

Ю. И. КУЗНЕЦОВ

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

Для широкого класса нелинейных автоматических систем нелинейная задача об отыскании собственных периодических движений для координаты, входящей под знак нелинейности, может быть сведена с помощью принципа гармонического баланса к эквивалентной линейной. Если в системе имеется одна нечетно-симметричная однозначная нелинейность $f(x)$ и $x \approx a \sin \omega t$, то линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой системы для координаты x может быть представлено в виде [1, 2]

$$\Phi_n(p) + q(a) \Psi_m(p) = 0, \quad n \geq m. \quad (1)$$

В уравнении (1) $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы p степени n и m соответственно с действительными коэффициентами, определяемыми линейными звеньями системы, и

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (\psi = \omega t) \quad (2)$$

эквивалентный коэффициент передачи нелинейного звена.

Уравнение (1) весьма удобно исследовать методом траекторий корней [3]. Для этого построим траектории корней уравнения (1) на плоскости комплексных частот

$p = \delta + i\omega$, считая q свободным параметром, допускающим изменение от 0 до $+\infty$. При этом получается однозначное соответствие расположения корней уравнения (1) на плоскости p любому значению $0 \leq q \leq +\infty$. Необходимо в дальнейшем учесть, что характер нелинейности в системе обычно накладывает ограничения на возможные значения $q(a)$. В этом случае на построенных траекториях необходимо выделить области допустимых значений корней, которые соответствуют возможным значениям $q(a)$.

Если в областях допустимых значений корней будут чисто мнимые корни, то в системе возможны периодические движения. Периодические решения уравнения (1) соответствуют выходу пары комплексно-сопряженных корней уравнения (1) на мнимую ось $i\omega$ плоскости p . Точки выхода $\pm i\omega_{кр}$ комплексно-сопряженных корней на мнимую ось определяют частоты возможных периодических движений в системе. Амплитуды этих движений определяются из уравнения

$$q(a) = q_{кр}, \quad (3)$$

где $q_{кр}$ — значения q , при которых пара комплексно-сопряженных корней выходит на мнимую ось $i\omega$.

При исследовании устойчивости периодических режимов в нелинейных автоматических системах будем полагать, что вблизи периодического решения для переменной x переходные процессы в системе имеют вид слабо затухающих или слабо нарастающих колебаний. Так как эти колебания близки к синусоидальным, то они хорошо будут описываться линеаризованным характеристическим уравнением (1), только в формуле для $q(a)$ (2) амплитуда a будет не постоянной, а переменной $a(t)$, медленно меняющейся со временем вблизи значения $a=A$, где A — амплитуда исследуемого периодического решения.

Очевидно, для того, чтобы исследуемый периодический режим амплитуды A был устойчивым, необходимо, чтобы при амплитудах, близких к A , выполнялось следующее:

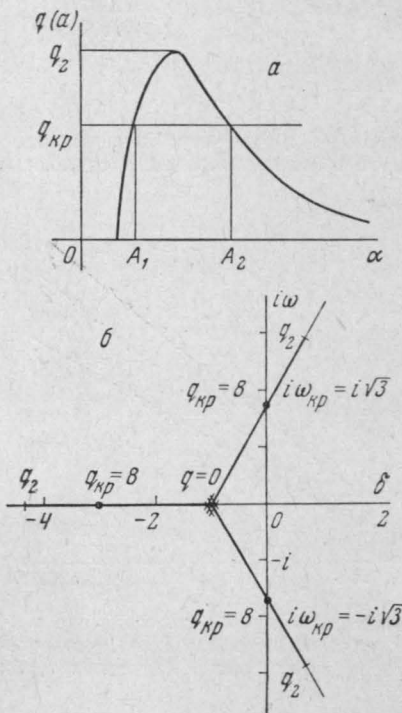


Рис. 1

при $a > A$ процесс был сходящимся, т. е. показатель затухания пары комплексно-сопряженных корней, соответствующих исследуемому периодическому решению, удовлетворял неравенству $\delta(A + \Delta a) < 0$, а при $a < A$ процесс был расходящимся, т. е. $\delta(A - \Delta a) > 0$.

Эти требования сводятся к выполнению неравенства

$$\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A} < 0, \quad (4)$$

где $\delta(a)$ — зависимость от амплитуды a показателя затухания пары комплексно-сопряженных корней, соответствующих периодическому решению амплитуды A . Неравенство

$$\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A} > 0 \quad (5)$$

является признаком неустойчивости периодического решения амплитуды A .

Если построены траектории корней линеаризованного уравнения (1) и график $q(a)$, то исследование устойчивости периодических решений не представляет трудности. Производную $\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A}$ можно представить в виде

$$\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A} = \left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}} \cdot \left. \frac{\partial q}{\partial a} \right|_{a=A}. \quad (6)$$

Знак частной производной $\left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}}$ легко определить из графика траекторий корней.

Если комплексно-сопряженные области допустимых значений корней пересекают ось $i\omega$ слева направо при увеличении q , то $\left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}} > 0$, а если справа налево, то $\left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}} < 0$.

Знак $\left. \frac{\partial q}{\partial a} \right|_{a=A}$ определяется из графика $q(a)$.

Например, пусть в уравнении (1) $\Phi_3(p) = (p+1)^3$, $\Psi_0(p) = 1$ и $q(a)$ имеет вид, показанный на рис. 1, a (это соответствует релейной характеристике $f(x)$ с зоной нечувствительности). В этом случае уравнение (1) примет вид

$$(p+1)^3 + q(a) = 0. \quad (7)$$

На рис. 1, б построены траектории корней уравнения (7) при изменении q от 0 до $+\infty$ (движение корней уравнения (7) при увеличении q показано стрелками на траекториях) и выделены области допустимых значений корней (считаем $q_{кр} < \text{Max} q(a) = q_2$). Области допустимых значений корней пересекают ось $i\omega$ в точках $\pm i\omega_{кр} = \pm i\sqrt{3}$ при $q = q_{кр} = 8$. Уравнение (7) имеет два периодических решения частоты $\Omega = \omega_{кр} = \sqrt{3}$ и амплитуды A_1 и A_2 , где A_1 и A_2 определяются из уравнения (3) (см. рис. 1, а). Нетрудно проверить, что периодическое решение амплитуды A_1 неустойчиво, так как

$$\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A_1} > 0 \left(\left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}} > 0, \left. \frac{\partial q}{\partial a} \right|_{a=A_1} > 0 \right),$$

а периодическое решение амплитуды A_2 устойчиво, так как

$$\left. \frac{d\delta(a)}{da} \right|_{a=A_2} < 0 \left(\left. \frac{\partial\delta}{\partial q} \right|_{q=q_{кр}} > 0, \left. \frac{\partial q}{\partial a} \right|_{a=A_2} < 0 \right).$$

В заключение автор благодарит проф. К. Ф. Теодорчика за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
2. Сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования». М., Госэнергоиздат, 1962.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., Изд-во АН СССР, 1964.

Поступила в редакцию
16. 6 1966 г.

Кафедра
физики колебаний