Его решение имеет вид

$$ue^{-\omega_0^2\eta} = (1-\beta u^2)^{\frac{n+1}{2}}, \tag{10}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{m^2-\omega^2}{6},\quad \beta = \frac{2\lambda\omega^2}{m^2-\omega^2},\quad \frac{\lambda}{\beta} = n.$$

В этом случае n меняется в интервале $(0, \infty)$. Поскольку

$$u'(0) = \frac{u_0\omega_0^2}{1+\beta(n+1)\,u_0^{\frac{2n}{n+1}}},$$

то всегда $u'(0) > 0$, так как $\beta(n+1)\,u_0^{\frac{2n}{n+1}} \geqslant 0$ $(u_0 \geqslant 0)$. Решение вблизи начала координат возрастает. Рассмотрим пример при $n=1$. Из (10) получаем

$$u(\eta) = \frac{2}{e^{-\omega_0^2\eta} + \sqrt{e^{-2\omega_0^2\eta} + 4\beta}}.$$

Отсюда следует, что уравнение (9) имеет частицеподобные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
2. Мицкевич Н. В. ЖЭТФ, **29**, 354, 1955.

Поступила в редакцию
16 октября 1965 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 530.145

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Случай поверхности второго порядка. Поскольку реальное пространство не плоско, то построение теории поля в искривленном пространстве представляет собой важную задачу. Обычно ее решение сводится к написанию уравнения поля в искривленном пространстве с учетом ковариантного дифференцирования. Однако в этом направлении не удается добиться особых успехов. В последнее время были попытки для решения поставленной задачи воспользоваться «теорией вложения». Согласно последней, риманово пространство можно вложить в плоское пространство более высокого измерения. Например, пространство постоянной кривизны (пространство де Ситтера) можно вложить в 5-мерное пространство. В случае положительной кривизны, например, имеем [1]

$$z_1 = R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{R}\right),$$

$$z_5 = R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{R}\right),\quad z_2 = x,\; z_3 = y,\; z_4 = z; \tag{1}$$

$$ds^2 = dz_\mu\, dz^\mu,\quad \mu = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$z_\mu = g_{\mu\nu} z^\nu,\quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1,\quad g_{55} = -1,\quad g_{\mu\neq\nu} = 0. \tag{2}$$

Однако пространство де Ситтера занимает только часть 5-мерного пространства, а именно поверхность сферы

$$z_\mu z^\mu \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - z_5^2 = R^2. \tag{3}$$

Построение теории поля в 5-мерном плоском пространстве не представляет трудности [2], но движение в пространстве де Ситтера, как было сказано, соответствует в 5-мерном пространстве движению только на поверхности (3). Обычно при построении теории поля исходят из выражения интервала (2) и построенная при этом теория справедлива для всего пространства. Теперь же задача состоит в построении теории поля, исходя из уравнения поверхности (3) и справедливой только для данной поверхности. Развитый ниже метод позволяет решить эту задачу.

Продифференцируем (3) по элементам траектории свободной частицы s_0, движущейся на этой поверхности. Поверхность (3) — 2-го порядка и траектории свободной частицы даются пересечением этой поверхности с двухмерной плоскостью, проходящей в начале координат. Получаем кривые 2-го порядка, в частности круг, эллипс, гиперболу и прямые. Проекциями движения на координатных осях будут периодические колебания в случае круга и эллипса и апериодические в случае гиперболы. В случае пространства положительной кривизны замкнутые траектории являются пространственно подобными, а гипербола временноподобной (соответствующей реальному движению). В случае отрицательной кривизны — наоборот. Если теперь ввести импульс частицы p_μ, то, исходя из тензорной размерности, можно написать

$$\frac{dz}{ds_0} = \alpha z_\mu + \beta p_\mu, \quad \alpha = \mathrm{const}, \quad \beta = \mathrm{const}, \tag{4}$$

из (4) и (3) находим

$$z_\mu p^\mu = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) R^2. \tag{5}$$

Продифференцируем (5) по s_0 и используем уравнение для p_μ, построенное аналогично (4), в виде

$$\frac{dp_\mu}{ds_0} = \gamma z_\mu + \delta p_\mu, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad \delta = \mathrm{const}, \tag{6}$$

получаем

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{\alpha(\alpha + \delta) -}{\beta^2}\right) R^2. \tag{7}$$

Продифференцировав (7) по s_0, получаем выражение, совпадающее с (7) при условии

$$\frac{\alpha(\alpha+\delta) - \beta\gamma}{\beta^2} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \text{ т. е. } (\alpha + \beta)(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0. \tag{8}$$

Тогда (8) является условием замкнутости полученных нами уравнений. При этом находим

$$\frac{dz_\mu\, dz^\mu}{ds_0^2} = (\alpha\delta - \beta\gamma) R^2 \tag{2'}$$

и для реальной временноподобной траектории получаем $(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0$. Учитывая (8), находим $\alpha + \delta = 0$. Для луча света имеем $\alpha\beta - \beta\gamma = 0$.

Из (4) и (6) для уравнения движения находим

$$\frac{dz_\mu^2}{ds_0^2} = (\alpha^2 + \beta\gamma) z_\mu + \beta(\alpha + \delta) p_\mu,$$
$$\frac{dp_\mu^2}{ds_0^2} = (\alpha + \delta)\gamma z_\mu + (\delta^2 + \beta\gamma) p_\mu. \tag{9}$$

Для временноподобных (реальных) траекторий, согласно (8) и (2'), имеем

$$\alpha + \delta = 0,\ \alpha^2 + \beta\gamma = \beta\gamma - \alpha\delta > 0,$$

$$\frac{d^2 z_\mu}{ds_0^2} = (\alpha^2 + \beta\gamma)\, z_\mu, \quad \frac{d^2 p_\mu}{ds_0^2} = (\delta^2 + \beta\gamma)\, p_\mu. \tag{10}$$

Во всех этих случаях, как и следовало ожидать, имеем

$$\frac{dM_{\alpha\beta}}{ds_0} = 0,\ M_{\alpha\beta} = z_\alpha p_\beta - z_\beta p_\alpha. \tag{11}$$

§ 2. Случай поверхности первого порядка. Уравнение (3) можно представить в виде

$$R^2 - z_\mu z^\mu = (R - \gamma_\mu z^\mu)(R + \gamma^\mu z_\mu) = 0,$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu = 2g^{p\nu}\delta_{p\mu}.$$

Рассмотрим теперь плоскость $R - \gamma_\mu z^\mu = 0$. Продифференцируем это выражение по s_0 и воспользуемся уравнением

$$\frac{dz_\mu}{ds_0} = \alpha z_\mu + \beta p_\mu + aR\gamma_\mu,$$

построенным исходя из тензорной размерности. Получаем

$$\gamma_\mu p^\mu = -\left(\frac{\alpha + 5a}{\beta}\right) R,\ A = \frac{\alpha + 5a}{\beta}. \tag{12}$$

Продифференцируем (12) по s_0 и воспользуемся уравнением, построенным аналогично (12),

$$\frac{dp_\mu}{ds_0} = \gamma z_\mu + \delta p_\mu + bR\gamma_\mu.$$

Тогда получаем выражение, совпадающее с (12) при условии

$$(\gamma\beta - \alpha\delta) = 5\,(a\delta + b\beta). \tag{13}$$

Из (12) следует

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{\alpha + 5a}{\beta}\right)^2 R^2. \tag{14}$$

Продифференцировав (14) по s_0, находим

$$z_\mu p^\mu = -A\,\{A\delta - b\}\,\frac{1}{\gamma}\,R^2. \tag{15}$$

Продифференцировав (15) по s_0, получаем выражение, совпадающее с (14) при условии

$$-\left(\frac{\alpha + \beta}{\beta}\right) A\,\{A\delta - b\} + \beta A^2 - aA + (\gamma + b) = 0. \tag{16}$$

(13) и (16) являются условиями замкнутости полученной системы уравнения. Из них можно определить a и b через α, β, γ и δ. При $a=b=0$ получаем результаты § 1. Согласно (13) результаты § 1 оказываются справедливыми только для изотропных траекторий. Как следует из (14), луч света при этом ведет себя как частица с массой покоя $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)R$.

§ 3. Гамильтонов формализм. Функцию Лагранжа рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$L = c_1\left(\frac{dz_\mu}{ds_0}\right)\left(\frac{dz^\mu}{ds_0}\right) + c_2 z_\mu z^\mu + c_3 z_\mu\left(\frac{dz^\mu}{ds_0}\right). \tag{17}$$

Из определения

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dz_\mu}{ds_0}\right)}, \quad \frac{dp_\mu}{ds_0} = \frac{\partial L}{\partial z_\mu}$$

получаем уравнения (4) и (6) при условии

$$-\delta = \alpha = -\frac{c_3}{2c_1}, \quad \beta = \frac{1}{2c_1}, \quad \gamma = 2c_2 - \frac{c_3^2}{2c_1}. \tag{18}$$

Теперь (17) с учетом (7) можно переписать в виде

$$L = \frac{1}{2}\{\beta p_\mu p^\mu + \gamma z_\mu z^\mu\}.$$

Функция Гамильтона с учетом (18) запишется в виде

$$H = p_\mu \frac{dz^\mu}{ds_0} - L = \frac{1}{2}\{\beta p_\mu p^\mu - \gamma z_\mu z^\mu - 2\delta z_\mu p^\mu\}.$$

Уравнения Гамильтона при этом совпадают с (4) и (6).

Здесь следует отметить, что теория с $c_3=0$ инвариантна относительно обращения направления движения, а $c_3 \neq 0$ выделяет направление движения. В пространстве де Ситтера направление движения не выделено, т. е. $c_3=0$. Однако теория о $c_3 \neq 0$ представляет интерес в связи с переходом к пространству Фридмана. В последнем, как известно, выделено не только направление движения, но и кривизна со временем меняется.

Уравнение Шредингера теперь можно написать в стандартном виде $(H-E)\psi=0$. Отсюда следует

$$p_\mu p^\mu = \frac{1}{\beta}\left\{\gamma + \frac{\alpha+\delta}{\beta} + 2e\right\} R^2 = A^2R^2,$$

$$E = \lambda R^2, \quad \lambda = \frac{1}{2}\{A^2\beta^2 - \gamma\beta - (\alpha+\delta)\}\frac{1}{\beta}.$$

При $\alpha=\delta=c_3=0$ результаты § 1 и 3 переходят в результаты работы [3], полученные при помощи дополнительного принципа.

Аналогичным образом, учитывая результаты § 2, можно написать и уравнение Дирака в этом пространстве:

$$(\gamma_\mu p^\mu + k_0)\varphi = 0, \quad k_0 = \left(\frac{\alpha + 4a}{\beta}\right) R.$$

Переход к пространству с отрицательной кривизной соответствует замене R на (iR) [4].

Выражаю благодарность проф. Д. Д. Иваненко за дискуссию вопроса и Э. Я. Малдыбаевой за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen J. Rev. of Mooler. Phys., 37, No. 1, 250, 1965.
2. Курдгеландзе Д. Ф. Тезисы Второй Советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965.
3. Takinawa Y. Progr. of théoret. Phys. (dupplement, Extra namber), p. 609, 1965.
4. Терлецкий Я. П. ДАН СССР, 133, 329, 1960.

Поступила в редакцию
8. 4 1966 г.

Кафедра
теоретической физики