

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1966

УДК 534.222.2

К. ХАНДРИХ

К СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Рассматривается структура ударных волн в газе с теплопроводностью и вязкостью. Выводится «закон сохранения необратимого потока энергии» внутри ударного фронта. Получены приближенные аналитические выражения для интегральной кривой в случае, когда число Прандтля $P \ll 1$ и $P \ll 1$, и для профиля скорости в плазме с одинаковой температурой электронов и ионов в приближении $P=0$.

Введение

Структуру ударной волны обычно определяют численными методами. Однако численные результаты мало пригодны для исследования ее общих свойств, так как структура зависит от нескольких параметров (например, числа Маха (M), отношения удельных теплоемкостей (γ), числа Прандтля (P)).

Некоторые общие сведения о величине необратимых потоков и о профиле ударной волны можно получить при помощи «закона сохранения необратимого потока энергии», который выводится в первой части этой работы. Можно наглядно показать на плоскости «скорость—температура», какой вклад вносят в этот необратимый поток энергии анизотропное давление и тепловой поток.

Во второй части работы выводятся приближенные аналитические выражения для интегральной кривой в двух случаях $P \gg 1$ и $P \ll 1$. С помощью этих приближений можно проверить, с какой точностью известные интегральные кривые для $P = \infty, 0$ применимы в случае больших и малых значений P . Они позволяют также уточнить аналитические выражения для интегральной кривой в этих случаях. Малые числа Прандтля ($\sim 0,05$) осуществляются, например, в плазме с равными электронной и ионной температурами [2], большие — (~ 800), например, в нейтральном углекислом газе [3].

В последней части рассматривается приближенное аналитическое выражение для профиля скорости в плазме в предположении равенства электронной и ионной температур и с использованием интегральной кривой для $P=0$.

Закон сохранения необратимого потока энергии в ударном фронте

Ударная волна, как известно, образуется вследствие нелинейных эффектов, которые вызывают увеличение градиентов. Величина этих нелинейных эффектов зависит только от параметров, характеризую-

щих равновесие газа и скорость течения. В стационарных ударных волнах эти нелинейные эффекты, вызывающие нарастание градиентов, и необратимые процессы, уменьшающие градиенты, выравниваются.

Из уравнений непрерывности, сохранения импульса и энергии для стационарной плоской ударной волны в идеальном газе (см., например, [4]) после несложных преобразований можно получить

$$\gamma u = 1, \quad (1) \quad -\frac{v_{p_{xx}}}{j^\alpha} = \tau - \tau_0, \quad (2) \quad -\frac{(\gamma-1)q}{j^\alpha} = \tau - \tau_\infty, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0 &\equiv 1 + (\gamma M^2 u - 1)(1 - u), \\ \tau_\infty &\equiv 1 + (\gamma - 1) \left[\frac{\gamma M^2}{2} (1 - u) + 1 \right] (1 - u), \\ j_\alpha &\equiv n_\alpha v_\alpha k T_\alpha, \quad \tau \equiv \frac{T}{T_\alpha}, \quad u \equiv \frac{v}{v_\alpha}, \quad \gamma \equiv \frac{n}{n_\alpha}, \end{aligned} \quad (4)$$

(α обозначает величины перед фронтом ударной волны), p_{xx} — анизотропное давление, q — необратимый тепловой поток, $M \equiv \left(\frac{m v_\alpha^2}{\gamma k T_\alpha} \right)^{1/2}$ — число Маха, $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей, а прочие обозначения общеприняты.

Если из (3) вычесть (2), то получаем

$$v_{p_{xx}} - (\gamma - 1)q = j_\alpha(\tau_0 - \tau_\infty). \quad (5)$$

С помощью выражения (4) это уравнение можно переписать в виде

$$v_{p_{xx}} - (\sigma - 1)q = j_\alpha \frac{2\gamma}{\gamma - 1} M^2 \left(1 - \frac{1}{M^2} \right)^2 (1 - z)z, \quad (6)$$

причем

$$z \equiv \frac{1 - u}{1 - u_\beta}, \quad 0 \leq z \leq 1$$

и

$$u_\beta \equiv \frac{v_\beta}{v_\alpha} = \frac{1}{\gamma + 1} \left(\gamma - 1 - \frac{2}{M^2} \right).$$

(β обозначает величины после фронта).

Уравнение (5) или (6) представляет собой искомый «закон сохранения для необратимых процессов». В выражение $v_{p_{xx}} - (\gamma - 1)q$, ответственное за ослабление градиентов, дают вклад модули отдельных необратимых потоков энергии, так как всегда выполняется $p_{xx} \geq 0$ и $q \leq 0$. В правой части (5) или (6) стоит поток, вызванный нелинейными эффектами. Легко можно убедиться в том, что в линейном приближении по u этот поток равен нулю.

В стационарном случае модули обоих потоков энергии равны для любого значения скорости u . Из (2), (3) и (5) следует простое наглядное представление необратимых потоков энергии и суммы их модулей в плоскости τ, u (рис. 1). Согласно рис. 1 интегральная кривая $\tau = \tau(u)$ не влияет на «сумму» необратимых потоков энергии. Она только определяет, какой вклад вносят в эту сумму анизотропное давление p_{xx} и тепловой поток q .

Для того чтобы получить профили скорости и температуры, нужно еще знать явную зависимость потоков переноса от скорости, температуры и их градиентов. Самый простой вид эта зависимость имеет в приближении Навье—Стокса

$$p_{xx} = -\frac{4}{3} \mu(T) \frac{dv}{dx}, \quad q = -\kappa(T) \frac{dT}{dx}. \quad (7)$$

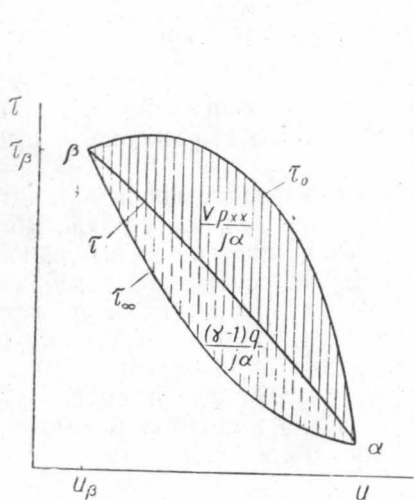


Рис. 1

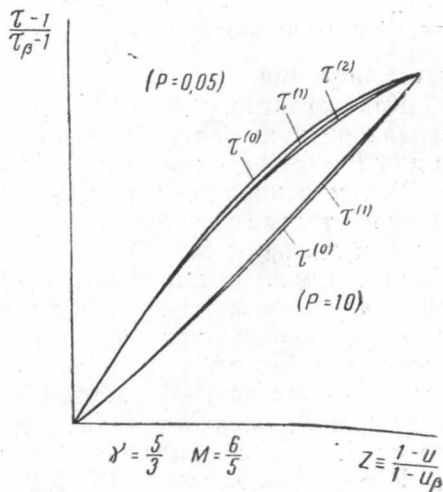


Рис. 2.

Если применить закон сохранения необратимых потоков энергии (6), то с помощью приближения Навье—Стокса легко получаются, в частности, следующие известные результаты. При увеличении коэффициентов переноса μ и κ градиенты $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{dT}{dx}$ должны уменьшаться, а поэтому ширина фронта увеличивается. Так как закон сохранения (6) действителен в каждой точке ударного фронта, этот вывод справедлив для любого промежутка фронта. Отсюда следует, что при увеличении коэффициентов переноса с температурой градиенты все более и более уменьшаются в направлении к концу ударного фронта, и профили скорости и температуры растягиваются. В частности, если вязкость μ и теплопроводность κ зависят от температуры как T^s , то из профиля, соответствующего $s=0$, можно получить искомый профиль путем преобразования $dx \rightarrow dx' = \tau^s dx$.

Подобный закон сохранения необратимых потоков энергии можно сформулировать также для ударных волн, в которых существенную роль играют и другие необратимые процессы, такие, как лучистый обмен, диффузия и т. д. Например, для полностью ионизованной плазмы, состоящей из ионов и электронов, которые движутся с одинаковой скоростью, получаем

$$v(p_{xx}^i + p_{xx}^e) - (\gamma - 1)(q^i + q^e) = j^a \frac{2\gamma}{\gamma - 1} M^2 \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)^2 (1 - z) z,$$

где p_{xx}^i , q^i , p_{xx}^e , q^e — соответственно анизотропное давление и тепловой поток ионов и электронов. Это уравнение справедливо также в случае различающихся температур ионов и электронов.

Интегральные кривые

Поделив (3) на (2), получим уравнение для интегральной кривой $\tau = \tau(u)$

$$\frac{3}{4} \frac{1}{p} \frac{1}{M^2} \frac{d\tau}{du} \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau - \tau_0} u, \quad (8)$$

где

$p \equiv \frac{\mu}{\chi} c_p$ — число Прандтля*, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Как известно, имеются три случая, в которых получается для интегральной кривой $\tau = \tau(u)$ простое аналитическое выражение, а именно для $P = \infty, 0, 3/4$ (см., например, [3]).

Разумно предположить, что небольшое изменение числа Прандтля вызывает только незначительное изменение интегральной кривой. Вблизи точек u_α, u_β можно легко доказать справедливость этого предположения с помощью линейного приближения. На основе этих соображений можно попытаться найти приближенные аналитические выражения для интегральной кривой, если P незначительно отличается от трех вышеуказанных случаев, используя в качестве нулевого приближения известные решения. В работе [1] Градом разработан приближенный метод для P , близкого к $3/4$. В данном разделе выводятся выражения для интегральной кривой в случае больших и малых P .

$P \gg 1$. Если записать (8) в виде

$$\tau - \tau_\infty = \frac{3}{4} \frac{1}{p} \frac{1}{M^2} \frac{\tau - \tau_0}{u} \frac{d\tau}{du}, \quad (9)$$

то видно, что при достаточно больших числах Прандтля P можно пренебречь правой частью и таким образом получить нулевое приближение для интегральной кривой

$$\tau^{(0)} = \tau_\infty. \quad (10)$$

Подставляя в правую часть (9) нулевое приближение (10), получим первое приближение

$$\tau^{(1)} - \tau_\infty = \frac{3}{4} \frac{1}{P} \frac{1}{M^2} \frac{\tau^{(0)} - \tau_0}{u} \frac{d\tau^{(0)}}{du}, \quad (11)$$

и аналогично

$$\tau^{(n)} - \tau_\infty = \frac{3}{4} \frac{1}{P} \frac{1}{M^2} \frac{\tau^{(n-1)} - \tau_0}{u} \frac{d\tau^{(n-1)}}{du}. \quad (12)$$

Для сходимости метода необходимо, чтобы все $\frac{d\tau^{(n)}}{du}$ для u из отрезка $[u_\alpha, u_\beta]$ оставались конечными. С помощью уравнений (4), (10) — (12) это условие выполняется для любых значений u, M, γ . В первом приближении для интегральной кривой в явном виде получается, напри-

* Согласно [5] зависимостью P от температуры можно пренебречь практически для всех возможных законов взаимодействия между частицами, если рассматривается идеальный газ ($c_p = \text{const}$).

мер, следующее выражение:

$$\tau^{(1)} - \tau_{\infty} = \frac{3}{4} \frac{1}{P} \frac{1}{M^2} (\gamma - 1) \frac{1-u}{u} [1 + \gamma M^2 (1-u)] \times \\ \times \left[\gamma M^2 - \frac{\gamma+1}{2} \gamma M^2 (1-u) - \gamma \right].$$

$P \ll 1$. В этом случае запишем уравнение (8) в виде

$$\tau - \tau_0 = \frac{4}{3} P M^2 u (\tau - \tau_{\infty}) \frac{1}{\frac{d\tau}{du}}$$

и аналогично получим

$$\tau^{(0)} = \tau_0, \\ \tau^{(1)} - \tau_0 = \frac{4}{3} P M^2 u (\tau^{(0)} - \tau_{\infty}) \frac{1}{\frac{d\tau^{(0)}}{du}}, \\ \tau^{(n)} - \tau_0 = \frac{4}{3} P M^2 u (\tau^{(n-1)} - \tau_{\infty}) \frac{1}{\frac{d\tau^{(n-1)}}{du}}.$$

Для сходимости метода необходимо, чтобы все $\frac{d\tau^{(n)}}{du}$ были отличны от нуля. Это условие не всегда выполняется. Известно (см., например, [4]), что при условии

$$\frac{1}{\gamma} \frac{3\gamma-1}{3-\gamma} < M^2 \quad (13)$$

на отрезке $[u'_{\beta}, u_{\beta}]$, где

$$u_{\beta} = \frac{1}{\gamma+1} \left(\gamma - 1 - \frac{2}{M^2} \right), \\ u'_{\beta} = \frac{1}{\gamma+1} \left(2 - \frac{\gamma-1}{\gamma M^2} \right),$$

для $P=0$ появляется так называемый изотермический скачок и $\tau = \tau_{\beta}$. Поэтому изложенный метод применим во всем диапазоне скоростей $[u_{\alpha}, u_{\beta}]$ только при условии

$$M^2 < \frac{1}{\gamma} \frac{3\gamma-1}{3-\gamma}. \quad (14)$$

Однако можно предполагать, что в противоположном случае (при условии (13)) приближения справедливы на полуоткрытом отрезке $[u_{\alpha}, u_{\beta}]$. В первом приближении для интегральной кривой получается

$$\tau^{(1)} - \tau_0 = -\frac{4}{3} P M^2 \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}(1-u) - \frac{1}{M^2}}{2u-1 - \frac{1}{\gamma M^2}} (1-u) u.$$

Детальный анализ сходимости рассмотренных методов связан с извест-

ными трудностями. Область и быстрота сходимости зависят от всех параметров u , M , γ .

На рис. 2 в качестве примера представлены первые приближения для $P=10$; $1/20$; $\gamma=5/3$; $M=6/5$.

Профиль скорости в плазме

В этом разделе мы попытаемся получить приближенное аналитическое выражение для профиля скорости в плазме при определенных упрощающих предположениях. Согласно [6] для $M \ll 2$ электронная и ионная температуры в ударной волне не очень сильно отличаются друг от друга*. Поэтому в дальнейшем предполагаем электронную и ионную температуры равными. Если относительную ошибку интегральной кривой определить с помощью выражения

$$F = \frac{|\tau^{(1)} - \tau^{(0)}|}{\tau_B - 1},$$

то для плазмы с одинаковыми электронной и ионной температурами ($P \approx 0,05$, [2]), например, в случае $M=6/5$ получаем $F_{\max} \approx 3\%$ (см. рис. 2), а в случае $M^2 \gg 1$ $F_{\max} \approx 6\%$. Это значит, что для плазмы $\tau = \tau^{(0)} = \tau_0$ представляет собой довольно хорошее приближение для интегральной кривой.

Подставляя в (2) для q приближение Навье — Стокса (7), для интегральной кривой $\tau = \tau_0$ (3) и учитывая, что $\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\tau}{du} \frac{du}{dx}$ и $x \sim \mu \sim T^{\frac{5}{2}}$, получаем

$$\xi - \xi_0 = \frac{15}{4} \frac{1}{M} \int_{u_0}^u dt \frac{\left[\frac{5}{3} M^2 (1 - 2t) + 1 \right] \left[\frac{5}{3} M^2 (t - t^2) + t \right]^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{3} M^2 (5t - 4t^2 - 1) + 5(t - 1)}, \quad (15)$$

где

$$\xi \equiv \frac{x}{l_\alpha}, \quad l_\alpha = \frac{1}{P} \frac{4}{3} \mu(T_\alpha)$$

(Pl_α — длина свободного пробега для передачи импульса). Оказывается, что интеграл из (15) можно вычислить точно. После несложных, но громоздких вычислений получено выражение, которое мы приводим уже в упрощенном виде, представляющем собой хорошее приближение для случая $M \ll 2$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{15} M (\xi - \xi_0) = & A \ln \left(\frac{as - 1}{as + 1} \right) - B \ln \left(\frac{s - \sqrt{u'_\beta}}{s + \sqrt{u'_\beta}} \right) - \\ & - 2 \left(1 + \frac{1}{a^2} \right)^5 a^5 \left\{ \frac{\frac{4}{5} + \frac{5}{4} s^2 + \frac{5}{2} s^4 + \frac{9}{8} s^6}{(s^2 + 1)^5} s - \frac{11}{4} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} s \right\} + c(u_0), \quad (16) \end{aligned}$$

* В этом случае можно также пренебречь влиянием процесса выравнивания электронной и ионной температур на структуру ударной волны.

где

$$A \equiv \frac{a^2 - 1}{3a^2 - 5}, \quad B \equiv \frac{1}{2^{11}} \frac{3 - a^2}{3a^2 - 5} \left[\left(3 - \frac{1}{a^2} \right) \left(1 + \frac{5}{a^2} \right) \right]^{3/2} a^5,$$
$$s \equiv \left(\frac{1 + \frac{1}{a^2}}{u} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad a^2 \equiv \frac{5}{3} M^2. \quad (17)$$

Постоянная интегрирования $C(u_0)$ выбирается таким образом, что $u = u_0$ при $\xi = \xi_0$, причем u_0 и ξ_0 — произвольные величины. Для слабых ударных волн ($M \rightarrow 1$) в правой части (16) главную роль играют первые два члена, поскольку $A \sim B \sim \frac{1}{M_2 - 1}$. В ударных волнах произволь-

ной силы основной вклад дают при $u \rightarrow u_\alpha$ — первый член, а при $u \rightarrow u_\beta$ — второй член. Третий член существен только для центра ударной волны. Также видно, что с увеличением M профиль растягивается к концу ударной волны ($u \rightarrow u_\beta$), поскольку второй и третий члены в (16) $\sim M^5$, в то время как первый член в первом приближении не зависит от M .

Напомним еще раз, что выражение (16) дает правильный профиль во всем диапазоне $[u_\alpha, u_\beta]$ только при условии (14). В противном случае (16) применимо только в диапазоне $[u_\alpha, u'_\beta]$ и изменение $u_\beta \rightarrow u'_\beta$ происходит «в одной точке».

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. *Commun. Pure and Appl. Math.*, **5**, 3, 257, 1952.
2. Брагинский С. И. *Вопросы теории плазмы*, том 1, 1963.
3. Hayes W. D. in *Fundamentals of Gas Dynamics*, vol. III. Princeton, 1958. Перевод. Основы газовой динамики. Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника. М., 1963.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М., 1963.
5. Charman S. and Cowling T. G. *The Mathematical theory of Non-Uniform Gases* Cambridge, 1952. Перевод. С. Чепмен и Т. Г. Каулин. Математическая теория неоднородных газов. М., 1960.
6. Jaffrin M. Y., Probstein R. F. *Phys. Fluids.*, **7**, No. 10, 1964.

Поступила в редакцию
14. 5 1965 г.

Кафедра
молекулярной физики