Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1966

УДК 539.12.01

В. А. ОНИЩУК

ОБ ОПИСАНИИ СТАБИЛЬНЫХ И МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Формализм S-матрицы, развитый в теории поля для описания процессов рассеяния, может быть применен для отыскания уровней связанных состояний и их собственных векторов, а также метастабильных состояний и их ширин. Эти утверждения подробно рассмотрены на модели Ли [1]. Формализм допускает обобщение на случай индефинитной метрики [2].

Физическое состояние V-частицы. Случай $m_V > m_N + \mu$

Следуя [2], запишем гамильтониан модели Ли через ренормированную константу связи и операторы

$$H_0 = N^2 m_V \int d\vec{p}\,\psi_V^*(p)\,\psi_V(p) + m_N \int d\vec{p}\,\psi_N^*(p)\,\psi_N(p) + \int \omega(k)\,a^*(k)\,\omega\,dk,$$

$$V = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}\,\frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega(k)}} \int d\vec{p}\,[\psi_V^*(p)\,\psi_N(p-k)\,a(k) +$$

$$+ \psi_N^*(p-k)\,a^*(k)\,\psi_V(p)] - \delta m_V N^2 \int \psi_V^*(p)\,\psi_V(p)\,d\vec{p}, \tag{1}$$

тогда получим перестановочные соотношения, отличные от нуля

$$[a(k),\ a(k')]_- = \delta(\bar{R} - \bar{R}'),$$

$$[\psi_V(p),\ \psi_V^*(p')]_+ = \frac{1}{N^2}\,\delta(\bar{p} - \bar{p}'),\ [\psi_N(\bar{p}),\ \psi_N^*(\bar{p}')]_+ = \delta(\bar{p} - \bar{p}'). \tag{2}$$

Все Гильбертово пространство распадается на прямую сумму взаимноортогональных секторов, в каждом из которых пара величин $q_1 = n_V + n_\theta$ и $q_2 = n_N - n_\theta$ имеет фиксированные значения. Сектор $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ натянут на «голые» состояния

$$|V_p> = \psi_V^*(p)\,\Phi_0>,\ N_{p-k}\theta_k> = \psi^*(p-R)\,a^*(R)\,\Phi_0>.$$

В нем содержатся физическая V-частица $|\widetilde{v}\rangle$ с энергией m_V, состояния рассеяния $|N_{p-k}\theta_k\rangle_\pm$ в системе $N+\theta$, энергии которых расположены в интервале $\mu + m_N < E < +\infty$, и возможные связанные состояния $|\Omega_n(\bar{p})\rangle$ системы $N+\theta$ с энергиями Ω_n, отличные от $|\widetilde{V}_p\rangle$. Постоянная N^2, связанная с перенормировкой заряда, определяется требованием [2]:

$$\langle V_p | \widetilde{V}_{p'} \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \tag{3}$$

Нам понадобятся двухвременные функции Грина [5 и 6]:

$$G_V(t - t') = \langle T(\widetilde{\psi}_V(\bar{p}, t)\, \widetilde{\psi}_V^*(\bar{p}', t')) \rangle_0$$

$$G_{N\theta}(t - t') = \langle T(\widetilde{\psi}_N(\bar{p}, t)\, \widetilde{a}(\bar{R}, t)\, \widetilde{\psi}_N^*(p't')\, \widetilde{a}^*(\bar{R}'t')) \rangle_0. \tag{4}$$

Используя условие полноты

$$1 = \int d\vec{p}\, | \widetilde{V}_p \rangle \langle \widetilde{V}_p | + \sum_n \int d\vec{p}\, | \Omega_n(\bar{p}) \rangle \langle \Omega_n(\bar{p}) | + \int d\vec{p}\, d\bar{k}\, | N_{p-k}\theta_k \rangle_{++} \langle N_{p-k}\theta_k |,$$

получим при $t > t'$:

$$G_V(t - t') = \delta(\bar{p} - \bar{p}') \Big[| \langle V_p | \widetilde{V}_p \rangle' |^2 e^{-im_V(t-t')} +$$

$$+ \sum_n | \langle V_{\bar{p}} | \Omega_n(\bar{p}) \rangle' |^2 e^{-i\Omega_n(t-t')} + \int\limits_{\mu+m_N}^{+\infty} e^{-ix(t-t')} \theta_V(x)\, dx \Big],$$

где

$$Q_V(x) = (x - m_N) \sqrt{(x - m_N)^2 - \mu^2} \int d\Omega_k | \langle V_p | N_{p-k}\theta_k \rangle' + |^2$$

$$\langle v_p | \widetilde{v}_{p'} \rangle = \delta(\bar{p} - \bar{p}') \langle V_p | \widetilde{V}_p \rangle' \text{ и } \langle V_p | N_{p'-R}\theta_k \rangle_+ = \delta(p - p') \langle V_p | V_{p-R}\,\theta_R \rangle_+'.$$

Воспользовавшись тождеством

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iEt}}{E - x + i\alpha}\, dE = \begin{cases} e^{-ixt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

можем представить $G_V(t)$ (уже при всех t) в виде

$$G_V(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt} \overline{G}_V(E + i\alpha)\, \delta(\bar{p} - \bar{p}')\, dE,$$

где

$$G_V(E) = \frac{| \langle V_p | \widetilde{V}_p \rangle' |^2}{E - m_V} + \sum_n \frac{| \langle V_p | \Omega_n(p) \rangle' |^2}{E - \Omega_n} + \int\limits_{\mu+m_N}^{+\infty} dE' \frac{Q_V(E')}{E - E'}. \tag{5}$$

И аналогично:

$$G_{N\theta}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt} \overline{G}_{N\theta}(E + \alpha)\, \delta(\bar{p} - \bar{p}'),$$

$$\overline{G}_{N\theta}(E) = \frac{| \langle N_{p-k}\theta_k | \widetilde{V}_p \rangle' |^2}{E - m_V} + \sum_n \frac{| \langle N_{p-k}\theta_k | \Omega_n(p) \rangle' |^2}{E - \Omega_n} + \sum_{\mu+m_N}^{\infty} dE' \frac{\theta_{N\theta}(E')}{E - E'}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) видно, что $G(E)$ являются аналитическими по энергии за исключением полюсов в связанных состояниях и разрезов, начинающихся от порога рассеяния. Вычеты от $G(E)$ в полюсах дают нам структуру векторов соответствующих связанных состояний в терминах «голых» частиц.

Так как на разрезе $G(E+i\alpha)=2\pi i Q(E)+G(E-i\alpha)$ и $G(E-i\alpha)$ является граничным значением функции, аналитической в нижней полуплоскости, то при аналитическом продолжении функции $G(E)$ с верхнего берега разреза в нижнюю полуплоскость возможные особенности

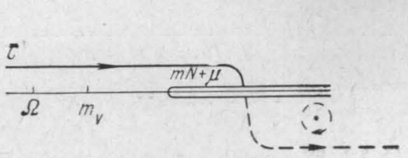

Рис. 1

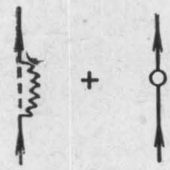

Рис. 2

целиком определяются свойствами аналитического продолжения скачка $Q(E)$ [5]. (При этом мы выходим на второй лист римановой поверхности.)

Предположим, что в точке $J=\varepsilon-i\tau$ $Q(E)$ имеет полюс. Чтобы выделить вклад от него в $G(E)$, мы в (5) и (6) можем деформировать путь интеграции в контур C (рис. 1).

Тогда

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{-iEt}\bar{G}(E)\,\delta(\bar{p}-\bar{p}')\,dE + e^{-i\varepsilon t-\tau t}\operatorname{Res}[\bar{G}(E)]_{E=J}\,\delta(\bar{p}-\bar{p}'). \quad (7)$$

При $\tau t \ll 1$ второй член ведет себя как метастабильное состояние с энергией ε и шириной τ. Для явного вычисления $G(E)$ перейдем в (4) к представлению взаимодействия, совпадающему при $t=0$ с Гейзенберговским.

Тогда

$$G_V(t-t') = \langle T(\psi_V(\bar{n}t)\,\psi_V^*(p't')\,S)\rangle_0, \quad (8)$$

где

$$S = T\exp\left(-i\int V(t)\,dt\right) \text{ и } V(t) = e^{iH_0 t}Ve^{-iH_0 t}.$$

Каждый член ряда теории возмущений (8) можно представить суммой диаграмм Фейнмана. Например, вклад от диаграмм (см. рис. 2) в $\bar{G}(E)$ равен

$$N^2\bar{G}^{(0)}(E)\sum(E)\,\bar{G}^{(0)}(E),$$

где

$$[\bar{G}_V^{(0)}(E)]^{-1} = N^2(E-m_V)$$

и

$$\sum(E) = \frac{g^2}{(2\pi)^3N^2}\int d\bar{k}\,\frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(E-m_N-\omega)} - \delta m_V. \quad (9)$$

Функции $\bar{G}(E)$ можно найти, суммируя ряды теории возмущений:

$$[\bar{G}(E)]^{-1} = N^2\Big(E-m_V-\sum(E)\Big), \quad (10)$$

$$[\bar{G}_{N\theta}(E)] = \frac{g^2 f(\omega)\,f(\omega')}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega\omega'}}(E-m_N-\omega)^{-1}\bar{G}_V(E)(E-m_N-\omega')^{-1}. \quad (11)$$

По условию в точке $E=m_V$ $\bar{G}(E)$ имеют полюса, соответствующие физической V-частице. Это возможно при условии $E(m_V)=0$, откуда [2]

$$\delta m_V = -\frac{g^2}{(2\pi)^3 N^2}\int d\bar{k}\,\frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(m_N+\omega-m_V)}. \tag{12}$$

Приравнивая в соответствии с (3) и (5) вычет $\bar{G}_0(E)$ при $E=m_V$ единице, получим [2]

$$N^2 = 1-\frac{g^2}{g^2_{\text{кр}}};\quad g_{\text{кр}}^{-2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\bar{k}\,\frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(m_N+\omega-m_V)}. \tag{13}$$

Вычет $G_{N\theta}(E)$ при $E=m_V$ дает проекцию $|\widetilde{V}_p\rangle$ на $|N_{p-k}\theta_k\rangle$

$$|\langle N_{p-k}\theta_k|\widetilde{V}_p\rangle'| = \frac{g f(\omega)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}}\,\frac{1}{m_N+\omega-m_V},$$

что вместе с (13) определяет [2] $|\widetilde{V}_p\rangle$.

Используя (12), в $\bar{G}_V(E)$ можно выделить полюс $E=M_V$:

$$[\bar{G}_V(E)]^{-1} = (E-m_V)\,h(E),$$

где

$$h(E) = N^2-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int d\bar{k}\,\frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(E-m_N-\omega)(m_N+\omega-m_V)}. \tag{14}$$

Из определения N^2 следует, что $h(m_V)=1$. Можно доказать [3], что при $-\infty<E<\mu+m_N h_E$ монотонно возрастает от $h(-\infty)=N^2$ до $h(m_N+\mu-0)\geqslant 1$ и что в комплексной плоскости она не имеет нулей. При $N^2>0$ отсюда следует, что $h(E)$ не имеет нулей и на вещественной оси, а при $N^2<0$ существует такое $\Omega\langle m_V$, что $h(\Omega)=0$. $\bar{G}(E)$ в точке $E=\Omega$ имеют полюсы, соответствующие связанному состоянию $|\Omega(p)\rangle$. Вычеты в этих полюсах отрицательны (в противоречии с (5) и (6)):

$$\operatorname{Res}[G_V(E)]_{E=\Omega} = -\left[(m_V-\Omega)\frac{dh}{dE}\right]^{-1}_{E=\Omega}, \tag{15}$$

$$\operatorname{Res}[G_{N\theta}(E)]_{E=\Omega} = \frac{g^2 f(\omega) f(\omega')}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega\omega'}}(m_N+\omega-\Omega)^{-1}\operatorname{Res}[G_N](m_N+\omega'-\Omega^{-1}). \tag{16}$$

Это связано с тем, что при $N^2<0$ коммутационные соотношения $[\psi_V(p)\,\overset{*}{\psi}_V(p')]_+ = N^{-2}\,\delta(\bar{p}-\bar{p}')$ противоречат требованию дефицитности метрики.

Чтобы ввести индефинитную метрику, будем исходить из вектора $\varphi_0)$ со свойствами обычного вакуума по отношению к операторам $\psi_V(\bar{p})$ и построим на нем базис пространства, состоящий из векторов вида $n_V, n_N, n_\theta;\ p, q, x>$, где, например, $|\ 1_V, 0, 0;\ p> = 1N|\,\psi_V^*\ (p)\,\varphi_0>$. Нормировка этого базиса отличается от обычной, приводящей к дефинитной метрике, только множителем $(-1)^{n_V}$ (например, $<1_V;\ \bar{p}\,|\,1_V\bar{p}^{-1}> = -\delta(\bar{p}-\bar{p}^{-1})$. Такое представление определяет операторы ψ и a как эрмитовски сопряженные (относительно новой метрики) и подчиняющиеся перестановочным соотношениям (2) при $N^2<0$. Оператор H эрмитовский. Его собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, однако нормы их индефинитны. Поэтому при выводе спектральных представлений (5) и (6) мы должны в условии полноты учесть индефинитность метрики.

Тогда имеем, например, для $\overline{G}_V(E)$:

$$\overline{G}_V(E) = \eta_V \frac{|\langle V_p | \widetilde{V}_p\rangle'|^2}{E - m_V} + \eta\Omega \frac{|\langle V_p | \Omega(p)\rangle'\rangle|^2}{E-\Omega} + \eta_{N\theta} \int\limits_{\mu+m_N}^{+\infty} d\bar{k}^{-1} \frac{Q_V(E)}{E-E'}. \quad (17)$$

Здесь η_V, η_Ω и $\eta_{N\theta}$ дают знаки норм соответствующих состояний. При вычислении $\overline{G}(E)$ мы использовали только свойства вакуума и перестановочных соотношений. Поэтому результаты не зависят от метрики. Теперь в соответствии с (17) отрицательный знак вычетов (15) и (16) показывает, что $\eta_\Omega = -1$.

Структура состояния $|\Omega(p)>$ определяется выражением (15) и (16).

Нестабильная λ-частица, случай $m_V > m_N + \mu$

Перейдем в гамильтониане (1) к перенормированным операторам и к константе связи. Это достигается формальной заменой $N^2 \to 1$. Рассмотрим возможные резонансы в рассеянии θ на N. Амплитуда рассеяния связана с $G_{N\theta}(E)$ соотношением

$$T_{N\theta}(\omega) = \lim_{E \to m_N + \omega + i\varepsilon} [(E - m_N - \omega)(E - m_N - \omega') G_{N\theta}(E)|_{\omega=\omega'}]. \quad (18)$$

Используя (11), получим

$$T_{N\theta}(\omega) = \frac{f^2(\omega)}{2(2\pi)^3\omega} \frac{1}{h_1(\omega + i\varepsilon)}, \quad (19)$$

где

$$h_1(\omega) = \omega - (m_V - m_N) - \frac{g_0^2}{4\pi^2} \int\limits_{\mu}^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x^2-\mu^2}\, f^2(x)}{\omega - x} + \delta m_V. \quad (20)$$

Можно показать, что $h_1(\omega)$ аналитическая по ω функция с разрезом в интервале $\mu < \omega < +\infty$ и что она нигде не обратится в нуль. Однако при аналитическом продолжении с верхнего берега разреза в нижнюю полуплоскость второго римановского листа $h_1(\omega)$ может иметь нули. Пусть $h_1(\zeta) = 0$. Тогда вещественная часть ζ определяет массу V-частицы, а мнимая — ширину ее:

$$Re\,\zeta + m_N = m_N. \quad (21)$$

$$-Im\,\zeta = \Gamma. \quad (22)$$

Из условия (21) определяется (при фиксированной m_V) δm_V. Если $g_0^2 \ll 1$, то можно доказать существование корня и вычислить его.

Будем искать ζ и δm_V в виде рядов, получаемых методом итераций из уравнения $h_1(\omega + {}_1\xi) = 0$:

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)} + \dots \qquad \delta m_V = \delta m_V^{(0)} + \delta m_V^{(1)} + \dots$$

Из физических соображений очевидно, что нулевые приближения равны

$$\zeta^{(0)} = m_V - m_N; \; \delta m_V^{(0)} = 0. \quad (23)$$

Тогда, в силу (21), для всех $i = 1, 2, \dots$ $Re\,\zeta^{(i)} = 0$. Подставляя нулевое приближение, получим для первого

$$\zeta^{(1)} = \frac{g_0^2}{4\pi^2} \int\limits_{\mu}^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x_2 - \mu^2} f^2(x)}{m_V - m_N - x + {}_1\varepsilon} + \delta m_V^{(1)} = 0.$$

Отсюда

$$\zeta^{(1)} = -\frac{ig_0^2}{4\pi}\sqrt{(m_V - m_N)^2 - \mu^2} f\ (m_V - m_N), \tag{24}$$

$$\delta m_V^{(1)} = \frac{g_0^2}{4\pi}\int\limits_{\mu}^{+\infty} dxp\,\frac{\sqrt{x^2-\mu^2} f^2(x)}{m_V - m_N - x}. \tag{25}$$

Можно проверить, что $-ImI^{(1)}$ совпадает с шириной метастабильной V-частицы (по отношению и распаду на $\theta+N$), вычисленной в борновском приближении, а $\delta m_V^{(1)}$ получается во втором порядке теории возмущений как поправка к голой массе.

Разлагая $h(\omega+i\varepsilon)$ вблизи полюса в ряд Тейлора и ограничиваясь первым членом, получим для вероятности перехода вблизи энергии метастабильного состояния:

$$p(\omega) = 2\pi\,|T_{N\theta}(\omega)|^2\,\rho(\omega) = \frac{f^4(\omega)}{4(2\pi)^5\omega^2}\,\frac{1}{(\omega + m_N - m_V)^2 + \Gamma^2}. \tag{26}$$

Это значит, что при $\omega = m_V - m_N$ сечение рассеяния проходит через максимум, который тем выше, чем меньше ширина τ метастабильного состояния. Аномально большое сечение в районе энергий метастабильного состояния объясняется резонансным характером поглощения и испускания в квантовых системах [4].

В заключение выражаю признательность В. И. Григорьеву за постоянное внимание и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L e e T. D. Phys. Rev., **95**, 1329, 1945.
2. K a l l e n, K g l, Dansk. Vid. Sclskab., **30**, No. 7, 1955.
3. Ш в е б е р. Введение в релятивистскую теорию поля.
4. Д и р а к. Принципы квантовой механики.
5. Г а л и ц к и й, М и г д а л. ЖЭТФ, **34**, 139, 1958.
6. З у б а р е в. «Успехи физич. наук», **71**, 71, 1960.

Поступила в редакцию
24. 5 1965 г.

НИИЯФ