Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1966

УДК 539.12.123

ЗЫОНГ ВАН ФИ

МАССЫ НУКЛОНОВ И МЕЗОНОВ

Вводится 8-мерное пространство, имеющее два подпространства: обычное (псевдоевклидово) и внутреннее, которое мы предполагаем евклидовым. Устанавливая связь между евклидовым и псевдоевклидовым 4-мерным пространствами и учитывая, что теория поля в евклидовом пространстве свободна от расходимостей, ряд расчетов в обычном пространстве предлагается заменить расчетами в евклидовом пространстве. В частности, для вычисления массы частиц развивается во внутреннем евклидовом пространстве нелинейная спинорная теория поля. Полученные значения массы согласуются с результатами других авторов.

В изучении отдельных эффектов и свойств частиц сделано довольно много. Однако обычная релятивистская квантовая теория поля не смогла добиться вполне убедительно устранения расходимости и построить модель частицы. В этом отношении перспективным является развитие идей нелинейной спинорной теории, как одной из полевых, динамических моделей частиц. Однако даже наиболее разработанные варианты Гейзенберга [1] и других не могут без добавочных гипотез решить вопроса об устранении расходимостей.

Для регуляризации мы предлагаем использовать вычисления в четырехмерном евклидовом пространстве вместо псевдоевклидового. Допуская во внутреннем пространстве наличие нелинейных уравнений, мы получаем возможность вычисления массы частиц. Тем самым мы развиваем наши предыдущие работы по комплексному пространству [3] и исследования [2] и [4] о связи пространств.

Однако для возможности замены расчетов в псевдоевклидовом пространстве необходимо наличие связи между этими пространствами. В качестве объединяющего пространства можно взять 8-мерное пространство:

$$dS^2 = dx_0^2 - dx_3^2 - dx_2^2 - dx_1^2 - dx_5^2 - dx_8^2 - dx_7^2 - dx_6^2. \qquad (А)$$

Ограничимся рассмотрением случая $dS^2=0$, допускающего разделение 8-мерного пространства на два инвариантных пространства

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_3^2 - dx_2^2 - dx_1^2 = dx_5^2 + dx_8^2 + dx_7^2 + dx_6^2, \qquad (Б)$$

x_5 соответствует внутреннему времени [3]. Обозначим через $d\tau$ и $d\tau'$ собственное время в обычном и соответствующий его аналог во внутреннем пространстве. Тогда согласно (Б) $d\tau = d\tau'$, получаем

$$p_\alpha^2 = \lambda^2 \left(\frac{dx_\alpha}{d\tau} \right)^2 = \lambda^2, \quad p_\beta^2 = \lambda^2 \left(\frac{dx_\beta}{d\tau'} \right)^2 = \lambda^2,$$

$$p_\alpha = \lambda \frac{dx_\alpha}{d\tau}, \quad p_\beta = \lambda \frac{dx_\beta}{d\tau}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

$$\beta = 5, 6, 7, 8,$$

где p_α и p_β аналоги — 4-импульсы обычного и внутреннего пространства. Массу покоя λ можно определить путем вычисления длины 4-импульса во внутреннем (согласно гипотезе — евклидовом) пространстве.

Для получения спектра масс необходимо рассматривать λ как массу покоя, возникающую в результате взаимодействия, но теперь уже во внутреннем пространстве. В качестве конкретного вида взаимодействия рассматривается нелинейное взаимодействие.

В связи с этим нелинейная спинорная теория поля, специально в варианте Гейзенберга [4] или Намбу [5] развивается во внутреннем евклидовом пространстве (оставляя при этом уравнения поля в обычном пространстве нелинейными).

Теперь теория свободна от расходимостей. Полученные численные значения массы покоя частиц близки к результатам других авторов [1, 5, 6], полученных в обычном пространстве с использованием тем или другим методом регуляризации.

Спинорное уравнение во внутреннем пространстве

Рассмотрим спинорное уравнение во внутреннем 4-мерном евклидовом пространстве:

$$(i\Gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi(x) = 0, \tag{1}$$

где Γ^μ — матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}. \tag{2}$$

Они представляют собой четырехрядные квадратные матрицы, которые могут быть выбраны унитарными, если $\Gamma^* = \Gamma$. В частности, их можно выбирать в форме, в которой Γ^0 совпадает с матрицей γ^0, а Γ^k ($k = 1, 2, 3$) получаются умножением матриц γ^k на мнимое число i (γ^0, γ^k — матрицы Дирака).

Вследствие (2) лагранжиан, соответствующий (1), принимает вид

$$L = \frac{i}{2}\chi^*(x)\Gamma^\mu \partial_\mu \chi(x) - \frac{i}{2}\partial_\mu \chi^*(x)\Gamma^\mu \chi(x) - m\chi^*(x)\chi(x), \tag{3}$$

звездочкой обозначено эрмитовое сопряжение.

При преобразовании поворотов в пространстве координат волновая функция $\chi(x)$ преобразуется по закону

$$\chi(x) \to \chi'(x') = \exp\frac{1}{2}\Gamma^\mu \Gamma^\nu \theta \chi(x)$$

(θ — угол поворота). При этом $\chi^*(x)\chi(x)$, $\chi^*(x)\Gamma^\mu\chi(x)$ и т. д. ведут себя как скаляр, вектор и т. д.

Волновую функцию $\chi(x)$ представим в обычной форме

$$\chi(x) = \chi^+(x) + \chi^-(x),$$

где

$$\chi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ikx} \sum_{\mu=1,2} a^\pm_\mu(\vec{k})\, v^{\mu\pm}(\vec{k}) \sqrt{\frac{m}{k_0}}\, d\vec{k},$$

$$k_0 = \sqrt{m^2 - \vec{k}^2}.$$

Выделенные таким образом спиноры при условии ортонормированности

$$u^{*\mu\pm}(\vec{k})\,\Gamma^0 u^{\nu\mp}(\vec{k}) = \pm\frac{k_0}{m}\delta^{\mu\nu} \tag{4}$$

удовлетворяют соотношениям

$$u^{*\mu\pm}(\vec{k})\,\Gamma^0 u^{\nu\mp}(\vec{k}) = \pm\frac{k_0}{m}\delta^{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$u^{*\mu\pm}(\vec{k})\,\Gamma^0 u^{\nu\pm}(\vec{k}) = 0, \tag{6}$$

$$u^{*\nu\pm}(\vec{k})\,u^{\nu\pm}(\vec{k}) = 0, \tag{7}$$

$$\sum u^{\nu\pm}(\vec{k})\,u^{*\nu\mp}(\vec{k}) = \frac{m \mp \Gamma^{\mu}k_{\mu}}{2m}. \tag{8}$$

«Внутренняя энергия» до квантования положительно определена, а проекция вектора изоспина на направление внутреннего импульса имеет вид

$$I^3 = \frac{1}{2}\int [a_1^{*+}(\vec{k})\,a_1^{-}(\vec{k}) - a_2^{*+}(\vec{k})\,a_2^{-}(\vec{k}) - a_2^{*-}(\vec{k})\,a_2^{+}(\vec{k})]\,d\vec{k}.$$

Квантование поля уравнения (1) обычным путем при использовании (4)—(8) дает перестановочные соотношения

$$[a_{\mu}^{\pm}(\vec{k}),\ a_{\nu}^{*\pm}(\vec{k})]_{+} = \mp\,\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \tag{9}$$

где $a^{*+}(\vec{k})$, $a^{-}(\vec{k})$ условно принимаются как операторы рождения и уничтожения частиц; $a^{+}(\vec{k})$, $a^{*-}(\vec{k})$ — операторы рождения и уничтожения античастиц.

Для 4-вектора энергии—импульса при помощи (9) находим

$$p^{\mu} = \int d\vec{k}k^{\mu}\,[a_1^{*+}(\vec{k})\,a_1^{-}(\vec{k}) + a_2^{*+}(\vec{k})\,a_2^{-}(\vec{k}) -$$

$$- a_1^{+}(\vec{k})\,a_1^{*-}(\vec{k}) - a_2^{+}(\vec{k}) - a_2^{+}(\vec{k})\,a_2^{*-}(\vec{k})]. \tag{10}$$

Хотя последние члены в (10) входят с отрицательным знаком, p^{μ} фактически имеет правильную форму. Рассмотрим следующие одночастичные состояния для частиц и для античастиц:

$$\Phi_{\nu} = \int f^{*}(\vec{k})\,a_{\nu}^{*+}(\vec{k})\,\Phi_0 d\vec{k}, \tag{11}$$

$$\widetilde{\Phi}_{\nu} = \int f(\vec{k})\,a_{\nu}^{*+}(\vec{k})\,\Phi_0 d\vec{k}, \tag{12}$$

где Φ_0 — вакуумное состояние.

Усредняя p^{μ} и локализуя функцию распределения $f(\vec{k})$ в окрестности значения $\vec{K}$ при использовании (9), получаем

$$\langle p_{\nu}^{\mu}\rangle = \langle\widetilde{p}_{\nu}^{\mu}\rangle = K_{\nu}^{\mu}\ (\nu = 1, 2,\ \mu = 1, 2, 3, 4).$$

Аналогичным образом для I^3 находим

$$\langle I_1^3 \rangle = \frac{1}{2}, \ \langle I_2^3 \rangle = -\frac{1}{2}, \ \langle \widetilde{I}_1^3 \rangle = -\frac{1}{2}, \ \langle \widetilde{I}_2^3 \rangle = \frac{1}{2}; \tag{13}$$

(13) позволяет интерпретировать состояние с $\langle I_1^3 \rangle = \frac{1}{2}$ и с $\langle I_2^3 \rangle = -\frac{1}{2}$ как состояния протона и нейтрона, $\langle \widetilde{I}_1^3 \rangle = -\frac{1}{2}$ и $\langle \widetilde{I}_2^3 \rangle = \frac{1}{2}$ — как состояния антипротона и антинейтрона.

С помощью (3) и (9) причинную функцию можно представить в виде

$$G^c(x) = (i\Gamma^\mu \partial_\mu + m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx} dk}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}, \tag{14}$$

$G^c(x)$ — оказывается конечной в любой точке внутреннего пространства (см. конкретный вид в (2)). В частности, при $x=0$ G_0^c принимает значение

$$G^c(0) = \theta(O+) \frac{im^3}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Gamma^0}{3} \right) - \theta(O-) \frac{-im^3}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Gamma^0}{3} \right). \tag{15}$$

Массы нуклонов и связанных частиц

Для вычисления масс частиц воспользуемся τ-функцией из теории Гейзенберга. При этом для каждой частицы ограничиваемся приближением, в котором φ-функции равны нулю при числе переменных $m+n>N$ [5], где N — заданное число. При этом, в соответствии с определением состояний частиц по (11) и (12), запишем τ-функцию в виде

$$\begin{aligned} \tau(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n) = \langle \Phi_0 T (\chi(x_1), \ldots \\ \ldots, \chi(x_m), \chi^*(y_1), \ldots, \chi^*(y_n)) \Phi_0 \rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

По методу И. Намбу [6] вводим нелинейный лагранжиан общего варианта

$$L = \frac{i}{2} \chi^* \Gamma^\mu \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} \partial_\mu \chi^* \Gamma^\mu \chi - m\chi^* \chi - \frac{l}{2} (\chi^* O_i \chi)^2 + m \chi^* \chi. \tag{17}$$

При этом $\chi(x)$ — волновая функция уравнения (1) с массой m, Oi — одна из матриц I, Γ^μ, $\Gamma^\mu \Gamma^\nu (\mu<\nu)$, $\Gamma^5 \Gamma^\mu$, Γ^5. Нелинейный член общего вида был рассмотрен в [8]. При этом со специальным выбором степени нелинейности был получен спектр масс.

В нашем случае требуется, чтобы последние два члена в (17) компенсировали друг друга. В первом приближении теории возмущений было показано в [3], что при взаимодействии скалярного типа для массы покоя имеем $\mathrm{l}m = \sqrt{2\pi}$ (m — масса нуклона). В дальнейшем будем вычислять массы нуклонов и связанных частиц по теории Гейзенберга [5] и [8], исходя из лагранжиана типа И. Намбу (17) и причинной функции (14).

Рассмотрим уравнение

$$i\Gamma^\mu \partial_\mu \chi(x) - l^2 O_i \chi(x) \chi^*(x) O_i \chi(x) = 0. \tag{18}$$

Производим вычисление масс в приближении $N=1$.

Как известно, в теории Гейзенберга в приближении $N=1$ имеется только решение для массы, равной нулю [5], [9] и [10]. Это обстоятельство связано с тем, что функция $s_F(x)$ в теории Гейзенберга в окрестности $x=0$ испытывает сильные осцилляции (для среднего значения $s_F(0)=0$). При этом масса нуклонов в теории Гейзенберга [8], [9] и [10] получалась только в приближении $N=3$. В нашем случае, как следует из (15), среднее значение $G^c(0)$ равно $\frac{im^3}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{4}$. В связи с этим для основного фермиона получаем массу покоя в приближении $N=1$, а для связанных состояний в приближении $N=2$.

Для фермионов из (16) и (18) находим

$$i\Gamma^\mu\partial_\mu\tau(x\,|) = il^2\,[\mathrm{Sp}\,O_i G^c(0) - O_i G^c(0)]\,O_i\,\tau(x\,|). \tag{19}$$

Подставляя в (19) значение $G^c(0)$, получим

$$i\Gamma^\mu\partial_\mu\tau(x\,|) = -\frac{l^2m^3}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{4}\,[\mathrm{Sp}O_i - O_i]\,O_i\tau(x\,|).$$

Полагая $\tau_\alpha(x\,|) = e^{ipx}\,\tau_\alpha$, в системе покоя частицы находим

$$m\Gamma^0\tau = \frac{l^2m^3}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{4}\,[\mathrm{Sp}O_i - O_i]\,O_i\tau.$$

Отсюда для разных вариантов взаимодействия получаем следующие решения:

При скалярном взаимодействии ($O_i=1$), $m=0$, $ml_1=4{,}09$. (19)′

При векторном взаимодействии ($O_i=\Gamma^\mu$), $m=0$, $ml_2=3{,}55$.

При тензорном взаимодействии ($O_i=\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu$, $\mu>\nu$), $m=0$, $ml_3=2{,}89$.

При псевдовекторном взаимодействии ($O_i=\Gamma^5\Gamma^\mu$), $m=0$, $ml_4=3{,}55$.

И при псевдоскалярном взаимодействии ($O_i=\Gamma^5$), $m=0$, $ml_5=7{,}08$.

Решение $m=0$, как предполагается в [3], соответствует массам $e-\nu$. Таким образом, полученные значения массы покоя фермионов имеют тот же порядок, что и в теории Гейзенберга или в варианте других авторов [6]. При этом l_1, l_2, ... — константы взаимодействия, вообще говоря, отличающиеся друг от друга.

Перейдем к вычислению масс связанных частиц, трактуемых как мезоны. Для этого рассмотрим τ-функции, зависящие от двух переменных.

Из (18) получим

$$i\Gamma^\mu\,\partial_\mu\tau(x\,|\,y) = il^2\,[\mathrm{Sp}\,(O_i\tau(x\,|\,x)) - O_i\tau(x\,|\,x)]. \tag{20}$$

Подставляя в (20) $\tau(x\,|\,y) = e^{iu\frac{x+y}{2}}\,\tau(x-y)$, систему покоя связанной частицы ($\vec{u}=0$) можем переписать в виде

$$\tau(x-y) = \frac{il^2}{(2\pi)^4}\int\frac{[(u_0+p_0)\,\Gamma^0 + \vec{\Gamma}\vec{p}]\,[\mathrm{Sp}\,(O_i\tau(0)) - O_i\tau(0)]\,O_i\,(m-\Gamma^\mu p_\mu)\,e^{ip(x-y)}}{[(u_0+p_0)^2+\vec{p}^2 - i\varepsilon]\,[m^2-p^2-i\varepsilon]}\,dp.$$

Выполняя интегрирование по p и оставляя только члены, не обращающиеся в нуль в пределе $x=y+0$, получим

$$\tau(0) = -\frac{l^2m^2}{(2\pi)^2}\,\Gamma^0\,[\mathrm{Sp}\,(O_i\,\tau(0)) - O_i\;r(0)]\,O_i\left[\frac{\pi}{8\beta} + \frac{\beta^2-1}{4\beta^2}\left(1+\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\beta^2-1}{2\beta}\arcsin\frac{2\beta}{\beta^2+1}\right)\right] + \frac{l^2m^2}{6\beta\,(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{3}\Gamma^k\,[\mathrm{Sp}\,(O_i\tau(0)) - O_i\tau(0)]\,O_i\,\times$$

$$\times\,\Gamma^k\left[\frac{1}{3} + \frac{\beta^2+1}{8\beta} - \left(\frac{\beta^2-1}{2\beta}\right)^2\left(1+\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\beta^2-1}{2\beta}\arcsin\frac{2\beta}{\beta^2+1}\right)\right], \tag{21}$$

где $u_0 = \mu = m\beta$ — масса мезона, m — масса фермиона и

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\frac{2\beta}{\beta^2+1} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Далее для удобства введем обозначения:

$$P_j(\beta) = -\frac{l_j^2 m^2}{6\beta(2\pi)^2}\left[\frac{\pi}{8\beta} + \frac{\beta^2-1}{4\beta^2}\left(1+\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\beta^2-1}{2\beta}\arcsin\frac{2\beta}{\beta^2+1}\right)\right],$$

$$Q_j(\beta) = \frac{l_j^2 m^2}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{\beta^2+1}{8\beta}\pi + \left(\frac{\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(1+\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\beta^2-1}{2\beta}\arcsin\frac{2\beta}{\beta^2+1}\right)\right], \qquad (22)$$

где индексы $j=1, 2, \ldots$ соответствуют скалярному, векторному и т. д. случаям взаимодействия.

Для решения (22) разложим $\tau(0)$ в виде

$$\tau(0) = \sum_{l=1}^{16} A_l O_l = A_1 I + A_2\Gamma^1 + A_3\Gamma^2 + A_4\Gamma^3 + A_5\Gamma^0 + A_6\Gamma^1\Gamma^2 + A_7\Gamma^1\Gamma^3 +$$

$$+ A_8\Gamma^1\Gamma^0 + A_9\Gamma^2\Gamma^3 + A_{10}\Gamma^2\Gamma^0 + A_{11}\Gamma^3\Gamma^0 + A_{12}\Gamma^5\Gamma^1 + A_{13}\Gamma^5\Gamma^2 +$$

$$+ A_{14}\Gamma^5\Gamma^3 + A_{15}\Gamma^5\Gamma^0 + A_{16}\Gamma^5. \qquad (23)$$

Подставив (23) в (21) и сравнивая коэффициенты при одинаковых неприводимых матрицах, получаем систему 16 однородных уравнений. При этом в случае скалярного взаимодействия ($O_l = 1$) получим

$$\begin{aligned}
&[1-9Q_1(\beta)]A_1 + p_1(\beta)A_5 = 0, && 3p_1(\beta)A_1 - [1-3Q_1(\beta)]A_5 = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_2 - p_1(\beta)A_8 = 0, && p_1(\beta)A_2 - [1+Q_1(\beta)]A_8 = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_3 - p_1(\beta)A_{10} = 0, && p_1(\beta)A_3 - [1+Q_1(\beta)]A_{10} = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_4 - p_1(\beta)A_{11} = 0, && p_1(\beta)A_4 - [1+Q_1(\beta)]A_{11} = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_6 - p_1(\beta)A_{14} = 0, && p_1(\beta)A_6 - [1+Q_1(\beta)]A_{14} = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_7 + p_1(\beta)A_{13} = 0, && p_1(\beta)A_7 + [1+Q_1(\beta)]A_{13} = 0,\\
&[1-Q_1(\beta)]A_9 - p_1(\beta)A_{12} = 0, && p_1(\beta)A_9 - [1+Q_1(\beta)]A_{12} = 0,\\
&[1+3Q_1(\beta)]A_{15} - p_1(\beta)A_{16} = 0, && p_1(\beta)A_{15} - [1-3Q_1(\beta)]A_{16} = 0.
\end{aligned} \qquad (24)$$

Из равенства нулю детерминанта системы (24) получим уравнения для собственных значений. Как видно из (24), имеются всего восемь различных уравнений. Последние можно разделить на 4 группы:

1) соответствует матрицам 1 и Γ^0;

2) Γ^1, $\Gamma^1\Gamma^0$, Γ^2, $\Gamma^2\Gamma^0$, Γ^3, $\Gamma^3\Gamma^0$;

3) $\Gamma^1\Gamma^2$, $\Gamma^5\Gamma^3$, $\Gamma^2\Gamma^3$, $\Gamma^5\Gamma^1$, $\Gamma^3\Gamma^1$, $\Gamma^5\Gamma^2$;

4) $\Gamma^5\Gamma^0$, Γ^5.

В соответствии с этим, для определения собственных значений получаем систему 4 уравнений

1) $[1-9Q_1(\beta)][1-3Q_1(\beta)] + 3p_1^2(\beta) = 0,$

$$
\begin{aligned}
&2)\ Q_1^2(\beta)+p_1^2(\beta)-1=0,\\
&3)\ Q_1^2(\beta)+p_1^2(\beta)-1=0,\\
&4)\ 9Q_1^2(\beta)+p_1^2(\beta)-1=0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Аналогично имеем систему уравнений в случае других вариантов взаимодействия. Однако, так как $P_j(\beta)$, $Q_j(\beta)$ при различных индексах отличаются только постоянными множителями l_j, для упрощения перепишем системы уравнений всех вариантов взаимодействия в зависимости от $Q_1(\beta)$ и $P_1(\beta)$.

Тогда получим.

Случай векторного взаимодействия $(O_j=\Gamma^\mu)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\ [1+3Q(\beta)]\,[1+4{,}5Q_1(\beta)]+13{,}5p_1^2(\beta)=0,\\
&2)\ 1-4{,}5Q_1(\beta)=0,\\
&3)\ 1+3Q_1(\beta)=0,\\
&4)\ [1+4{,}5Q_1(\beta)]\,[1+9Q_1(\beta)]+4{,}5p_1^2(\beta)0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Случай тензорного взаимодействия $(O_j=\Gamma^\mu\Gamma^\nu,\ \mu<\nu)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\ 1-9Q_1(\beta)=0,\\
&2)\ 1+3Q_1(\beta)=0,\\
&3)\ 1-3Q_1(\beta)=0,\\
&4)\ 1+3Q_1(\beta)=0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Случай псевдовекторного взаимодействия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ [1-9Q_1(\beta)]\,[1+4{,}5Q_1(\beta)]-4{,}5p_1^2(\beta)=0,\\
&2)\ 1+1{,}5Q_1(\beta)=0,\\
&3)\ 1+4{,}5Q_1(\beta)=0,\\
&4)\ [1+13{,}5Q_1(\beta)]\,[1-9Q_1(\beta)]-6{,}75p_1^2(\beta)=0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Случай псевдоскалярного взаимодействия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ [1+9Q_1(\beta)]^2+9p_1^2(\beta)=0,\\
&2)\ [1+3Q_1(\beta)]^2+9p_1^2(\beta)=0,\\
&3)\ [1-3Q_1(\beta)]^2+9p_1^2(\beta)=0,\\
&4)\ [1-9Q_1(\beta)]\,[1+27\,Q_1(\beta)]-27\,p_1^2(\beta)=0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

В уравнениях (25—29) 1 и 4 можно сопоставить частицам с изоспином, равным нулю, а 2 и 3 — частицам с изоспином, равным единице [9].

Рассмотрим решение приведенных уравнений и определим возможные собственные значения массы покоя частиц. Ввиду сложности этих уравнений их решения удобнее всего искать графически. Для этого составим таблицу изменения $P_1(\beta)$ и $Q_1(\beta)$ по β (см. табл. 1)

Таблица 1

β	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$P_1(\beta)$	$-\infty$	184,1925	24,3885	7,1282	2,7787	1,1852	0,5142
$Q_1(\beta)$	$+\infty$	−303,6566	−19,2003	−3,7974	−0,8633	−0,2271	0,0035
β	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$P_1(\beta)$	0,1745	−0,0133	−0,1127	−0,1666	−0,1951	−0,2054	−0,2089
$Q_1(\beta)$	0,0684	0,0860	0,0857	0,0782	0,0708	0,0625	0,0552
β	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$P_1(\beta)$	−2,2068	−0,2027	−0,1971	−0,1905	−0,1813	−0,1771	−0,1690
$Q_1(\beta)$	0,0487	0,0430	0,0383	0,0341	0,0305	0,0274	0,024

Таблица 2

Типы уравнений / Q_j	1	2	3	4
1	Нет решения	0,52	0,52	0,53
Γ^{μ}	Нет решения	Нет решения	0,47	Нет решения
$\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}(\mu<\nu)$	Нет решения	0,47	Нет решения	0,47
$\Gamma^5\Gamma^{\mu}$	0,62	0,43	0,51	0,63
Γ^5	Нет решения	Нет решения	Нет решения	0,68

В табл. 1 для $l_1 m$ было использовано соответствующее значение из (19). При помощи табл. 1 уравнений (25)—(29), решенных относительно β, и для масс связанных частиц (мезонов) можно построить табл. 2. Полученные решения оказываются по порядку лежащими в области мезонов или мезонных резононов (резонансов) [10].

Автор выражает благодарность проф. Д. Д. Иваненко, а также Д. Ф. Курдгелаидзе за ряд ценных обсуждений и указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Нелинейная квантовая теория поля», под ред. проф. Д. Д. Иваненко. М., ИЛ, 1959.
2. Tohiyuki Гoyoda. Problems of fundamental physics Kyoto, 1965.
3. Зыонг Ван Фи. «Изв. вузов», физика, **6**, 71, 1964.
4. Nguyen Hoang Phuong. Cahier de physique, 1963.
5. Heisenberg W. Naturforsch, **9a**, 292—303, 1954; Iwanenko Phys. Z. USSR, **13**, 141, 1938; Иваненко Д. Д., Бродский А. М. ЖЭТФ, **24**, 38, 1953.
6. Nambu Y., Jona Lasinio G. Phys. Rev., **122**, 345, 1961; **124**, 246, 1961; Наумов А. И. ЖЭТФ **47**, 914, 1964 и «Изв. вузов», физика, **5**, 37, 1965.
7. Курдгелаидзе Д. Ф. ЖЭТФ, **38**, 462, 1960.
8. Иваненко Д. Д., Курдгелаидзе Д. Ф. ЖЭТФ, **44**, вып. 2, 1963.
9. Heisenberg W., Kortel F., Mitter H. Naturforsch, **10a**, 425—446, 1955.
10. Heisenberg W., Diwr H., Mitter H., Schlieder S. and Jamazaki. Naturforsch, **14a**, 314, 1959.
11. Heisenberg W. Narchs. Akad. Wiss, **8**, 111, 127, 1953.
12. Иваненко Д. Д. «Изв. вузов», физика, **3**, 1, 1965.

Поступила в редакцию
19. 5 1965 г.

Кафедра
теоретической физики