ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1966

УДК 539.12.01

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Г. Н. ШИКИН

НЕКОТОРЫЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Рассматриваются нелинейные уравнения скалярного поля с нелинейным членом по производной от функции и смешанным нелинейным членом по функции и производной. Показано, что такие уравнения имеют частицеподобные решения. Для некоторых решений получено предельное значение для постоянной при нелинейном члене.

Плотность лагранжиана нелинейного скалярного поля имеет вид $L=L_0+L_I$, где L_I дает нелинейные члены в уравнении поля. Рассматриваются уравнения с L_I вида

$$L_{\mathrm{I}} = \frac{\lambda}{2}\left(g_{\mu_\gamma}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x\nu}\right)^2. \tag{I}$$

$$L_{\mathrm{I}} = \lambda(\varphi^*\varphi)\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x\nu}\right). \tag{II}$$

Запишем уравнение с L_{I} вида I:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} - m^2\varphi + \lambda\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(\frac{\partial^*\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\right)\right\} = 0. \tag{1}$$

Решение (1) ищем в виде

$$\varphi = u(\eta)\,e^{i\omega t}, \tag{2}$$

где $\eta = r^2$. Для $u(\eta)$ получаем уравнение

$$4\eta u'' + 6u' + (\omega^2 - m^2)\,u + \lambda\left\{(4\eta u'' + 6u' + \omega^2 u)(4\eta(u')^2 - \omega^2 u^2) + \right.$$
$$\left. + 2\eta(u')^2(u'' - \omega^2 u)\right\} = 0. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (3) не получено. Можно получить асимптотические решения при $\eta \ll 1$ и $\eta \to \infty$. При $\eta \to \infty$ переходим к функциям $\Phi(r) = u(\eta)$. Для решений, монотонно убывающих на бесконечности, можно пренебречь нелинейными членами в уравнении. Тогда для $\Phi(r)$ получаем уравнение

$$\Phi'' + \frac{2}{r}\Phi' - (m^2 - \omega^2)\,\Phi = 0. \tag{4}$$

Из (4) видно, что искомое монотонно убывающее решение существует только при $m^2 > \omega^2$:

$$\Phi(r) = \frac{e^{-\sqrt{m^2-\omega^2}\cdot r}}{r}.$$

При $m^2 \leqslant \omega^2 \int\limits_0^\infty \varphi^*\varphi r^2\,dr = \infty$. При $\eta \ll 1$ можно пренебречь членами, содержащими $\eta = r^2$, если $u'(\eta)$ и $u''(\eta)$ конечны в области $\eta \geqslant 0$, $\eta \ll 1$.

При этом уравнение (3) переходит в уравнение

$$6u' - (m^2 - \omega^2)\,u - \lambda\left\{(6u' + \omega^2 u)\,\omega^2 u^2\right\} = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{m^2 - \omega^2}{6}, \quad \alpha = \lambda\omega^2, \quad \beta = \frac{\lambda\omega^4}{m^2 - \omega^2}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = n.$$

В этих обозначениях решение уравнения (5) имеет вид

$$\ln u - \frac{(n+1)}{2}\ln(1 + \beta u^2) = \omega_0^2\eta + c. \tag{6}$$

Так как на $u(\eta)$ при $\eta=0$ наложено только условие ограниченности, то начальные условия можно выбрать так, чтобы c обратилось в нуль. Поскольку $m^2 > \omega^2$, то n меняется в интервале $(0, \infty)$. В общем случае произвольного n явно выразить функцию $u(\eta)$ из (6) не удается. Можно лишь качественно описать поведение $u(\eta)$ вблизи нуля. В зависимости от знака $u'(\eta)$ при $\eta=0$ получаем возрастающую или убывающую функцию вблизи начала координат. Выразим $u'(0)$ через $u(0)$

$$u'(0) = \frac{u_0\omega_0^2}{1 - \beta(n+1)\,u_0^{\frac{2n}{n+1}}}, \tag{7}$$

где $u_0 = u(0)$.

Из (7) видно, что $u'(0)$ может быть величиной положительной, отрицательной и обращаться в бесконечность в зависимости от соотношения между u_0, λm^2 и n. Если $u_0 = \left(\frac{n}{\lambda m^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$, $u'(0) \to \infty$; если $u_0 < \left(\frac{n}{\lambda m^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$, то $u'(0) < 0$ и $u(\eta)$ убывает. Если $u_0 > \left(\frac{n}{\lambda m^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$, то $u'(0) > 0$ и $u(\eta)$ возрастает; $u''(\eta)$ при $\eta = 0$ также стремится к бесконечности, если $u_0 = \left(\frac{n}{\lambda m^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}$, и становится ограниченной в случае неравенства. Отсюда следует, что уравнение (1) имеет сферически симметричные стационарные решения, конечные в начале координат и монотонно убывающие на бесконечности — частицеподобные решения.

Для примера рассмотрим случай, когда $n = 1$ и $u(\eta)$ имеет явное выражение

$$u(\eta) = \frac{e^{-\omega_0^2\eta}}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{e^{-2\omega_0^2\eta}}{4\beta^2} - \frac{1}{\beta}}. \tag{8}$$

Из (8) видно, что $\frac{1}{4\beta^2} > \frac{1}{\beta}$ или $\lambda m^2 < \frac{1}{2}$. В этом случае имеем убывающее решение, если перед радикалом знак плюс, и возрастающее, если перед радикалом знак минус. При $r \to \infty$ $\Phi(r) = \frac{e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}r}}{r}$. Рассмотрим уравнение с L_{I} вида II. Оно запишется

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} - m^2\varphi + \lambda\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}(\varphi^*\varphi) + \varphi^*\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right\} = 0. \tag{9}$$

Как и в предыдущем случае, решение ищем в виде (2).
При

$$r \to \infty \quad \Phi(r) = cr^{-\sqrt{m^2-\omega^2}\,r}, \quad m^2 > \omega^2.$$

При $\eta \ll 1$ уравнение (9) переходит в уравнение

$$6u' - (m^2 - \omega^2)\,u + \lambda\left\{(6u' + \omega^2 u)\,u^2 + \omega^2 u^3\right\} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$ue^{-\omega_0^2\eta} = (1 - \beta u^2)^{\frac{n+1}{2}}, \tag{10}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{m^2 - \omega^2}{6}, \quad \beta = \frac{2\lambda\omega^2}{m^2 - \omega^2}, \quad \frac{\lambda}{\beta} = n.$$

В этом случае n меняется в интервале $(0, \infty)$. Поскольку

$$u'(0) = \frac{u_0\omega_0^2}{1 + \beta(n+1)\, u_0^{\frac{2n}{n+1}}},$$

то всегда $u'(0) > 0$, так как $\beta(n+1)\, u_0^{\frac{2n}{n+1}} \geqslant 0 \; (u_0 \geqslant 0)$. Решение вблизи начала координат возрастает. Рассмотрим пример при $n = 1$. Из (10) получаем

$$u(\eta) = \frac{2}{e^{-\omega_0^2\eta} + \sqrt{e^{-2\omega_0^2\eta} + 4\beta}}.$$

Отсюда следует, что уравнение (9) имеет частицеподобные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
2. Мицкевич Н. В. ЖЭТФ, **29**, 354, 1955.

Поступила в редакцию
16 октября 1965 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 530.145

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Случай поверхности второго порядка. Поскольку реальное пространство не плоско, то построение теории поля в искривленном пространстве представляет собой важную задачу. Обычно ее решение сводится к написанию уравнения поля в искривленном пространстве с учетом ковариантного дифференцирования. Однако в этом направлении не удается добиться особых успехов. В последнее время были попытки для решения поставленной задачи воспользоваться «теорией вложения». Согласно последней, риманово пространство можно вложить в плоское пространство более высокого измерения. Например, пространство постоянной кривизны (пространство де Ситтера) можно вложить в 5-мерное пространство. В случае положительной кривизны, например, имеем [1]

$$z_1 = R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{R}\right),$$

$$z_5 = R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{R}\right), \quad z_2 = x, \; z_3 = y, \; z_4 = z; \tag{1}$$

$$ds^2 = dz_\mu\, dz^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$z_\mu = g_{\mu\nu} z^\nu, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1, \quad g_{55} = -1, \quad g_{\mu\neq\nu} = 0. \tag{2}$$