля (15) в рассматриваемом приближении заменяются на тензор (в дальнейшем трансформационные свойства величин рассматриваются по отношению к плоскому невозмущенному пространству)

$$\varphi_{\mu\nu} = -H_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{0}{G}_{\mu\nu}H,\ H = \overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta},$$

$$H_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\overset{0}{G}_{\mu\nu}\varphi,\ \varphi = \overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta},$$

так что уравнения поля (14) и дополнительное координатное условие могут быть переписаны в виде

$$R^{\mu\nu} = \frac{\partial}{dx^\alpha}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\mu\nu,\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_{\mu\nu}} = 0,$$

$$\varphi_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha},\ \varphi^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0.$$

Выпишем также явный вид лагранжиана (13) для случая слабого поля

$$L = \frac{1}{4}\left\{2\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{G}{}^{\sigma\theta}\overset{0}{G}{}^{\mu\nu}\left(\varphi_{\theta\nu,\beta} - \frac{1}{2}\varphi_{\beta\nu,\theta}\right)\varphi_{\alpha\mu,\sigma} + \frac{1}{3}\overset{0}{G}{}^{\sigma\theta}\varphi_{,\sigma}\varphi_{,\theta}\right\} \qquad (16)$$

уравнений поля и дополнительных координатных условий

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 H_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} = 0,$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(H_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\overset{0}{G}_{\beta\mu}H\right) = 0. \qquad (17)$$

Ниже будет также использован тензор энергии—импульса—массы [4] слабого метрического поля, соответствующий известному в теории гравитации псевдотензору

$$t^{\varkappa}_{\lambda} = \varphi_{\alpha\beta,\lambda} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\alpha\beta,\varkappa}} - \delta^{\varkappa}_{\lambda} L = \frac{1}{2} \left\{ 2\overset{0}{G}{}^{\varepsilon\beta} \overset{0}{G}{}^{\varkappa\theta} \overset{0}{G}{}^{\mu\nu} \left(\varphi_{\theta\nu,\beta} - \frac{1}{2} \varphi_{\beta\nu,\theta} \right) \varphi_{\varepsilon\mu,\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \overset{0}{G}{}^{\sigma\varkappa} \varphi_{,\sigma} \varphi_{,\lambda} \right\} - \delta^{\varkappa}_{\lambda} L. \tag{18}$$

Прежде чем останавливаться на некоторых частных случаях полученных уравнений, следует подчеркнуть, что в случае слабого поля расщепление R_5 на видимый мир и ортогональное подпространство становится особенно простым. Дело в том, что для выделения видимых частей малых величин ($H_{\sigma\mu}$ и т. п.) следует пользоваться голономным репером

$$\lambda^{(\sigma)}_{\mu} = \overset{0}{\lambda}{}^{\sigma}_{(\mu)} = \delta^{\sigma}_{\mu},$$

так как этот последний отличается от неголономного репера (8, 10) на величины первого порядка малости. Этот факт позволяет непосредственно рассматривать физическое содержание уравнений поля (17) и связанных с ними конструкций. Например, $h_{ik} = h_{ik}$ соответствуют гравитационным потенциалам слабого поля в общей теории относительности Эйнштейна. Величины a_i, как это следует из предыдущих сообщений [4] и будет еще раз показано ниже, следует с точностью до множителя отождествить с электромагнитными потенциалами (если a_i не зависят от x^4).

Остановимся несколько подробнее на некоторых частных случаях полей.

Метрическое поле видимого мира. Этот случай соответствует наличию только видимой части метрического поля, т. е. $a_\sigma = 0$. Воспользовавшись равенствами (16, 18, 17), получаем: лагранжиан

$$L = \frac{1}{4} \{ 2\overset{0}{g}{}^{ab} \overset{0}{g}{}^{st} \overset{0}{g}{}^{mn} h_{tn,b} h_{am,s} - \overset{0}{g}{}^{ab} \overset{0}{g}{}^{mn} \overset{0}{G}{}^{\sigma\theta} h_{nb,\theta} h_{am,\sigma} -$$

$$- 2\overset{0}{g}{}^{ab} \overset{0}{g}{}^{mn} h_{,b} h_{am,n} + \overset{0}{G}{}^{\beta\nu} h_{,\beta} h_{,\nu} \},$$

тензор энергии—импульса—массы

$$t^{\varkappa}_{\lambda} = \frac{1}{2} \{ 2\overset{0}{g}{}^{ib} \overset{0}{g}{}^{jn} \overset{0}{G}{}^{\varkappa t} h_{tn,b} h_{ij,\lambda} - \overset{0}{g}{}^{ib} \overset{0}{G}{}^{\varkappa j} (h_{ij,\lambda} h_{,b} + h_{ij,b} h_{,\lambda}) +$$

$$+ \overset{0}{G}{}^{\sigma\varkappa} (h_{,\sigma} h_{,\lambda} - \overset{0}{g}{}^{aj} \overset{0}{g}{}^{mi} h_{am,\sigma} h_{ij,\lambda}) \} - \delta^{\varkappa}_{\lambda} L$$

и уравнения поля с дополнительными условиями

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x^4} = 0, \quad \overset{0}{g}{}^{is} \frac{\partial h_{sk}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^k}. \tag{19}$$

Как было отмечено в работе [5], уравнения поля (19) описывают поля, соответствующие частицам с произвольной массой покоя. Для того чтобы получить уравнения поля, соответствующего частицам фиксированной массы покоя, следует рассмотреть решения (19), являющиеся собственными функциями оператора массы $\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^4 \partial x^4} = (m_0 c)^2$. Эти решения должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \overset{0}{G}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \overset{0}{g}{}^{em} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^e \partial x^m} - \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 h_{ik} = 0, \\ \hbar^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^4 \partial x^4} = -(m_0 c)^2 h = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

и так как теперь $h=0$, то последнее соотношение (20) дает $\overset{0}{g}{}^{is}\frac{\partial h_{sk}}{\partial x^i}=0$.

Мы получили таким образом систему уравнений Паули—Фирца, описывающую частицы с массой покоя m_0 и спином два

$$\left[\Box-\left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2\right]h_{ik}=0,\ h_{ik}=h_{ki},$$

$$\overset{0}{g}{}^{is}h_{is}=h=0,\ \overset{0}{g}{}^{is}\frac{\partial h_{sk}}{\partial x^i}=\frac{\partial h_k^i}{\partial x^i}=0.$$

В отличие от обычной релятивистской схемы, здесь в метрическом поле присутствуют тяжелые гравитоны. В случае нефиксированной массы покоя факт присутствия тяжелых гравитонов в метрическом поле видимого мира подтверждается неравенством нулю компонента тензора $\overset{0}{t_4}$, модуль которого определяет плотность массы покоя метрического поля [1, 5].

Наконец, если h_{ik} не зависит от пятой координаты, $dh_{ik}/dx^4=0$, мы имеем случай слабого гравитационного поля общей теории относительности, $\overset{0}{t_4}=0$.

Плоский видимый мир. $h_{ik}=0$. В рассматриваемом случае уравнения поля и координатные условия принимают вид

$$\overset{0}{G}{}^{\sigma\mu}\frac{\partial f_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}=0,\ f_{\sigma 4}=0,\ \overset{0}{G}{}^{\sigma\mu}\frac{\partial a_\sigma}{\partial x^\mu}=0,$$
$$f_{\sigma\mu}=\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial a_\sigma}{dx^\mu}. \tag{21}$$

Первая группа уравнений (21) в силу условия $f_{\sigma_4}=0$ может быть упрощена

$$\overset{0}{g}{}^{ij}\frac{\partial f_{is}}{\partial x^j}=0, \tag{22}$$

что совместно с равенством $f_{is}=\partial a_s/\partial x^i-\partial a_i/\partial x^s$ дает уравнения Максвелла.

Рассмотрим оставшееся поле a_4. Для него как следствие (21) мы имеем систему определяющих равенств

$$\frac{\partial a_4}{\partial x^4}=-\overset{0}{g}{}^{ik}\frac{\partial a_i}{\partial x^k},\ \frac{\partial a_4}{\partial x^i}=\frac{\partial a_i}{\partial x^4}, \tag{23}$$

в силу которых тождественно выполняется уравнение (см. (17))

$$\overset{0}{G}{}^{\sigma\mu}\frac{\partial^2 a_4}{\partial x^\sigma\,\partial x^\mu}=0. \tag{24}$$

Задача, таким образом, заключается в исследовании разрешимости (23). Прежде всего, как следует из второй группы равенств

$$\frac{\partial^2 a_4}{\partial x^i\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial a_k}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 a_4}{\partial x^k\,\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial a_i}{\partial x^4},$$

следовательно,

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^4}=0 \tag{25}$$

и поле f_{ik} не может описывать тяжелые частицы. Из (25) следует, что $\partial a_i/\partial x^4=0$, а так как, кроме того, $f_{4\sigma}=0$, то $\partial a_4/\partial x^i=0$, и с учетом (24) также и $da_4/dx^4=0$. Таким образом $a_4=0$. Из первой группы равенств (23) получаем $\overset{0}{g}{}^{is}\dfrac{\partial a_i}{\partial x^s}=0$, что соответствует лоренцовой калибровке потенциалов a_i в уравнениях Максвелла.

Нетрудно проверить, что, как это следует из выражения (16), рассматриваемому случаю соответствует следующий лагранжиан:

$$L=\frac{1}{4}\overset{0}{g}{}^{ab}\overset{0}{g}{}^{st}f_{sa}f_{bt}, \tag{26}$$

а из (18) находим выражение для тензора энергии—импульса—массы

$$t_s^k=\overset{0}{g}{}^{ib}\overset{0}{g}{}^{kt}\frac{\partial a_i}{\partial x^s}f_{bt}-\delta_s^k L,$$

$$t_s^4=t_4^k=t_4^4=0,$$

которое, как и лагранжиан (26), соответствует известным выражениям электродинамики (тензор t_{ik} соответствует каноническому тензору электродинамики; поскольку нас не интересует вопрос о моменте поля, мы не останавливаемся на вопросе о симметрии $t_{\sigma\mu}$).

Остановимся в заключение на преобразованиях (12), которые в случае слабого поля должны быть переписаны в виде

$$x'^i=x^i,\ x'^4=x^4+f(x^\sigma), \tag{27}$$

где $f, {}_{\lambda}(x^\sigma)\ll 1$. Учитывая порядок соответствующих величин, мы имеем следующие равенства, определяющие закон преобразования величин a_σ

$$a'_\sigma=a_\sigma-\frac{\partial f}{\partial x^\sigma}=a_\sigma-f_{,\sigma}.$$

Отсюда и из (21) прежде всего следует, что функция f не может быть произвольной и должна удовлетворять уравнению

$$\overset{0}{g}{}^{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k}=0$$

(при этом использовано, что $a_4'=a_4=0$). Функции f_{ik} — инварианты преобразования (27), которое, как теперь видно, соответствует преобразованию калибровки в электродинамике.

Общий случай слабого метрического поля. В общем случае уравнения поля и координатные условия можно записать в следующем виде:

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=0,\ \overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_4}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=0,$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=0,\ f_{4i}=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i}-\overset{0}{g}{}^{em}\frac{\partial h_{ei}}{\partial x^m},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha\beta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^4}. \tag{28}$$

Здесь удобно отождествить скалярные в R_4 части: $a_4=\dfrac{1}{2}h$. Тогда определяющие уравнения перепишутся в виде

$$\overset{0}{g}{}^{ab}\frac{\partial f_{ai}}{\partial x^b}+\frac{\partial^2 a_i}{\partial x^4\,\partial x^4}=0,\quad g^{ab}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^a\,\partial x^b}+\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^4 \partial x^4}=0,\quad \overset{0}{g}{}^{ab}\frac{\partial a_b}{\partial x^a}=0, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^4}=\frac{\partial h}{\partial x^i}-g^{em}\frac{\partial h_{ei}}{\partial x^m}$$

и второе уравнение (28), определяющее скалярное в R_4 поле, удовлетворяется автоматически. Что касается полученной системы уравнений, то нетрудно проследить, зафиксировав массы покоя полей, что в метрическом поле будут присутствовать тяжелые гравитоны, векторные и скалярные мезоны, при этом последнее условие (29) связывает поля этих частиц. Наконец, интересно отметить, что если в метрическом поле R_5 отсутствуют тяжелые гравитоны, то, как следует из полученных уравнений, поле a_i, a_4 соответствует фотонам и безмассовым скалярным частицам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 1966.
2. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.— Л., ГОНТИ, 1939.
3. Fok В. A. Journ. Phys. (USSR), **1**, 81, 1939.
4. Пытьев Ю. П. ДАН СССР, **149**, 2, 298—301; 1963; Пытьев Ю. П. «Журн. выч. мат. и физ.», **4**, 5, 871—879, 1964.
5. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 53, 1965.

Поступила в редакцию
19.4 1965 г.

Кафедра
математики