Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1966

УДК 530.145 : 532.5

В. А. КРАСНИКОВ

К УРАВНЕНИЯМ КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

На основе квантовой статистики получены уравнения гидродинамики с учетом диссипационных процессов вязкости, диффузии и теплопроводности. Данный вывод не предполагает использование кинетического уравнения.

В настоящее время получение уравнений гидродинамики из кинетических уравнений того или иного типа представляется достаточно хорошо известным (см., например, [1—3]). Однако кинетическое уравнение — уравнение, содержащее только одночастичную функцию распределения или одночастичную матрицу плотности — по самой своей сути является приближенным, так как оно не учитывает всех корреляций, которые имеют место в системе взаимодействующих частиц. Поэтому кажется целесообразным выйти за рамки кинетического уравнения и получить уравнения гидродинамики из цепочки уравнений Боголюбова для функций распределения или соответствующей системы зацепляющихся уравнений для s-частичных статистических операторов.

Заметим, что для однокомпонентных систем этот вопрос в той или иной постановке исследовался в работах [4—8] и помимо методической стороны (микроскопическое обоснование уравнений гидродинамики) представляет интерес в связи с задачей асимптотического вычисления функций Грина при помощи варьирования основных гидродинамических величин по внешним «источникам» и последующего применения теоремы о вариации среднего [7—9]. В данной статье ставится цель улучшить асимптотическую точность работы [11], т. е. в рамках квантовой статистики получить уравнения гидродинамики многокомпонентных нормальных (не сверхтекучих) систем с учетом вязкости, диффузии и теплопроводности. Для этого надо принять во внимание отброшенные в [10] члены порядка μ (параметр неоднородности). Подчеркнем, что исследуемая система может состоять из совершенно различных фермионов и бозонов.

Возможность единого рассмотрения объясняется тем, что в гамильтониан системы всегда входит четное количество фермиевских полевых операторов и поэтому все знаки в уравнениях движения для них такие же, как и для бозевских операторов. Единственное различие состоит в суммировании по спинам. Поскольку потенциал парного взаимодействия считается здесь не зависящим от спинов, это суммирование тривиально и спиновый индекс можно включить в индекс сорта частиц.

Кроме того, в большинстве случаев будем распространять тензорное суммирование по повторяющимся индексам координат на индексы компонент системы. В конечном счете оставшиеся индексы всегда указывают, было или нет проведено такое суммирование. Например,

$$n_i = \langle \psi_i^+ \psi_i \rangle, \text{ но } n = \langle \psi_i^+ \psi_i \rangle = \sum_i n_i.$$

Тогда уравнения, описывающие изменение во времени основных гидродинамических величин — плотности части $n_i(\tau, \zeta)$, плотности потока $\vec{j}(\tau, \xi)$ и плотности энергии $n\varepsilon(\tau, \zeta)$ при отбрасывании членов порядка μ^2 и выше, приобретают вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} + \frac{\partial j_i^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots M), \tag{1}$$

$$\frac{\partial j^\alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial U_i}{\partial \xi^\alpha} n_i \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{2}$$

$$\frac{\partial (n\varepsilon)}{\partial \tau} = \mu \frac{i}{8m_i^2} \Delta_\xi \langle \Delta\psi_i^+ \psi_i - \psi_i^+ \Delta\psi_i \rangle + \frac{\partial S_\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \frac{1}{m_i} j_i^\beta \frac{\partial U_i}{\partial \xi^\beta}. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$j_i^\alpha(\tau, \xi) = \frac{i}{2} \left\langle \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\alpha} \psi_i - \psi_i^+ \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} \right\rangle, \quad j^\alpha = \sum_i j_i^\alpha,$$

$$n\varepsilon(\tau, \xi) = -\frac{1}{4m_i} \langle \Delta\psi_i^+ \psi_i + \psi_i^+ \Delta\psi_i \rangle + \frac{1}{2} \int \Phi_{ij}(|R|) D_{ij}(\tau, \zeta, R)\, d\vec{R},$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = -\frac{1}{2m_i} \left\langle \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\beta} + \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\beta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\alpha} R^\beta D_{ji}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R},$$

$$S_\alpha(\tau, \xi) = -\frac{i}{4m_i^2} \left\langle \Delta\psi_i^+ \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\alpha} \Delta\psi_i \right\rangle + \frac{1}{2} \int \frac{1}{m_i} \Phi_{ij} G_{ij}^\alpha(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{1}{m_j} \int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\beta} R^\alpha G_{ji}^\beta(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} + \frac{\mu}{2m_j} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\beta} R^\alpha R^\gamma G_{ji}^\beta(\tau, \xi, R)\, d\vec{R},$$

где

$$D_{ij}(\tau, \xi, R) = \langle \psi_i^+(t, r)\, \psi_j^+(t, r')\, \psi_j(t, r')\, \psi_l(t, r) \rangle,$$

$$G_{ij}^\alpha(\tau, \xi, R) = \frac{i}{4} \left\langle \psi_i^+(t, r)\, \psi_j^+(t, r')\, \psi_j(t, r') \frac{\partial \psi_i(t, r)}{\partial r^\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \psi_i^+(t, r)}{\partial r^\alpha} \psi_j^+(t, r')\, \psi_j(t, r')\, \psi_l(t, r) \right\rangle,$$

$$\tau = \mu t, \quad \vec{\xi} = \mu \vec{r}, \quad \vec{R} = \vec{r}\,' - \vec{r},$$

а скобки $< \ldots >$ означают усреднение с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором. Поясним смысл последнего утверждения. Поскольку мы пользуемся гейзенберговским представлением для полевых операторов $\psi_i(t, r)$ и $\psi_i^+(t, r)$, то статистический оператор, с которым производится усреднение, зависит от состояния системы только в начальный момент времени $t=t_0$, когда приготовляется ансамбль. Как правило, считается, что при $t=t_0$ система находится в равновесном состоянии и представляется соответственно равновесным статистическим оператором, а затем выводится из равновесия, например, включением внешних полей $U_i(t, r)$.

В состоянии статистического равновесия при $U_i=0$ система полностью характеризуется плотностями частиц n_i, массовой скоростью $\vec{V}$ и температурой θ, которые определяются соотношениями

$$n_i = \langle \psi_i^+(t, r)\, \psi_i(t, r)\rangle_{\ldots n_l, \ldots, \theta, V} = \langle \psi_i^+ \psi_i \rangle_{\sim}, \tag{4}$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{j}_i}{\rho_i} = \frac{\vec{j}}{\rho}, \tag{5}$$

$$n\varepsilon(\ldots n_l \ldots, \theta, V) = n\widetilde{\varepsilon}(\ldots n_l \ldots, \theta) + \frac{\rho V^2}{2}, \tag{6}$$

где $\rho = \sum_i m_i n_i$ (m_i — масса частицы i-го сорта), $\widetilde{\varepsilon}(\ldots n_l \ldots, \theta)$ является средней внутренней энергией на одну частицу, а отмеченные здесь и в дальнейшем волнистой чертой средние берутся в системе координат с $\vec{V}=0$. Все введенные средние в состоянии равновесия не зависят от постоянных U_i, так как эту зависимость можно было бы исключить градиентным преобразованием $\psi_i \to e^{iU_i t}\psi_i$. Как известно, выбор параметров состояния неоднозначен и вместо, например, n_i иногда удобнее пользоваться химическими потенциалами λ_i.

Подчеркнем, что, рассматривая неравновесные процессы, мы ограничиваемся случаем, когда в каждой точке $(t, \vec{r})$ имеет место слабое отклонение от локального равновесия, причем тем меньшее, чем меньше градиенты $n_i(t, r)$, $U_i(t, r)$, $\theta(t, r)$ и $\vec{V}(t, r)$, где n_i, θ и $\vec{V}$ по-прежнему определяются из (4—6). После этих замечаний перейдем в (1—3) при помощи градиентного преобразования операторных функций $\psi_i \to e^{im_i \vec{V}\vec{r}}\, \psi_i$ к системе координат с $\vec{V}=0$:

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} + \frac{\partial (n_i V^\alpha)}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial \widetilde{j}_i^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, M), \tag{7}$$

$$\rho\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \tau} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial \xi^\beta}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial U_l}{\partial \xi^\alpha} n_l, \tag{8}$$

$$\frac{\partial (n\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\mu}{4m_i}\Delta_\xi \left\{ V^\beta \left\langle \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\beta}\psi_i + \psi_i^+ \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\beta} \right\rangle_{\sim} \right\} + \frac{\partial \widetilde{S}_\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \frac{1}{m_i}\widetilde{j}_i^\beta \frac{\partial U_i}{\partial \xi^\beta}, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{S}_\alpha(\tau, \xi) = -V^\alpha\left(n\widetilde{\varepsilon} + \frac{\rho V^2}{2}\right) + V^\beta \widetilde{T}_{\alpha\beta} - \frac{i}{4m_i^2}\left\langle \Delta\psi_i^+ \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial \psi_i^+}{\partial r^\alpha}\Delta\psi_i \right\rangle_{\sim} +$$

$$+ \frac{1}{m_i}\int \Phi_{ij}\widetilde{G}_{ij}^\alpha(\tau, \xi, R)\, d\widetilde{R} - \frac{1}{m_j}\int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\beta} R^\alpha \widetilde{G}_{ji}^\beta(\tau, \xi, R)\, d\widetilde{R} +$$

$$+ \frac{\mu}{2m_j}\frac{\partial}{\partial \xi^\gamma}\int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\beta} R^\alpha R^\gamma \widetilde{G}_{ji}^\beta(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{\mu}{4}\frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\gamma}\int \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial R^\beta} R^\alpha R^\gamma D_{ji}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R};$$

$$D_{ij} \to \widetilde{D}_{ij},\ \sigma_{ij}^{\alpha} \to \widetilde{\sigma}_{ij}^{\alpha} - \frac{m_i V^{\alpha}}{2}\widetilde{D}_{ij}.$$

Выписанные разложения по μ не являются полными, так как не проведено разложение входящих в эти соотношения средних. Если проделать это, не раскладывая, конечно, сами параметры состояния, то в пренебрежении членами порядка μ^2 и выше получим

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = {}^{(0)}\widetilde{T}_{\alpha\beta} + \mu^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta},\ \widetilde{S}_{\alpha}(\tau, \xi) = {}^{(0)}\widetilde{S}_{\alpha} + \mu^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha},$$

где

$${}^{(0)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = -\delta_{\alpha\beta}\widetilde{P}(\ldots n_l \ldots, \theta),$$

$${}^{(0)}\widetilde{S}_{\alpha}(\tau, \xi) = -V^{\alpha}\left\{n\widetilde{\varepsilon}(\ldots n_l \ldots, \theta) + \frac{\rho V^2}{2} + \widetilde{P}(\ldots n_l \ldots, \theta)\right\},$$

$${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha}(\tau, \xi) = -\frac{1}{2m_i}\left\langle \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^{\alpha}}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^{\beta}} + \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^{\beta}}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^{\alpha}} \right\rangle + $$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta\,(1)}\widetilde{D}_{ji}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R},$$

$${}^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha}(\tau, \xi) = V^{\beta\,(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta} - {}^{(1)}\widetilde{X}_{\alpha},$$

$${}^{(1)}X_{\alpha}(\tau, \xi) = \frac{i}{4m_i^2}\left\langle \Delta\psi_i^+ \frac{\partial\psi_i}{\partial r^{\alpha}} + \frac{\partial\psi_i^+}{\partial r^{\alpha}}\Delta\psi_i \right\rangle_{\sim}^{(1)} -$$

$$-\frac{1}{m_i}\int \Phi_{ij}\,{}^{(1)}\widetilde{G}_{ij}^{\alpha}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R} + \frac{1}{m_j}\int \frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial R^{\beta}} R^{\alpha\,(1)}\widetilde{G}_{ji}^{\beta}(\tau, \xi, R)\, d\vec{R}.$$

При этом было использовано то обстоятельство, что вследствие изотропии системы некоторые члены обращаются в нуль в силу инвариантности при замене $\vec{r} \to -\vec{r}$. Напомним также, что в соответствии с гипотезой о слабом отклонении от локального равновесия средние типа $\langle \ldots \rangle^{(1)}$, к которым принадлежат ${}^{(1)}\widetilde{D}_{ij}$ и ${}^{(1)}G_{ij}^{\alpha}$, должны представлять линейные формы по градиентам n_i, $\vec{V}$, θ, U_i. Например

$${}^{(1)}\widetilde{D}_{ij}(\tau, \xi) = {}^{1}d_{ijk}^{\gamma}(R \mid \ldots n_l \ldots, \theta)\frac{\partial n_k}{\partial \xi^{\gamma}} + {}^{2}d_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} + {}^{3}d_{ij}^{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^{\alpha}} + {}^{4}d_{ijk}^{\alpha}\frac{dU_k}{\partial\xi^{\alpha}},$$

$${}^{(1)}\widetilde{G}_{ij}^{\alpha}(\tau, \xi, R) = {}^{1}g_{ijk}^{\alpha\beta}(R \mid \ldots n_l \ldots, \theta)\frac{\partial n_k}{\partial\xi^{\beta}} + {}^{2}g_{ij}^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial\xi^{\gamma}} + {}^{3}g_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^{\beta}} +$$

$$+ {}^{4}g_{ijk}^{\alpha\beta}\frac{\partial U_k}{\partial\xi^{\beta}}.$$

Входящие сюда тензорные коэффициенты зависят только от одной векторной величины $\vec{R}$, и в силу изотропии пространства компоненты произвольных тензоров должны иметь вид

$$L^{\alpha}(R) = R^{\alpha}L_1(|R|),$$

$$M^{\alpha\beta}(R) = R^{\alpha}R^{\beta}M_1(|R|) + \delta_{\alpha\beta}M_2(|R|),$$

$$N^{\alpha\beta\gamma}(R) = R^{\alpha}R^{\beta}R^{\gamma}N_1(|R|) + R^{\alpha}\delta_{\beta\gamma}N_2(|R|) + R^{\beta}\delta_{\alpha\gamma}N_3(|R|) +$$

$$+ R^{\gamma}\delta_{\alpha\beta}N_4(|R|).$$

Пользуясь соотношениями этого типа, нетрудно показать, что ${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, ${}^{(1)}\widetilde{X}_\alpha$ и ${}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha$ должны иметь форму

$$
\begin{gathered}
{}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = \eta\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^\gamma}{\partial \xi^\gamma}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^\gamma}{\partial \xi^\gamma}, \\
{}^{(1)}\widetilde{X}_\alpha(\tau, \xi) = {}^1b_i\frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi^\alpha} + {}^2b\frac{\partial \theta}{\partial \xi^\alpha} + {}^3b_i\frac{\partial U_i}{\partial \xi^\alpha}, \qquad (10) \\
{}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha(\tau, \xi) = {}^1c_{ij}\frac{\partial \lambda_j}{\partial \xi^\alpha} + {}^2c\frac{\partial \theta}{\partial \xi^\alpha} + {}^3c_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial \xi^\alpha},
\end{gathered}
$$

где для удобства последующих рассуждений и получения уравнений гидродинамики в общепринятой форме введены в соответствии с (4) химические потенциалы λ_i. Мы не выписываем выражений для кинетических коэффициентов вследствие громоздкости этих соотношений, в которые входят величины, могущие быть вычислены только в специфических случаях, например, при слабом межчастичном взаимодействии. Формулы (10) представляют известные соотношения Онсагера, удовлетворяющие принципу симметрии Кюри (см., например, [11]).

Уравнение (9) с помощью (7), (8) и термодинамического тождества

$$d\widetilde{\varepsilon} = \theta\,ds + \frac{\widetilde{P}}{n^2}dn + \lambda_i\,dC_i, \quad \left(C_i = \frac{n_i}{n}\right).$$

можно переписать так:

$$n\frac{ds}{d\tau} = -\frac{\partial I_s^\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \frac{I_s^\alpha}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{{}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha}{m_i\theta}\frac{\partial(\lambda_i + U_i)}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\alpha}{}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}, \qquad (11)$$

где поток энтропии

$$I_s^\alpha(\tau, \zeta) = \frac{1}{\theta}\left({}^{(1)}\widetilde{X}_\alpha - \frac{\lambda_i}{m_i}{}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha\right).$$

Для получения некоторых связей между кинетическими коэффициентами удобно рассмотреть состояние статистического равновесия при $U_i \neq 0$:

$$U_i = U_i(\xi), \ \theta = \mathrm{const}, \ \vec{V} = 0.$$

Тогда должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^{M}\left({}^1b_i\frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi^\alpha} + {}^3b_i\frac{\partial U_i}{\partial \xi^\alpha}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{M}\left({}^1c_{ij}\frac{\partial \lambda_j}{\partial \xi^\alpha} + {}^3c_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial \xi^\alpha}\right) = 0,$$

и если воспользоваться условиями термодинамического равновесия $\lambda_i + U_i = \mathrm{const}$, то нетрудно показать, что ${}^1b_i = {}^3b_i$, ${}^1c_{ij} = {}^3c_{ij}$.

Кроме того, не все диффузионные потоки являются независимыми, так как из (5) следует $\sum_{i=1}^{M}{}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha = 0$, и поэтому так же, как в [11], можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{M}{}^1b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{M}{}^1c_{ij} = \sum_{j=1}^{M}{}^1c_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^{2}{}^2c_i = 0.$$

В результате (7), (8) и (11) можно записать в переменных n_i и t следующим образом:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i V^\alpha)}{\partial r^\alpha} = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha}{\partial r^\alpha}, \quad (i = 1, 2, \ldots, M). \tag{12}$$

$$\rho\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial r^\beta}\right) = -\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial r^\beta} - \frac{\partial U_i}{\partial r^\alpha} n_i, \tag{13}$$

$$n\left(\frac{\partial s}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial s}{\partial r^\beta}\right) = -\frac{\partial I_s^\alpha}{\partial r^\alpha} - \frac{I_s^\alpha}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha} + \frac{{}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha}{m_i \theta}\frac{\partial \overline{\lambda}_i}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial V^\beta}{\partial r^\alpha}\,{}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}, \tag{14}$$

где

$${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = \eta\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial r^\beta} + \frac{\partial V^\beta}{\partial r^\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^\gamma}{\partial r^\gamma}\right) + \zeta \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^\gamma}{\partial r^\gamma}, \tag{15}$$

$${}^{(1)}\widetilde{X}_\alpha(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^{M-1} {}^1 b_i \frac{\partial(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_M)}{\partial r^\alpha} + {}^2 b \frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha},$$

$${}^{(1)}\widetilde{j}_i^\alpha(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^{M-1} {}^1 c_{ij} \frac{\partial(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_M)}{\partial r^\alpha} + {}^2 c_i \frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha},$$

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_i + U_i, \quad \widetilde{P} = \widetilde{P}(\ldots n_l \ldots, \theta), \quad \widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\ldots n_l \ldots, \theta).$$

Уравнения (12—15) представляют полную систему гидродинамических уравнений с учетом вязкости, диффузии и теплопроводности.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.
2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М. — Л., Гостехиздат, 1946.
3. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. М., «МИР», 1965.
4. Боголюбов Н. Н. Зб. праць. ін-ту мат., № 10, 41, 1948.
5. Irving, Kirkwood. J. Chem. Phys., **18**, 817, 1950.
6. Гуров К. П. ЖЭТФ, **18**, 110, 1948; ЖЭТФ, **20**, 279, 1950.
7. Боголюбов Н. Н. Препринт ОИЯИ, Р-1395, Дубна, 1963.
8. Галясевич З. Препринт ОИЯИ, Р-1517. Дубна, 1964.
9. Красников В. А. ДАН СССР, **170**, № 4, 1966.
10. Красников В. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, **87**, 1966.
11. Де-Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «МИР», 1964.

Поступила в редакцию
15. 6 1965 г.

Кафедра
теоретической физики