Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1967

УДК 530.12

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

КОНФОРМО-ГАЛИЛЕЕВОЕ ПРОСТРАНСТВО

(пространство Фридмана—Лобачевского)

Рассматривается уравнение Эйнштейна в пространстве Фридмана—Лобачевского. Уравнение состояния задается в общем виде и в частных случаях $p=0$, $p=\rho/3$; в $p=\rho$ даются замкнутые аналитические решения. Исследуются свойства полученных решений при пребразованиях $\lambda \leftrightarrows -\lambda$ и показывается, что существуют решения, которые при $\lambda \leftrightarrows -\lambda$ дают переход от расширения к сжатию.

Конформо-галилеевое пространство (КГП) наряду с равноправием 4-х координат обладает симметриями плоского пространства — времени $(R+T)$. В связи с этим в (КГП) имеются необходимые условия для построения теории элементарных частиц. Интервал (КГП) состоит из двух множителей: ds_0^2 — интервала плоского $(R+T)$ и $H^2(s)$ — масштабного фактора. Первый содержит локальные свойства $(R+T)$ и тем самым и основные свойства элементарных частиц, а второй глобальные свойства $(R+T)$, т. е. сведения о мире в целом. Таким образом, интервал (КГП) связывает локальные и глобальные свойства $(R+T)$.

Уравнение Эйнштейна при $\lambda=0$ (λ — космологическая постоянная) в случае собственной задачи Фридмана $p=0$ (p — давление) имеет как расширяющееся $\left(H_+^2=\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)^4[1]\right.$, так и сжимающееся $\left(H_-^2=\left(1+\frac{\alpha}{\tau}\right)\right)$ 4 решения. Однако H_+ существует только при $\rho s_0^2>0$ (ρ — плотность энергии) H_- — только при $\rho s_0^2<0$. Однако, согласно уравнению Эйнштейна, при задании знака ρs_0^2 нет основания для выделения направления времени (сжатия или расширения). Поскольку речь идет о глобальных свойствах $(R+T)$, то выход из этого положения можно искать в требовании $\lambda \neq 0$. Предположение $\lambda=0$ подразумевает, что задание $T_{\mu\nu}$ (распределения энергии вещества) полностью определяет свойства $(R+T)$. Предположение же $\lambda \neq 0$ подразумевает, что для определения свойства $(R+T)$ в целом наряду с заданием $T_{\mu\nu}$ необходим еще учет условий на границе мира. Граничные условия для мира частиц и античастиц, вообще говоря, должны быть различными (как известно, наша Вселенная является расширяющимся миром частиц). В частности, если принять, что для мира частиц $\lambda=\lambda_+$, а для мира античастиц $\lambda=\lambda_-=-\lambda_+$, то в этом случае особый интерес приобретают те решения уравнения Эйнштейна, в случае которых преобразование $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ дает переход от расширения (мира частиц) к сжатию (миру античастиц). Настоящая работа посвящена исследованию указанных решений в рамках (КГП).

§ 1. Уравнение конформо-галилеевой метрики

Интервал (КГП), как известно, записывается в виде [1]

$$ds^2 = \varepsilon H^2(s)\, ds_0^2, \quad ds_0^2 = \sum_{\mu=0}^{3} (e_\mu\, dx_\mu^2), \tag{1}$$

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon H^{-2} e_\mu \delta_{\nu\mu}, \quad \varepsilon = \pm 1, \; e_0 = 1, \; e_n = -1,$$

$$s^2 = \sum_{\mu=0}^{3} e_\mu x_\mu^2, \quad x_0 = \mathrm{ct}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Уравнение Эйнштейна с космологической постоянной λ, как известно, имеет вид

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}, \; R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu},$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии импульса материи, и задается в виде

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad u_\mu u^\mu = 1, \tag{2}$$

где p — давление, ρ — плотность энергии.

В дальнейшем рассматривается только случай $\varepsilon = 1$. Последнее соответствует пространству отрицательной кривизны. Решения для $\varepsilon = -1$ (т. е. для пространства с положительной кривизной) легко получить путем замены $H^2 \leftrightarrow -H^2$. Из (1), (2) находим [1].

$$\varkappa_0 \rho H^2 = -\lambda H^2 + 3\left\{\left(\frac{H'}{H}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{H'}{H}\right)\right\},$$

$$\varkappa_0 p H^2 = \lambda H^2 - \left\{2\left(\frac{H''}{H}\right) + \frac{4}{s}\left(\frac{H'}{H}\right) - \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right\}. \tag{3}$$

Скалярная кривизна R при этом определится из уравнения

$$R = \frac{6}{H^3}\left(H'' + \frac{3}{s} H'\right). \tag{4}$$

Таким образом, имеем три уравнения для 4 неизвестных p, ρ, R, H. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо еще задание связи между давлением и плотностью энергии, т. е. уравнения состояния. Указанная связь специфична для каждой материальной системы и отражает наличие в системе негравитационных взаимодействий. При этом задание уравнения состояния, как правило, выделяет отдельные, частные задачи.

Рассмотрим систему, состоящую из нескольких компонентов (полей). Скажем, пылевидная материя, погруженная в фотонные или нейтринные поля. Тогда, при условии отсутствия взаимодействия (кроме гравитационного) между разными компонентами можно записать

$$\rho = \sum_j \rho_j, \; p = \sum_j p_j. \; \rho_j = n_j \rho, \; \sum_j n_j = 1,$$

где ρ, p — суммарная плотность энергии и давление в системе ρ_j, p_j — плотность энергии и давление j-того компонента, n_j — концентрация плотности энергии j-того компонента. Задавая уравнение состояния для j-того компонента в виде $p_j = \frac{1}{3}\alpha_j\rho_j$ (по j не суммируется), получаем

$$p = \frac{1}{3} a\rho, \quad a = \sum_j \alpha_j n_j. \tag{5}$$

В случае собственной задачи Фридмана (пылевидная материя) и «чистого» фотонного (или утрарелятивисткого) газа имеем соответственно

$$\rho = \rho_{\text{част}},\ p = 0,\ a = 0;$$

$$\rho = \rho_{\text{фот}},\ p = \frac{1}{3}\rho,\ a = 1.$$

В случае смеси фридмановского газа с фотонным газом имеем

$$\rho = \rho_{\text{част}} + \rho_{\text{фот}},\ p = \frac{1}{3}\rho_{\text{фот}} = \frac{n_{\text{фот}}}{3}\rho,$$

$$a = n_{\text{фот}} = \left(1 + \frac{\rho_{\text{част}}}{\rho_{\text{фот}}}\right)^{-1}.$$

Подставляя (5) в (3) и исключая ρ, получаем

$$H'' + \frac{a+2}{s}H' + \frac{a-1}{2}\left(\frac{H'}{H}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(a+3)H^3 = 0.$$

Введем новую функцию θ и координату ξ по формуле

$$H = \theta^{2/1+a},\ \xi = \frac{s}{s_0},\ s_0 = \text{const}.$$

Тогда получим

$$\begin{gathered}\theta'' + \frac{2+a}{\xi}\theta' - \frac{\lambda s_0^2}{12}(1+a)(3+a)\theta^m = 0,\\ m = \frac{a+5}{a+1},\ a = \frac{5-m}{m-1},\ 0 \leqslant a,\\ 5 \geqslant m > 1.\end{gathered} \tag{6}$$

Целые значения m ($m=2$, 3, 4, 5) имеем для «чистого» фотонного газа ($m=3$, $a=1$), смеси фотонов с пылевидной материей с концентрацией $\rho_{\text{част}}/\rho_{\text{фот}}=2$ ($m=4$, $a=1/3$) и для собственной задачи Фридмана ($m=5$, $a=0$), т. е. «чистой» пылевидной материи. В случае феноменологического максимально жесткого уравнения состояния $p=\rho$ имеем $m=2$, $a=3$. Заметим, что в случае $m=2$, 3, 5 уравнение (6) поддается точному решению. Эти решения будут рассмотрены ниже. Для плотности энергии ρ и скалярной кривизны R имеем соответственно

$$\begin{gathered}\varkappa_0\rho = -\lambda + 12\theta^{-4/1+a}\left(\frac{1}{1+a}\right)\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{1+a}\left(\frac{\theta}{\theta}\right)'\right\},\\ R = (5-a)\varkappa_0\rho + 4\lambda.\end{gathered} \tag{7}$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\theta = \xi^q z(\eta),\ \eta = b\ln\xi,\ b = \text{const}. \tag{8}$$

Тогда находим

$$z_\eta^2 - Az^2 - \frac{2B}{1+m} z^{1+m} = C_1,$$

$$q = \frac{2}{m-1} = \frac{a+1}{2}, \quad A \equiv \left(\frac{q}{b}\right)^2, \tag{9}$$

$$\left(\frac{2}{m+1}\right) B = \frac{1}{3} \lambda s_0^2 A.$$

После квадратуры получаем

$$\xi = \exp\left\{\frac{1}{b} \int \frac{dz}{\sqrt{c_1 + Az^2 + \left(\frac{2}{1+m}\right) Bz^{m+1}}}\right\}.$$

Для выражения плотности энергии имеем

$$\varkappa_0 \rho s_0^2 = -\lambda s_0^2 + 12 z^{1-m} \left\{-\frac{1}{4} + \left(\frac{b}{1+a}\right)^2 \left(\frac{z_\eta}{z}\right)^2\right\} = 3c_1 z^{-(1+m)}.$$

Тогда уравнение для $z = z(\eta)$ можно записать в виде

$$\left(\frac{b}{q}\right) z^{-1} z_\eta = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3} s_0^2 (\lambda + \varkappa_0 \rho) z^{m-1}}.$$

Так как решение рассматриваемого уравнения Эйнштейна зависит только от η и s_0^2 при этом s_0^2 в теории входит только в комбинации $s_0^2(\lambda + \varkappa_0 \rho)$, то преобразование $H^2 \leftrightarrow -H^2$ можно заменить преобразованием $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, $\rho \leftrightarrow -\rho$.

1. Рассмотрим частный случай решения уравнения (6): $\lambda = 0$, $T_{\mu\nu} \neq 0$. Тогда получим

$$\theta'' + \frac{2+a}{s} \theta' = 0, \quad \theta = \alpha \left\{1 + \frac{\beta}{\alpha} \xi^{-(1+a)}\right\}, \tag{10}$$

$$H = \theta^{4/1+a}$$

При этом для плотности энергии имеем выражение $\left(\frac{4}{1+a} = m - 1\right)$

$$\varkappa_0 \rho s_0^2 = -12 \alpha \beta \xi^{-(3+a)} \{\alpha + \beta \xi^{-(1+a)}\}^{-(1+m)}.$$

Из требования положительности ρs_0^2 и псевдоэвклидовости метрики при $s \to \sim$ находим

$$\left(\frac{\beta}{a}\right) \alpha^{1-m} < 0, \quad H^2 (s \to \infty) \rightrightarrows 1,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\left|\frac{b}{\alpha}\right|, \quad \theta = \alpha \left\{1 - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \xi^{-(1+a)}\right\},$$

$$\varkappa_0 \rho s^2 = 12 \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \xi^{-(3+a)} \left\{1 - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \xi^{-(1+a)}\right\}^{-(1+m)}.$$

2. Случай «пустого» (или максимального однородного) пространства $\lambda \neq 0$, $T_{\mu\nu} = 0$ $(\lambda = \pm|\lambda|)$.

Из (3) находим уравнение для H

$$H'' - \frac{1}{\xi} H' - 2\left(\frac{H'}{H}\right)^2 H = 0, \quad H = \alpha (1 + \beta \xi^2)^{-1}.$$

Подставляя полученное решение в (3) и потребовав $\rho=0$ и псевдоэвклидовость метрики, при $\lambda\rightleftarrows 0$ получаем [1]

$$H=\left(1-\frac{1}{12}\lambda s^2\right)^{-1},\ \alpha^2=1. \tag{11}$$

3. Используя полученные точные решения двух указанных крайних случаев, можно построить приближенное решение общей задачи [6]:

$$H\approx\left\{1-\frac{1}{12}(\lambda s_0^2)\xi^2\right\}^{-1}\left\{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-(1+a)}\right\}\approx$$

$$\approx\left\{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-(1+a)}+\frac{1}{12}(\lambda s_0^2)\xi^2+\ldots\right\}.$$

§ 2. Случай «чистого» фотонного газа ($m=3$, $a=1$, $p=\rho/3$)

В случае $m=3$, ($a=1$) из (6)—(9) получаем

$$\begin{gathered}\theta''+\frac{3}{\xi}\theta'-2\lambda_3\theta^3=0,\ \theta=H,\ \lambda_3=\frac{1}{3}\lambda s_0^2,\\ \theta=\frac{1}{\xi}z(\eta),\ \eta=b\ln\xi,\\ \rho=\rho_0 z^{-4}(\eta),\ \varkappa_0\rho_0 s_0^2=3c_1b^{-2}\equiv 3c_0,\\ z_\eta^2-b^{-2}z^2-b^{-2}\lambda_3 z^4=c_1\equiv c_0b^{-2}.\end{gathered} \tag{12}$$

В частном случае при $\lambda=0$ и $\rho\neq 0$ имеем

$$\theta=\alpha\left\{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-2}\right\},\ \varkappa_0\rho s_0^2=12\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\left\{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-2}\right\}^{-4}.$$

Уравнение (12) имеет решение в эллиптических функциях. При требовании $\rho s_0{}^2>0$ нужные решения можно выделить, используя условия (10 и (11).

1. Суммируя полученные таким образом результаты, имеем

$$\lambda>0,\ \chi\equiv\frac{1}{3}\lambda s_0^2\alpha^2,\ s_0^2>0,\ \alpha^2>0,\ H^2>0.$$

$$\mathbf{0\leqslant\chi\leqslant\frac{1}{2}}.$$

$$\theta\equiv\theta_1=\frac{\alpha}{\xi}\operatorname{th}n(\eta),\ k_1^2=\frac{1-2\chi}{1-\chi},\ b^2=1-\chi,$$

$$\eta=b\ln\xi,\ \rho=\rho_0\alpha^{-4}\operatorname{cth}n(\eta),\ \varkappa_0\rho_0s_0^2=3\alpha^2(1-\chi).$$

При $\lambda\rightrightarrows 0$ имеем $\theta_1\rightrightarrows\frac{\alpha}{2}(1-\xi^{-2})$.

$$\mathbf{\frac{1}{2}\leqslant\chi\leqslant 1}.$$

$$\theta\equiv\theta_2=\frac{\alpha}{\xi}\operatorname{cht}n(\eta),\quad k^2=\frac{2\chi-1}{\chi},\ b^2=\chi,$$

$$\varkappa_0\rho_0s_0^2=3\alpha^2(\chi-1).$$

При $\chi\to 1$ имеем $\rho_0\to 0$, $\theta_2\rightrightarrows\left(1-\frac{1}{12}\lambda s_0^2\right)^{-1}$.

При $\chi > 1$ решения с $\rho s_0^2 > 0$ не существует.

2. $\lambda < 0$, $\chi \equiv \frac{1}{3}\lambda s_0^2 \alpha^2$, $s_0^2 > 0$, $\alpha^2 > 0$, $H^2 > 0$.

$$0 \leqslant \chi \leqslant \infty.$$

$$\theta \equiv \theta_3 = \frac{\alpha}{\xi}\left(\frac{\operatorname{sn}(\eta)}{dn(\eta)}\right), \quad k^2 = \frac{1+\chi}{1+2\chi}, \quad b^2 = 1 + 2\chi,$$

$$\rho = \rho_0 \alpha^{-4}\left(\frac{dn(\eta)}{\operatorname{sn}(\eta)}\right)^4, \quad \varkappa_0 \rho_0 s_0^2 = 3\alpha(1+\chi).$$

В пределе $\lambda \to 0$ имеем $\theta_3 \to \frac{\alpha}{2}(1 - \xi^{-2})$.

$$1 < \chi \leqslant \infty.$$

$$\theta \equiv \theta_4 = \frac{\alpha}{\xi}\operatorname{cn}(\eta), \quad k^2 = \frac{\chi}{2\chi - 1}, \quad b^2 = 2\chi - 1,$$

$$\varkappa_0 \rho_0^2 s_0^2 = 3\alpha(\chi - 1).$$

В пределе $\chi \to 1$, $\rho_0 \to 0$ имеем $\theta_4 \to \left(1 + \frac{1}{12}\lambda s^2\right)^{-1}$. Решения с $\rho s_0^2 < 0$ рассмотренного уравнения находятся аналогичным образом и при желании их нетрудно выписать. При преобразовании $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ получаем

$$\theta_1 \leftrightarrow \theta_3, \ 0 \leqslant |\chi| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{13}$$

$$\theta_2 \leftrightarrow \theta_3, \ \frac{1}{2} \leqslant |\chi| \leqslant 1. \tag{13'}$$

Обычно о расширении пространства судят по сдвигу частот дискретного спектра. В случае мира, заполненного только фотонным газом, ввиду отсутствия источников и приемников дискретного спектра обычное понимание расширения пространства не приемлемо. Однако если по аналогии со случаем пылевидной материи, расширение или сжатие пространства определить по $\varepsilon_j = \operatorname{sign} h_j$,

где $h_j = \frac{1}{\theta_j}\frac{d\theta_j}{d\xi}$, то

$$\varepsilon_4 = b_4 \operatorname{th} n(\eta_4), \quad \varepsilon_3 = b_3 \operatorname{cth} n(\eta_3),$$

$$\varepsilon_j = \frac{b_j}{\operatorname{cn}(\eta_j)\operatorname{sn}(\eta_j)}, \quad j = 1, 2.$$

При этом по формуле (13) имеем

$$\sqrt{1-\chi} = \frac{\eta_1}{\ln\xi} \leftrightarrow \sqrt{1+2\chi} \equiv \frac{\eta_3}{\ln\xi} \neq \frac{\eta_1}{\ln\xi},$$

$$\frac{\eta_1}{K(k_1)} \leftrightarrow \frac{\eta_3}{K(k_3)} \neq \frac{\eta_1}{K(k_1)}$$

и для значения ξ в интервале:

$$K(k_3) < \left\{\frac{\sqrt{1+2\chi}}{K(k_3)} - \frac{\sqrt{1-\chi}}{K(k_1)}\right\}\ln\xi < K(k_1)$$

получаем $\varepsilon_1 \longleftrightarrow \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$. Аналогично и в (13′).

§ 3. Случай пылевидной материи ($m=5$, $a=0$, $p=0$), т. е. собственной задачи Фридмана

Случай $p=0$ подробно исследован Фридманом. При этом Фридман подбирал временную координату τ из уравнения $d\tau=Hdt$, и поэтому координаты τ, x, y, z в рассмотрении Фридмана неравноправны. Полученные при этом уравнения более сложны, чем в случае комформно-галилеевой метрики, и решения не были даны в аналитическом виде. Метрику Фридмана (координаты η, χ), как известно, путем преобразования [2] Ae^{η}, $th\eta\chi=\frac{r}{ct}$ можно привести к метрике (КГП). Так как в случае (КГП) уравнения Эйнштейна при $p=0$ имеют относительно несложные решения, то рассмотрение задачи Фридмана представляет интерес и с точки зрения возможности получения точных решений в аналитическом виде.

В случае $m=5$, $a=0$ из (6) и (7) получаем

$$\theta''+\frac{2}{\xi}\theta'-3\lambda_5\theta^5=0,\ H=\theta^2,\ \lambda_5=\frac{1}{12}\lambda s_0^2,$$

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{\xi}}z(\eta),\ \eta=b\ln\xi,\ \rho=\rho_0 z^{-6}(\eta), \tag{14}$$

$$\varkappa_0\rho_0 s_0^2\equiv 12c_1b^2\equiv 12c_0,\ z_\eta^2-\frac{b^{-2}}{4}z^2-\frac{b^{-2}}{4!}\lambda_5 z^4=c_1\equiv b^{-2}c_0.$$

В частном случае $\lambda=0$ и $\rho\neq 0$ имеем

$$\theta=\alpha\left(1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-1}\right),\ \varkappa_0\rho s_0^2=12\left|\frac{\beta}{a}\right|\left\{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\xi^{-1}\right\}^{-6}.$$

Уравнение (14) путем подстановки $z=y^{1/2}$ сводится к уравнению

$$\left(\frac{dy}{d\ln\xi}\right)^2=\lambda_5y^3+y^2+4c_0y. \tag{15}$$

Решение, допускающее предельный переход $\lambda\to 0$, но не допускающее переход $\rho_0\to 0$, получаем путем подстановки

$$y=\frac{12c_0}{\wp-1},\ \theta=\frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\frac{12c_0}{\wp-1}\right), \tag{15'}$$

где $\wp(u)$ — функция Вейерштраса;

$$\wp_0^2=4\wp^3-g_2\wp(u)-g_3\equiv 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3)\equiv 4P_3(\wp),$$

$$u\equiv\frac{1}{\sqrt{12}}\ln\xi,\ g_2=12,\ g_3=-8(1+\chi),\ \chi\neq 18\lambda s_0^2c_0^2. \tag{16}$$

$$P_3(\wp)\equiv\wp^3+3P\wp+2q,\ p=-1,\ q=(1+\chi).$$

$e_1>e_2>e_3$ — корни уравнения $P_3\wp=0$.

Выражения для ρ и H запишутся:

$$H=\frac{12c_0}{\xi(\wp-1)},\ \rho\varkappa_0 s_0^2=(12c_0)^{-2}(\wp-1)^3,$$

$$\rho H^2=(\varkappa_0 s_0^2\xi^2)^{-1}(\wp-1).$$

В случае $\rho s_0^2 > 0$ имеем $\mathfrak{x} > 1$, $H^2 > 0$; $\mathfrak{x} < 0$, $H^2 < 0$. При этом

$$h = \frac{1}{H}\frac{dH}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}\left\{1 + \frac{1}{12}\frac{\mathfrak{x}_u}{\mathfrak{x}-1}\right\},\quad \mathfrak{x}_u \equiv \frac{d\mathfrak{x}(u)}{du}\ . \tag{17}$$

Из $h(\mathfrak{x}^*(u)) = 0$ находим

$$(\mathfrak{x}^* - 1)^3 = -2(1+\chi),\ \mathfrak{x}^* < 1 - \{2(1+\chi)\}^{1/3}.$$

Таким образом, при $\chi = -1$, $\mathfrak{x}^* = 1$; $\chi = -1$, $\mathfrak{x}^* > 1$; $\varkappa > -1$, $\mathfrak{x}^* < 1$. При $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, $(c_0^2 \leftrightarrow -c_0^2)$ имеем

$$\mathfrak{x}^*(\lambda > 0) \equiv 1 - \{2(1+\chi)\}^{1/3} \leftrightarrow 1 - \{2(1+\chi)\}^{1/3} \equiv \mathfrak{x}^*(\lambda < 0). \tag{18}$$

При переходе через значения $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*$ величина $h(\mathfrak{x}(u))$ меняет знак (расширение переходит в сжатие или наоборот).

Когда $D \equiv p^3 + q^2 \leqslant 0$, т. е. $\chi(2+\chi) \leqslant 0$, $-2 < \chi < 0$, имеем

$$\mathfrak{x}\left(\frac{v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2(v, k)},\quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

$$v = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{12}}\ln\xi.$$

При этом решение с $\rho s_0^2 > 0$ существует только при условии

$$c_0^2 > 0,\ \lambda < 0,\ H^2 > 0,\ \mathfrak{x} > 1.$$

$$c_0^2 < 0,\ \lambda > 0,\ H^2 < 0,\ \mathfrak{x} < 0.$$

Таким образом, преобразование $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ при условии, чтобы решения оставались в классе $D \leqslant 0$, $\rho s_0^2 > 0$, требует $H^2 \leftrightarrow -H^2$.

В частности, при $D = 0$, т. е. $-p^3 = q^2 = 1$, имеем

$$q = 1,\ (\chi = 0),\ (\lambda = 0),\ e_1 = e_2 = 1,\ e_3 = -2,$$

$$\mathfrak{x}(u) = -2 + 3\,\mathrm{cth}^2(\ln\xi^{1/2}),\ \mathfrak{x} - 1 = 3\,\mathrm{sh}^{-1}(\ln\xi^{1/2}),$$

$$H = \frac{12c_0}{\xi}\mathrm{sh}^2(\ln\xi^{1/2}) = 3c_0(1 - \xi^{-1})^2,$$

т. е. при $\lambda \rightleftarrows 0$ получаем правильный предельный переход:

$$q = -1,\ \chi = -2,\ e_1 = 2,\ e_2 = e_3 = -1$$

$$\mathfrak{x}(u) = -1 + 3\sin^{-2}(\ln\xi^{1/2}),\ H = \frac{12c_0}{\xi}\,\frac{\sin^2(\ln\xi^{1/2})}{1 + 2\cos^2(\ln\xi^{1/2})}.$$

В случае $D > 0$ имеем $e_1^* = e_1$ — комплексные корни, e_2 — действительный корень. При этом $\mathfrak{x}(u)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{x}\left(\frac{W}{A}\right) = e_2 + A^2\frac{1 + \mathrm{cn}(2W, k)}{1 - \mathrm{cn}(2W, k)},\quad A^4 = 9\alpha^2 + \beta^3 \equiv 3(u^2 + v^2 + 1),$$

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{A},$$

$$W = \frac{A}{\sqrt{12}}\ln\xi,\ e_2 = u + v;\ \alpha = -\frac{e_2}{2},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v),\ u^3 = -q + D^{1/2},\ v^3 = -q - D^{1/2},$$

$$D = \chi(2+\chi),\ -q = 1 + \chi,\ \varkappa = 18\lambda s_0^2 c_0^2.$$

В данном случае следует отличать три возможности.

$\chi > 2$. Решения с $\mathfrak{x} s_0^2 > 0$ существуют только при а) $c_0^2 > 0$, $\lambda > 0$, $H^2 > 0$, $\mathfrak{x} > 1$ и б) $c_0^2 < 0$, $\lambda < 0$, $\mathfrak{x} < 1$, $H^2 < 0$. Так как $\mathfrak{x}^* < 1$, то h в случае б может менять знак, а в случае a нет ($\mathfrak{x} > \mathfrak{x}^* > 1$).

$\chi < -2$. Решения с $\rho s_0^2 > 0$ существуют только при а) $c_0^2 < 0$, $\lambda > 0$, $\mathfrak{x} < 1$, $H^2 < 0$ и б) $c_0^2 > 0$, $\mathfrak{x} < 0$, $\gamma < 1$, $H^2 < 0$. Теперь $\mathfrak{x}^* > 1$, то h в случае б ($\mathfrak{x} > 1$) может менять знак, а в случае а ($\gamma < 1$) нет. Для того чтобы решения при преобразовании $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ оставались в классе $D > 0$, $\chi < -2$, необходимо $H^2 \leftrightarrow -H^2$.

Рассмотрим преобразование $\chi \leftrightarrow -\chi$, т. е. такое преобразование параметров, при котором решение из класса $D > 0$, $\chi > 2$ переходит в решение класса $D > 0$, $\chi < -2$. Имеются два типа таких преобразований: а) $\lambda \leftrightarrow \lambda$, $c_0^2 \leftrightarrow -c_0^2$, $H^2 \leftrightarrow -H^2$, б) $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, $c_0^2 \leftrightarrow c_0^2$, $H^2 \leftrightarrow H^2$.

В частности, для нас представляет интерес случай

$$\{\lambda > 0,\ H^2 > 0,\ \gamma > 1 > \gamma_1^*\} \leftrightarrow \{\lambda < 0,\ H^2 > 0,\ \gamma > 1\},$$

где h — в первом случае монотонна, а во втором — может менять знак.

Таким образом, при $|\chi| > 2$, $\rho s_0^2 > 0$, $H^2 > 0$ преобразование $\lambda \leftrightarrow \lambda$ дает переход сжатие $\leftrightarrow$ расширение при условии

$$\mathfrak{x}(u_1) \leftrightarrow \mathfrak{x}(u_2),\ \mathfrak{x}(u_1,\ D > 0, \chi > 2) > \mathfrak{x}^*(\chi > -1),$$

$$\mathfrak{x}(u_2, D > 0,\ \chi < -2) < \mathfrak{x}^*(\chi < -1)$$

или обратное направление неравенства). При этом $\gamma(u_1)$ берется из решения класса $D > 0$, $\chi > 2$, а $\gamma(u)$ из $D > 0$, $\chi < -2$.

$0 < \chi < 2$. Решения с $\rho s_0^2 > 0$ существуют при тех же условиях, что при $\chi > 2$ и преобразование $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, как и в случае $\chi > 2$ при $\rho s_0^2 > 0$ требует $H^2 \leftrightarrow -H^2$. Однако возможно и преобразование $\chi \leftrightarrow -\chi$. Последнее переводит решения класса $D > 0$, $0 < \chi < 2$ в решения класса $D < 0$, $0 > \chi > -2$. При этом возникают те же возможные преобразования, что в предыдущем случае. В частности, преобразование $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ дает переход расширение $\leftrightarrow$ сжатие при условии $\mathfrak{x}(u_1) \leftrightarrow \mathfrak{x}(u_2)$

$$\mathfrak{x}(u_1, D > 0, \chi > 0) > \mathfrak{x}(\chi > -1),$$

$$\mathfrak{x}(u_2, D < 0,\ 0 > \chi > -2) < \mathfrak{x}^*(\chi < -1)$$

(или обратное направление неравенств). Поскольку при этих условиях $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, $H^2 \leftrightarrow H^2$ имеем $h(\chi < 0) \leftrightarrow -h(\chi > 0)$, то в приближении $h \approx \mathrm{const}$ соответствующую метрику, как и в предыдущем случае, можно написать в виде

$$H \approx 1 + h(\lambda)\xi \approx 1 + \lambda \left| \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right| \xi + \ldots$$

Решения, допускающие предельный переход $\rho_0 \to 0$, но не допускающие $\lambda \to 0$, получим из (15) путем подстановки

$$y = \mathfrak{x} - \frac{1}{3\lambda_5},\ \lambda_5 = \frac{1}{12}\lambda s_0^2.$$

При этом приходим к (16) с параметрами

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u),\ u = \sqrt{\frac{\lambda_5}{4}}\ln\xi,\ g_2 = -\frac{4}{\lambda_5}\left(4c_0 - \frac{2}{3\lambda_5}\right),$$

$$g_3 = \frac{4}{\lambda_5}\left\{4c_0 - \frac{1}{3\lambda_5} + \frac{1}{g\lambda_5^2}\right\}\left(\frac{1}{3\lambda_5}\right).$$

Решения можно проанализировать аналогично предыдущему случаю.

§ 4. Случай феноменологического уравнения состояния $p=\rho$ [7].

Рассмотрим случай максимально жесткого (феноменологического) уравнения состояния $p=\rho$, $m=2$, $a=3$.

Из (6)—(9) при $m=2$, $a=3$ получаем

$$\theta'' + \frac{5}{\xi}\theta' + \frac{2}{3}\lambda_2\theta^2 = 0,\ H = \theta^{1/2},\ \lambda_2 = 3\lambda s_0^2,$$

$$\theta = \frac{1}{\xi^2}z(\eta),\ \eta = b\ln\eta,\ \rho = \rho_0 z^{-3}(\eta),$$

$$\rho_0 s_0^2 \varkappa_0 = \frac{3}{4}c_1 b^3 = \frac{3}{4}c_0,$$

$$z_\eta^2 - 4b^{-2}z^2 - \frac{4}{9}\lambda_2 b^{-2}z^3 = c_1 \equiv c_0 b^{-2}. \tag{19}$$

Уравнение (19) путем подстановки $z = \frac{3}{4\lambda_2}(\mathfrak{x} - 4)$ можно свести к (16) с теми же значениями u и g_2. Однако для g_3 теперь будем иметь:

$$g_3 = -8 \times 16\left\{1 + \frac{3}{4}c_0(\lambda s_0^2)^2\right\}.$$

Таким образом, получаем

$$H^2 = \frac{3}{4\lambda_2}\frac{1}{\xi^2}(\mathfrak{x} - 4),\ \ \rho = \rho_0\left(\frac{4\lambda_3}{3}\right)^3(\mathfrak{x} - 4)^{-3}.$$

Для h $\mathfrak{x}^*$ опять получаем уравнения, аналогичные (17) и (18), $\mathfrak{x}(u)$ теперь зависит только от λ^2, однако можно исследовать поведение решения при преобразовании $\chi \leftrightarrow -\chi$, где $\chi \sim \lambda^2 c_0$.

Рассматривая $\mathfrak{x}$ как функцию ξ и χ, можно установить связь между решением при $p=0$ и $p=\rho$.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что решения (и плотность энергии) в этих двух приведенных крайних случаях по давлению связаны друг с другом фактически обратными преобразованиями ($\rho_{\text{фрид}} \sim 1/\rho_{p=\rho}$). Тем самым, за исключением точек $\mathfrak{x}=1$, $\mathfrak{x}=4$, полюса собственной задачи Фридмана соответствуют нулю «жесткого уравнения состояния» и наоборот. Это дает основания надеяться, что в реальных задачах (случай, не поддающийся точному аналитическому решению) результаты будут свободны от таких особенностей.

§ 5. Случай смеси фотонного газа с пылевидной материей

Рассмотрим, наконец, случай $m=4$, $a=1/3$. Как уже было сказано, это соответствует уравнению состояния смеси фотонного газа с пылевидной материей с концентрацией $\rho_{\text{част}}/\rho_{\text{фот}}=2$.

С физической точки зрения подобное состояние является более реалистичным, чем рассмотренные ранее случаи уравнения состояния. Из (6)—(9) при $m=4$, $a=1/3$ находим

$$\theta'' + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\xi} \theta' - \frac{5}{2} \lambda_4 \theta^4 = 0; \ H = \theta^{3/2}; \ \lambda_4 \equiv \left(\frac{4}{27}\right) \lambda s_0^2,$$

$$\theta = \frac{1}{\xi^{2/3}} Z(\eta),$$

$$\rho = \rho_0 Z^{-5}(\eta); \ \rho_0 s_0^2 \varkappa_0 = \frac{27}{4} c_1 b^2 \equiv \left(\frac{27}{4}\right) c_0,$$

$$\eta = \ln \xi,$$

$$Z_\eta^2 - \frac{4}{9} b^{-2} Z^2 - b^{-2} \lambda_4 Z^5 = c_1 = c_0 b^{-2}. \tag{20}$$

К сожалению, (20) не поддается точному аналитическому решению в эллиптических функциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Теория пространства времени и тяготения. М., Гостехиздат, 1955.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
3. Фридман А. «Усп. физич. наук», **80**, 439, 1963.
4. Брежнев В. С. «Астрон. журн.», **40**, 280, 1963.
5. Курдгелаидзе Д. Ф. ЖЭТФ, **47**, № 12, 1864, 1964; Иваненко Д. Д., Курдгелаидзе Д. Ф. Препринт (Ужгород) 1965.
6. Умедзова Квантовая теория поля. М., ИЛ, 1958.
7. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С. «Астрофиз. журн.», 38, 785, 1961; Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, **41**, 1609, 1961.

Поступила в редакцию
22. 6 1965 г.

Кафедра
теоретической физики