Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1967

УДК 530.145:539.12.01

В. Б. ГОСТЕВ

ДИСКРЕТНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ВЫСШИХ СЕКТОРАХ МОДЕЛИ ЛИ

Интегральные уравнения для волновых функций дискретных стационарных состояний высших однофермионных секторов модели Ли решены приближенно методом последовательной замены ядра вырожденным. Найдена связь между энергией уровня и константой взаимодействия. Показано, что в каждом секторе может существовать не более одного дискретного состояния, энергия которого с ростом константы взаимодействия стремится к конечному пределу, причем уровни энергии дискретных состояний различных секторов при очень сильной связи эквидистантны.

Введение

Вопрос о возможности существования дискретных стационарных состояний в высших секторах модели Ли [1] был поставлен Гайзенбергом [2] в связи с квантованием нелинейных уравнений единой теории поля. Однако найти точную волновую функцию V—Θ связанного состояния удалось лишь недавно Мута [3], который использовал дисперсионную технику Амадо [4]. Метод определения волновой функции, развитый в работе [3], не применим в следующих секторах с одной V- или N-частицей из-за усложнения интегрального уравнения. В статье [5] для исследования высших секторов был упрощен гамильтониан модели Ли — принято, что все операторы полей не зависят от импульса, но из-за этого состояния дискретного и непрерывного спектров стали неразличимыми.

В настоящей статье интегральные уравнения для волновых функций дискретных состояний высших секторов, полученные из оригинального гамильтониана модели, решаются приближенно, и на основании найденных решений вычисляются уровни энергии стационарных состояний.

Гамильтониан модели возьмем в виде

$$H = m_V V^+V + m_N N^+N + \int dk\omega a^+(k)\,a(k) - \delta m_V V^+V +$$
$$+ \lambda_0 \int dku(k)\,[V^+Na(k) + N^+a^+(k)\,V], \qquad (1)$$

где $V^+(V)$, $N^+(N)$ и $a^+(k)\,(a(k))$ — операторы рождения (уничтожения) V, N и θ-частиц, удовлетворяющие перестановочным соотношениям Ферми и Бозе, $k = |k|$, $\omega = \omega(k) = \sqrt{k^2+1}$ — масса θ-частицы принята за единицу, $u(k)$ — вещественная, монотонно убывающая обрезающая функция, $u(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, для точечного источника $u(k)=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$, λ_0 — неперенормированная постоянная связи [6],

$$\delta m_V = -\gamma \int \frac{dku^2(k)}{c(m_V-\omega)}$$

$$\gamma=\lambda_0^2, \quad c(x)=m_N-x.$$

В дальнейшем ограничимся случаем стабильной V-частицы: $m_V < m_N + 1$. Собственные состояния гамильтониана классифицируются по секторам с фиксированными значениями интегралов движения

$$n_1 = V^+V + N^+N,$$

$$n_2 = V^+V + \int dka^+(k)\,a(k).$$

Мы будем рассматривать только секторы с $n_1=1$ и произвольным значением $n_2=n+1$.

Дискретные стационарные состояния в n-ом секторе имеют вид

$$|B)_n = M_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \varphi(k_1, \ldots k_n) \prod_{i=1}^{n} dk_i a^+(k_i) V^+ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int \psi(k_1, \ldots k_{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} dk_i a^+(k_i) N^+ \right\} |0>, \tag{2}$$

где $|0>$ — состояние вакуума, M_n — нормировочный множитель. Уравнение Шредингера

$$H\,|B)_n = E\,|B)_n \tag{3}$$

приводит к следующим соотношениям [2]:

$$\varphi(k_1, \ldots k_n) \left[m_V - \delta m_V + \sum_{i=1}^{n} \omega_i - E \right] =$$

$$= -\lambda_0 \sqrt{n+1} \int dk_{n+1} \psi(k_1, \ldots k_{n+1})\, u(k_{n+1}), \tag{4}$$

$$\psi(k_1, \ldots k_{n+1})\, c\left(E - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i\right) = -\lambda_0 \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=1}^{n} u(k_i)\, \varphi(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_{n+1}), \tag{5}$$

где $\omega_j = \omega(k_j)$.

Подстановкой соотношения (5) в (4) получаем интегральное уравнение для волновой функции $\varphi(k_1, \ldots k_n)$

$$\varphi(k_1, \ldots k_n)\, h\left(E - \sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) =$$

$$= \gamma \int \frac{u(k_{n+1})\, dk_{n+1}}{c\left(E - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i\right)} \sum_{i=1}^{n} u(k_i)\, \varphi(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_{n+1}), \tag{6}$$

где

$$h(x)=(m_V-x)\left[1+\gamma\int\frac{dku^2(k)}{c(m_V-\omega)\,c(x-\omega)}\right], \tag{7}$$

$h(x)$ как функция комплексного x определена на всей плоскости x с разрезом вдоль действительной оси от m_N+1 до $+\infty$ и принимает действительные значения при действительных x в интервале $-\infty<x<m_N+1$, в этом интервале $\frac{dh(x)}{dx}<0$, $\frac{dh(m_N+1)}{dx}=-\infty$,

$$|h(m_N+1)|<\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=-1,\quad h(m_V)=0.$$

Уравнение (6) — однородное интегральное уравнение. Если $\int\limits_0^\infty dku^2(k)k^2<\infty$, то уравнение такого типа имеет отличные от нуля нормируемые симметричные решения только при определенных соотношениях между E и γ [7].

Сектор $V-\Theta$

Волновая функция $\varphi(k)$ состояния

$$|B)_1=M_1^{-\frac{1}{2}}\left\{\int\varphi(k)\,dkV^+a^+(k)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\psi(k,l)\,dkdla^+(k)\,a^+(l)\,N^+\right\}|0> \tag{8}$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(k)=\gamma\frac{u(k)}{h(E-\omega)}\int\frac{dlu(l)\,\varphi(l)}{c(E-\omega(k)-\omega(l))}. \tag{9}$$

Заменив $c(E-\omega(k)-\omega(l))$ на $c(E-\omega(k)-\omega(0))=c(E-\omega-1)$, сведем уравнение (9) к уравнению с вырожденным ядром. Замена приводит к незначительному «увеличению» положительного ядра для форм-факторов $u(k)$, убывающих при больших k быстрее $k^{-\frac{5}{2}}$ и при достаточно малых импульсах обрезания $k_{обр}$ (оценки см. [8], обоснование замены—[9]). Из вырожденного уравнения сразу получаем волновую функцию

$$\varphi(k)=\frac{u(k)}{h(E-\omega)\,c(E-\omega-1)} \tag{10}$$

и характеристическое уравнение, связывающее энергию дискретного состояния с константой связи

$$\gamma T_1(\gamma,E)=1,$$

$$T_1(\gamma,E)=\int dkT_1(k,\gamma,E)=\int\frac{u^2(k)\,dk}{h(E-\omega)\,c(E-\omega-1)}. \tag{11}$$

Нормируемость $\varphi(k)$ (отсутствие полюсов) и условие стабильности V-частицы накладывает ограничение на значения E

$$E<m_V+1, \tag{12}$$

запрещающее распад $|B)_1\to V+\Theta$.

При любом $0<\gamma<\infty$ $T_1(\gamma,E)$ как функция действительного E определена для $-\infty<E\leqslant m_V+1$, $\frac{\partial T_1(\gamma,E)}{\partial E}>0$, $\lim\limits_{E\to-\infty}T_1(\gamma,E)=0$ (для больших отрицательных E $T_1(\gamma, E) \sim E^{-2}$), $\frac{\partial T_1(\gamma, m_V+1)}{\partial E} = +\infty, T(\gamma, m_V + 1) < \infty$; $\gamma T_1(\gamma, E)$ монотонно возрастает с ростом γ от 0 до ∞, причем существует предел $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \gamma T_1(\gamma, E) = Q_1(E)$

$$Q_1(E) = \int dk Q_1(k, E) =$$

$$= \int \frac{u^2(k)\,dk}{c(E-\omega(k)-1)(m_V - E + \omega(k)) \int \frac{dl u^2(l)}{c(m_V - \omega(l))\, c(E-\omega(k)-\omega(l))}}. \qquad (13)$$

$Q_1(E)$ обладает всеми свойствами $T(\gamma, E)$ (только при $E \to -\infty$ $Q_1(E) \sim |E|^{-1}$). Свойства $T(\gamma, E)$ показывают, что уравнение (11) может иметь не более одного корня при $\gamma > \gamma_1'$, определяемом из уравнения

$$\gamma_1' T_1(\gamma_1', m_V + 1) = 1. \qquad (14)$$

Поскольку

$$Q_1(m_V+1) = \int \frac{u^2(k)\,dk}{c(m_V - \omega(k))(\omega(k)-1) \int \frac{u^2(l)\,dl}{c(m_V-\omega(l))[c(m_V-\omega(l))+\omega(k)-1]}} >$$

$$> \frac{\int \frac{u^2(k)\,dk}{c(m_V-\omega)(\omega-1)}}{\int \frac{u^2(k)\,dk}{c^2(m_V-\omega)}} > 1, \qquad (15)$$

уравнение (14) имеет положительный корень. Значит, при $\gamma_1' < \gamma < \infty$ существует связанное V—Θ-состояние с энергией, убывающей с ростом γ от m_V+1 до конечного значения ζ_1, определяемого из уравнения

$$Q_1(\zeta_1) = 1. \qquad (16)$$

Обращение характеристического уравнения (11) — функция $\gamma_1(E)$ имеет простой полюс при $E = \zeta_1$, т. е. при $E < \zeta_1$, состояние $|B)_1$ становится призрачным состоянием [10].

В силу замены ядра характеристическое уравнение дает заниженные значения γ для фиксированной энергии связанного состояния [9]. Сравнение решения (10) и характеристического уравнения (11) с точными [3] показывает, что качественно они воспроизводят все особенности точного решения ($\varphi(k) \sim u(k) k^{-2}$ при больших k, единственный уровень энергии, характер зависимости энергии уровня от γ и в тех случаях, когда замена ядра не может быть оправдана.

Рассмотренное в этом разделе приближенное решение служит основой для исследования высших секторов, к которому мы переходим.

Высшие секторы

Заменим в знаменателе ядра интегрального уравнения (6) ω_{n+1} на 1. Тогда уравнение сведется к n одинаковым интегральным уравнениям вида

$$\varphi_1(k_1, \ldots k_{n-1}) \left[1 - \gamma T_1\left(\gamma, E - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right)\right] =$$

$$= \gamma \int \frac{u(k_n)\,dk_n}{c\left(E-1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\right) h\left(E-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\right)} \sum_{i=1}^{n-1} u(k_i)\,\varphi_1(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_n), \tag{17}$$

где

$$\varphi(k_1, \dots k_n) = \sum_{l=1}^{n} u(k_i)\,\varphi_1(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_n) \frac{1}{h\left(E-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\right) c\left(E-1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\right)}. \tag{18}$$

Остальные уравнения получаются из (17) заменой индексов. Проведя эту процедуру n раз, получим выражение для волновой функции

$$\varphi_1(k_1, \dots k_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} u(k_i)\,\varphi_2(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_{n-1}) \times$$

$$\times \left\{h\left(E-1-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\right) c\left(E-2-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\right)\left[1-\gamma T_1\left(\gamma, E-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\right)\right]\right\}^{-1},$$

$$\varphi_2(k_1, \dots k_{n-2}) = \sum_{i=1}^{n-2} u(k_i)\,\varphi_3(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_{n-2}) \times$$

$$\times \left\{h\left(E-2-\sum_{i=1}^{n-2}\omega_i\right) c\left(E-3-\sum_{i=1}^{n-2}\omega_i\left[1-\gamma T_1\left(\gamma, E-1-\sum_{i=1}^{n-2}\omega_i\right)\right] \times\right.\right.$$

$$\left.\times \left[1-\gamma T_2\left(\gamma, E-\sum_{i=1}^{n-2}\omega_i\right)\right]\right\}^{-1},$$

. . . .

$$\varphi_l(k_1, \dots k_{n-l}) = \sum_{i=1}^{n-l} u(k_i)\,\varphi_{l+1}(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_{n-l}) \times$$

$$\times \left\{c\left(E-l-1-\sum_{i=1}^{n-l}\omega_i\right) h\left(E-l-\sum_{i=1}^{n-l}\omega_i\right) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{j=1}^{l}\left[1-\gamma T_j\left(\gamma, E-l+j-\sum_{i=1}^{n-l}\omega_i\right)\right]\right\}^{-1},$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}(k_1) = \xi_n(k) = u(k)\left\{c(E-n-\omega)\,h(E-\omega-n+1) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{j=1}^{l}\left[1-\gamma T_j(\gamma, E-n+1+j-\omega)\right]\right\}^{-1} \tag{19}$$

и характеристическое уравнение

$$\gamma T_n(\gamma, E) = 1, \tag{20}$$

в котором $T_n(\gamma, E) = \int dku(k)\xi(k) = \int dkT_n(k, \gamma, E)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$T_n(\gamma, E) = \int dkT_{n-1}(k, \gamma, E-1)\frac{1}{1-\gamma T_{n-1}(\gamma, E-\omega)}. \tag{21}$$

Функция $T_n(\gamma, E)$ определена в верхней полуплоскости E, γ левее и ниже кривой $\gamma_{n-1}(E-1)$ — обращения уравнения (20) в $n-1$ секторе. По индукции легко показать, что $T_n(\gamma, E)$ обладает всеми свойствами $T_1(\gamma, E)$. Поэтому по переменной интегрирования ядра всех приближенных интегральных уравнений убывают при больших импульсах пропорционально k^{-2} и для достаточно малых $k_{\text{обр}}$ замена ядра вырожденным может быть оправдана на каждом этапе для форм-факторов, убывающих быстрее, чем $k^{-\frac{7}{2}}$.

Покажем, что для некоторых значений γ единственный уровень в n-ном секторе действительно существует. Для этого достаточно выполнения неравенства

$$Q_n(\zeta_{n-1}+1) > 1, \tag{22}$$

где

$$Q_n(E) = \lim_{\gamma\to\infty}\gamma T_n(\gamma, E) = \int dkQ_n(k, E) = \int dkQ_{n-1}(k, E-1)\frac{1}{1-Q_{n-1}(E-\omega)} \tag{23}$$

и ζ_n определяется из уравнения

$$Q_n(\zeta_n) = 1. \tag{24}$$

Неравенство (22) немедленно доказывается с помощью рекуррентного соотношения (23)

$$Q_n(\zeta_{n-1}+1) = \int dkQ_{n-1}(k, \zeta_{n-1})\frac{1}{1-Q_{n-1}(\zeta_{n-1}+1-\omega)} >$$

$$> \int dkQ_{n-1}(k, \zeta_{n-1}) = Q_{n-1}(\zeta_{n-1}) = 1.$$

Как следствие неравенства (22) получаем естественное ограничение

$$\zeta_n < \zeta_{n-1}+1. \tag{25}$$

Нормируемость волновой функции приводит к запрещению распадов

$$|B)_n \to N+(n+1)\theta,\ |B)_n \to V+n\theta,\ |B)_n \to |B)_1 +$$
$$+(n-1)\theta, \ldots |B)_n \to |B)_{n-1}+\theta,$$

но фактически все эти каналы будут закрыты, если закрыт последний канал распада.

Минимальное значение γ, при котором существует уровень в n-ном секторе — γ_n', определяется из условия

$$\gamma_n' = \gamma(\alpha_n), \tag{26}$$

где α_n — корень уравнения

$$\gamma_n(E) = \gamma_{n-1}(E-1), \tag{27}$$

в котором $\gamma_n(E)$ — обращение характеристического уравнения (20). Кривая $\gamma_n(E)$, как и в первом секторе, лежит ниже истинной кривой. Поскольку $\gamma_n(E)$ имеет область существования $\gamma_n' < \gamma < \infty$, условие (26) накладывает ограничение

$$\gamma'_{n+1} \geqslant \gamma'_n. \tag{28}$$

Таким образом, дискретный уровень в n-ном секторе возникает при $\gamma = \gamma_n'$ и убывает от α_n до конечного значения ζ_n при $\gamma = \infty$. Для $E < \zeta_n$ состояние $|B)_n$ становится призрачным [10].

Если последовательность γ_n' расходится, то любому γ соответствуют дискретные состояния лишь в конечном числе низших секторов.

Попытаемся точнее определить расположение уровней при $\gamma \to \infty$. Для этого упростим выражения $Q_n(E)$, воспользовавшись малостью $k_{\text{обр}}$, путем приближенного вычисления интегралов по формуле

$$\int f(k)\, u^2(k)\, dk \approx f(0) \int u^2(k)\, dk, \tag{29}$$

где $f(k)$ — медленно меняющаяся функция.

В этом приближении

$$Q_1(E) = \frac{c\,(m_V - 1)}{m_V + 1 - E}, \tag{30}$$

и последовательная подстановка в рекуррентное соотношение (23) дает для корней уравнения (24) простое выражение

$$\zeta_n = m_V + n\,(m_V - m_N), \tag{31}$$

т. е. в пределе очень сильной связи уровни дискретных стационарных состояний эквидистантны, а расстояние между уровнями зависит только от разности масс V- и N-частиц. Этот результат противоречит известному положению классической теории сильной связи [11], в которой константа расщепления уровней пропорциональна γ^{-1}, но не следует забывать, что бесконечному значению неперенормированной γ соответствует конечное значение квадрата перенормированной постоянной связи $\gamma_R = \gamma_{R\,\text{крит}} < \infty$ [10].

Из расположения низших значений энергий состояний $|B)_n$ (31) следует, что при $m_V > m_N$ (с той же точностью, что и формула (31)) энергия уровня с ростом номера увеличивается, а при $m_V < m_N$ относительное расположение уровней может быть произвольным.

Сравнение точных и приближенных решений в первом секторе позволяет надеяться, что и в высших секторах качественные заключения относительно характера волновой функции (пропорциональность $[u(k_j)k_j^{-2}]^n$ при больших k_j), числа и расположения уровней дискретных состояний останутся в силе в тех случаях, когда рассмотренное приближение неприменимо. Дополнительным аргументом в пользу этого утверждения служит ограниченность нормы ядра интегрального уравнения (6) при $\gamma \to \infty$, приводящая к конечному числу собственных функций [12].

Выводы

Если рассматривать N и V-частицы модели Ли как нуклоны и Θ-частицу как заряженный π-мезон [13], то дискретные стационарные состояния высших секторов можно трактовать как возбужденные состояния нуклонов. При $\gamma < \gamma'_n$ эти состояния станут нестабильными. Энергия и время жизни нестабильных состояний определяются из характеристических выражений (11), (20) путем аналитического продолжения левых частей уравнения на второй лист комплексной E-плоскости, аналогично определению энергии и времени жизни нестабильной V-частицы [14]. Нестабильное состояние $|B)_1$ проявится как резонанс амплитуды рассеяния Θ-частицы на V-частице, а нестабильные $|B)_n$ — в качестве резонанса в рассеянии Θ-частиц на $|B)_{n-1}$-состояниях, которые предполагаются стабильными.

Если учесть предложенное выше истолкование модели Ли, то настоящая работа позволяет сделать вывод о возможности описания возбужденных состояний мезон-нуклонных систем в рамках гамильтонова формализма квантовой теории поля. По мере уточнения модели качественный вывод о наличии связанных состояний сохраняет свою силу, но вид этих состояний и их число может меняться и требует соответствующего исследования.

Приношу глубокую благодарность В. И. Григорьеву и А. Р. Френкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee T. D. Phys. Rev., **95**, 1329, 1954.
2. Heisenberg W. Nucl. Phys., **4**, 532, 1957. Сб. «Нелинейная квантовая теория поля», М., ИЛ, 1959, стр. 175.
3. Muta T. Progr. Theor. Phys., **33**, 666, 1965.
4. Amado R. D. Phys. Rev., **122**, 697, 1961.
5. Barton G. Nuovo Cim., **17**, 864, 1960.
6. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.
7. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.
8. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астр. № 5, 48—57, 1966.
9. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
10. Källen G., Pauli W. Kgl. Danske Videns. Selskab, Mat.— fys. Medd., **30**, No. 7, 1955 («Усп. физ. наук», **60**, 425, 1956).
11. Паули В. Мезонная теория ядерных сил. М., ИЛ, 1947.
12. Халилов З. И. ДАН СССР, **54**, 1022, 1946.
13. Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля. М., ИЛ, 1963.
14. Glaser V., Källen G. Nucl. Phys., **2**, 706, 1956/57; Levy M. Nuovo Cim., **13**, 115, 1959; Levy M. Nuovo Cim., **14**, 612, 1959.

Поступила в редакцию
8. 6 1965 г.

Кафедра
квантовой теории