Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1967

УДК 530.145.6

И. М. ТЕРНОВ, А. М. ХАПАЕВ, Ю. И. КЛИМЕНКО

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Рассматриваются решения уравнения Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны, разделенные по состояниям поляризации электронного спина. В качестве приложения найденных решений рассматривается задача о комптон-эффекте рассеяния света на движущемся поляризованном электроне.

Волновые функции электрона в поле плоской электромагнитной волны

Задача о движении электрона в поле плоской электромагнитной волны была рассмотрена Д. Волковым [1, 2]. Решение уравнения Дирака

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-c\vec{\alpha}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)-\rho_3 mc^2\right\}\Psi=0$$

для случая, когда потенциал $\vec{A}$ зависит от переменной $\varphi=t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}$, согласно закону $\vec{A}=\vec{a}f_1(\varphi)+\vec{b}f_2(\varphi)$, ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные векторы, ортогональные к единичному вектору $\vec{n}$, характеризующему направление распространения волны $\vec{a}\vec{n}=\vec{b}\vec{n}=\vec{a}\vec{b}=0$, f_1 и f_2 произвольные функции) может быть представлено в виде

$$\Psi_k=\left\{1+\frac{e}{2\mu c}(\vec{\alpha}\vec{A})(1-\vec{\alpha}\vec{n})\right\}e^{-\frac{i}{\hbar}(cKt-\vec{k}\vec{r}+f(\varphi))}\Psi_0. \tag{1}$$

В этой формуле

$$f=\frac{e}{\mu}\int_0^{\varphi}\vec{A}\vec{k}\,d\varphi+\frac{e^2}{2\mu c}\int_0^{\varphi}A^2\,d\varphi, \tag{2}$$

$\mu=\frac{E}{c}-\vec{n}\vec{k}$, а Ψ_0 — произвольный спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака для свободной частицы:

$$\{K-\vec{\alpha}\vec{k}-\rho_3 k_0\}\Psi_0=0. \tag{3}$$

Для последовательного описания спиновых свойств электрона представляется целесообразным разделить решения (1) по состояниям поляризации электронного спина. Такое разделение решений требует введения дополнительного оператора поляризации, коммутирующего с гамильтонианом и обладающего необходимыми ковариантными свойствами.

Для случая, когда плоская электромагнитная волна линейно поляризована, $\vec{A}=\{0, A, 0\}$ в качестве оператора поляризации удобно взять пространственные составляющие четыре-вектора поляризации T_μ [3], точнее проекцию $\vec{T}$ на направление магнитного поля волны (т. е. на ось x в предположении, что волна распространяется по оси z):

$$\frac{(\vec{T}\vec{H})}{H} = T_1 = m\rho_3\sigma_1 + \rho_1\rho_1.$$

(В дальнейшем для упрощения записи мы полагаем $c=\hbar=1$.) Тогда спиновая матрица Ψ_0 может быть определена путем совместного решения уравнения (3) и уравнения $(m\rho_3\sigma_1+k_1\rho)\Psi_0=\zeta\lambda\Psi_0$.

Коэффициенты c_μ, составляющие матрицу $\Psi_0 = N\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$, имеют при этом вид:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\bar{A}\sqrt{1-\zeta k_1/\lambda} + \bar{B}\sqrt{1+\zeta k_1/\lambda}\right\}, \\
C_2 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{2}}\left\{\bar{A}\sqrt{1+\zeta k_1/\lambda} + \bar{B}\sqrt{1-\zeta k_1/\lambda}\right\}, \\
C_3 &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left\{\bar{A}\sqrt{1-\zeta k_1/\lambda} - \bar{B}\sqrt{1+\zeta k_1/\lambda}\right\}, \\
C_4 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{2}}\left\{\bar{A}\sqrt{1+\zeta k_1/\lambda} - \bar{B}\sqrt{1-\zeta k_1/\lambda}\right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\bar{A} = \sqrt{1-k_3/K}e^{i\zeta\Phi/2}, \quad \bar{B} = \sqrt{1+k_3/K}e^{-i\zeta\Phi/2}, \tag{5}$$

$\Phi = \operatorname{arctg} k_2/\lambda$, $\lambda = \sqrt{m^2+k_1^2}$, а $\zeta = \pm 1$ соответствует двум состояниям поляризации спина электрона. При этом из условия нормировки функции

$$\int \Psi_k^+\Psi_k\, d^3x = 1, \tag{6}$$

коэффициент N равен

$$N = L^{-3/2}\left[\frac{\vec{k}^2+m^2+\mu^2}{\vec{k}^2+m^2(1+\xi^2)+\mu^2}\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Таким образом, в наших предположениях окончательно получаем

$$\Psi_k = \left\{1 + \frac{eA}{2\mu}\alpha_2(1-\alpha_3)\right\} e^{-i(\mu t-\vec{k}\vec{r}-k_3\varphi+f(\varphi))}\Psi_0. \tag{8}$$

Здесь $\vec{k} = \{k_1 k_2 0\}$ двухмерный вектор-импульс, а

$$\xi^2 = \frac{e^2}{m^2}\frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} A^2\, d\varphi = \frac{e^2\bar{A^2}}{m^2}$$

среднее значение квадрата амплитуды вектор-потенциала. В отличие от решений (1) формулы (8) и (4)—(7) дают полное описание состояний поляризации электронного спина. Такое разделение оказывается возможным для случая линейно-поляризованной волны, остальные случаи поляризации мы рассматривать не будем.

Комптон-эффект на движущемся электроне с учетом поляризационных свойств

Найденные решения уравнения Дирака позволяют рассмотреть комптон-эффект на движущихся поляризованных электронах при любых значениях напряженности поля электромагнитной волны. Подобная задача решалась ранее рядом авторов [4, 5, 6], при этом было показано, что в такой постановке задачи можно рассмотреть комптон-эффект при одновременном поглощении нескольких фотонов и испускании одного кванта света. В частном случае, когда число поглощаемых фотонов $n=1$, интенсивность волны очень мала и электрон покоится, результат для дифференциального сечения рассеяния должен переходить в известную формулу Клейна—Нишины (см. [12]). С помощью волновых функций (4)—(8) можно включить в рассмотрение эффекта Комптона спин-электрон. Заметим, что для случая покоящегося электрона попытка рассмотреть спиновые эффекты была предпринята в [4].

Рассматривая взаимодействие электрона с квантованным полем излучения (см., например, [8]), можно получить следующее выражение для вероятности квантовых переходов электрона в единицу времени:

$$dw = \frac{e^2}{2\pi}\int\frac{d^3\varkappa}{\varkappa}\,\delta\,[\mu-\mu'+\varkappa-\varkappa_3]\,S = \frac{e^2}{2\pi}\,\frac{\varkappa\,d\varkappa}{d\,(\mu+\varkappa-\varkappa_3)}\,S\,d\Omega. \qquad (9)$$

Величина S соответствует двум компонентам линейной поляризации $S=S_2+S_3$. Для определения компонентов линейной поляризации мы разбиваем амплитуду вектор-потенциала $\vec{a}$ на составляющие $\vec{a}=g_2\vec{\beta}_2+ +g_3\vec{\beta}_3$, в которых векторы

$$\vec{\beta}^2 = \frac{[\vec{\varkappa}^0\vec{j}]}{\sqrt{1-(\vec{\varkappa}^0\vec{j})^2}}, \quad \vec{\beta}_3 = \frac{(\vec{\varkappa}^0\,\vec{j})\,\vec{\varkappa}^0-\vec{j}}{\sqrt{1-(\vec{\varkappa}^0\vec{j})^2}}$$

ортогональны друг другу и направлению распространения фотона $\vec{\varkappa}^0=\vec{\varkappa}/\varkappa$. Произвольный единичный вектор $\vec{j}$ мы направляем по магнитному полю, тогда

$$S_2 = (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)^{-1}\,\{|\bar{\alpha}_2|\cos\theta-|\bar{\alpha}_3|\sin\theta\sin\varphi\}^2,$$

$$S_3 = (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)^{-1}\,\{|\bar{\alpha}_3|\sin\theta\cos\varphi+ \qquad (10)$$

$$+|\bar{\alpha}_2|\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi-|\bar{\alpha}_1|\,(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\}^2.$$

В этих формулах для волнового вектора выбрана сферическая система координат ($\varkappa$, θ, φ). Матричные элементы матриц Дирака α_μ имеют вид

$$\alpha_\mu = \int\Psi_k^+\,\alpha_\mu\,e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}-i\varkappa_3\varphi}\,\Psi_{k'}\,d^3x,$$

причем под $\varkappa=\{\varkappa\sin\theta\cos\varphi,\ \varkappa\sin\theta\sin\varphi\}$ понимается двухмерной вектор, лежащий в плоскости $z=0$. Штрихом обозначено начальное квантовое состояние.

Для определения круговой поляризации (см. [9]) имеем

$$S_l = \frac{1}{2}\,[S_2 + S_3 - ilS^{(l)}],$$

$$S^{(l)} = (\bar{\alpha}_1^+ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2^+ \bar{\alpha}_1)\cos\theta + (\bar{\alpha}_3^+ \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1^+ \bar{\alpha}_3)\sin\theta\sin\varphi +$$
$$+ (\bar{\alpha}_2^+ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_3^+ \bar{\alpha}_2)\sin\theta\cos\varphi. \qquad (11)$$

При расчете матричных элементов матриц Дирака встречаются интегралы следующего типа:

$$\langle\hat{B}\rangle = \int \Psi_k^+ \hat{B}\, e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r} - i\varkappa_3\varphi}\, \Psi_{k'}\, d^3x =$$
$$= \frac{1}{L^3}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dx e^{i(k_1' - k_1 - \varkappa_1)x} \int\limits_{-L/2}^{L/2} dy e^{i(k_2' - k_2 - \varkappa_2)y} \times$$
$$\times \int\limits_{-L/2}^{L/2} d\varphi\, \Psi_0^+ \hat{B}\, \Psi_0\, e^{-i[(k_3 - k_3' + \varkappa_3)\varphi + f - f']} \qquad (12)$$

Здесь $\hat{B}$ — произвольный оператор, а f — функция от переменной φ, определенная соотношениями (2). Вычисление этого интеграла приводит к закону сохранения импульса по осям координат в плоскости xy

$$\langle\hat{B}\rangle = \delta_{k_1+\varkappa_1, k_1'}\, \delta_{k_2+\varkappa_2, k_2'}\, \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, \Psi_0^+ \hat{B}\Psi_0 \times$$
$$\times e^{-i[k_3 - k_3' + \varkappa_3]\varphi + f - f'}. \qquad (13)$$

Обозначая $(k_3 - k_3' + \varkappa_3)\,\varphi + f - f' = G$, представим интегралы в зависимости от $\hat{B}$ в следующем виде (см. также [5]):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{-iG}\{1;\ \gamma;\ \gamma\gamma'\} = \left\{\Gamma,\ \frac{m}{2\mu}Q;\ \frac{m^2}{4\mu\mu'}(U + \xi^2\Gamma)\right\}. \qquad (14)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{eA}{2\mu},\quad \gamma' = \frac{eA}{2\mu'},\quad \xi^2 = \frac{e^2\bar{A}^2}{m^2}.$$

Далее удобно предположить, что в начальный момент электрон двигался по оси z: $k_2' = k_1' = 0$, $k_3' \neq 0$. При излучении фотона по закону сохранения импульса (13) получаем $k_1 = -\varkappa\sin\theta\cos\varphi$, $k_2 = -\varkappa\sin\theta\sin\varphi$, а также $\varkappa_3 = \varkappa\cos\theta$, причем $\mu' = E' - k_3'$. Матричные элементы матриц Дирака согласно принятым обозначениям имеют вид

$$\bar{\alpha}_1 = A\zeta'\left\{(b\,d' e^{i\Phi/2} + \zeta\zeta'\, db' e^{-i\zeta\Phi/2})\,\Gamma + im\zeta\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'}\right) dd' e^{-i\zeta\Phi/2} Q\right\},$$

$$\bar{\alpha}_2 = -iB\zeta'\left\{(b\,d' e^{i\zeta\Phi/2} - \zeta\zeta'\, db' e^{-i\Phi/2})\,\Gamma + im\zeta\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) dd' e^{-i\zeta\Phi/2} Q\right\},$$
$$(15)$$

$$\overline{\alpha}_3 = B\Big\{(bb'\, e^{i\zeta\Phi/2} - \zeta\zeta'\, dd'\, e^{-i\zeta\Phi/2})\,\Gamma +$$

$$+ \frac{m^2}{\mu\mu'}\,\zeta\zeta'\, dd'\, e^{-i\zeta\Phi/2}\,(U + \zeta^2\Gamma) + im\left(\zeta\,\frac{db'}{\mu}\, e^{-i\zeta\Phi/2} - \zeta'\,\frac{bd'}{\mu'}\, e^{i\zeta/\Phi 2}\right) Q\Big\},$$

$$A = \frac{1}{4}\left[\sqrt{1 + \zeta k_1/\lambda} - \zeta\zeta'\sqrt{1 - \zeta k_1/\lambda}\right],\ d = \sqrt{1 - k_3/K},$$

$$B = \frac{1}{4}\left[\sqrt{1 + \zeta k_1/\lambda} + \zeta\zeta'\sqrt{\lambda - \zeta k_1/\lambda}\right.,\ b = \sqrt{1 + k_3/K}.$$

Из условия кратности изменения ξ при возрастании экспоненты на $2\pi/\varkappa'$ (см. [12] падающая волна монохроматическая с частотой $\varkappa'$).

$$\varepsilon = (k_3 - k_3' + \varkappa_3)\frac{2\pi}{\varkappa'} + f\left(\frac{2\pi}{\varkappa'}\right) - f'\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right) = 2\pi n$$

получаем следующее выражение для частоты излучаемых фотонов [5]:

$$\varkappa = \frac{2n\varkappa'\mu'}{\mu'(1 + \cos\theta) + [2n\varkappa' + m^2(1 + \xi^2)/\mu'](1 - \cos\theta)}. \tag{16}$$

$$\varkappa = \frac{2\varkappa'}{2\dfrac{\varkappa'}{E'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{E'}\right)^2}.$$

Величина $n=1,\ 2\ldots$, входящая в это выражение, характеризует количество падающих фотонов. При падении одного фотона при $n=1$ получим рассеяние также в виде излучения одного фотона.

В случае $n=1$ для угла $\theta=\pi$ в предположении достаточно слабого поля электромагнитной волны ($\xi\to 0$) можно получить известный результат изменения частоты при рассеянии света на движущемся электроне [10] $\varkappa = \dfrac{2\varkappa'}{2\dfrac{\varkappa'}{E'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{E'}\right)^2}$.

Полагая далее $-e_0 A = \sqrt{2}\,\xi m \cos\varkappa'\varphi$, можно получить $(k_3 - k_3' + \varkappa_3)\,\varphi + f - f' = nz + f_1 \sin z \sin\varphi + \eta \sin 2z$, где

$$f_1 = \frac{2\sqrt{2}\, nzq}{1 + \xi^2 + q^2},\quad \eta = \frac{n\xi^2}{2(1 + \xi^2 + q^2)},\ q = \frac{\mu'}{m}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Поэтому интегралы (14) принимают вид

$$\Gamma_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz e^{-i[nz + f_1 \sin z \sin\varphi + \eta \sin 2z]}\ (z = \varkappa'\varphi) \tag{17}$$

и

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi\,(\Gamma_{n+1} + \Gamma_{n-1}),\ U_n = \frac{1}{2}\,\xi^2\,(\Gamma_{n+2} + \Gamma_{n-2}). \tag{18}$$

Для определения вероятности переходов нам потребуется также найти производную, входящую в (9) при интегрировании с дельта-функцией

$$\frac{d}{d\varkappa}[\mu+\varkappa-\varkappa_3]=1-\cos\theta+\frac{d\mu}{d\varkappa}=\frac{(1-\cos\theta)\,m^2\,[1+\xi^2+q^2]}{\varkappa^2\sin^2\theta+m^2(1+\xi^2)+\mu^2}.$$

Тогда вероятность переходов принимает выражение

$$dw_n=\frac{e^2\varkappa\,(\mu'^2+m^2q^2)\,S^0}{4\pi m^2\mu'^2\,[m^2(1+\xi^2)+\mu^2]\,(1+\xi^2+q^2)}\,d\Omega, \tag{19}$$

где

$$S^0=(m^2+\mu'^2)\,(k_1^2+k_2^2+m^2+\mu^2)\,S,$$

а S определено формулами (10) и (11).

Чтобы получить, наконец, выражение для дифференциального сечения рассеяния, необходимо разделить вероятность (19) на плотность падающих фотонов:

$$j_z=\frac{\xi^2m^2\varkappa_n'}{4\pi e^2}(1-v').$$

Здесь v' — начальная скорость электрона, движущегося против оси z. Учитывая далее соотношение

$$\frac{\mu}{\mu'}=\frac{\varkappa}{n\varkappa'}\,\frac{m^2(1+\xi^2+q^2)}{(\mu'^2+q^2m^2)},$$

получаем окончательную формулу для дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega}=\frac{r_0^2\,(\varkappa/n\varkappa')^2\,m^2}{m^2\xi^2\,(1-v')\,[m^2\,(1+\xi^2)+\mu'^2]\,\mu\mu'}\,S^0, \tag{20}$$

где $r_0=e^2/m$ классический радиус электрона, а $\mu'=m\frac{\sqrt{1-v'}}{\sqrt{1+v'}}$.

С помощью (20), а также выражений для величин S (10) и (18) и вида матричных элементов матриц Дирака (15) задача о комптон-эффекте получает исчерпывающее решение с учетом спина электронов. Надо, однако, заметить, что анализ результатов, равно как и их запись, в общем случае достаточно сложны. К тому же, как уже было отмечено в [5], интегралы (17) и (18) в общем случае требуют численных методов анализа. Все общие выводы, касающиеся вероятности процессов (при $\xi\neq0$ и $\xi\gg1$), связанных с поглощением нескольких фотонов (см. [4, 5]), в смысле оценки порядка их величины, разумеется, не зависят от ориентации спина электрона.

Поэтому для иллюстрации роли спиновых эффектов ограничимся приведением результатов в некоторых простейших частных случаях.

Предположим, что поле электромагнитной волны не является слишком большим $\xi<1$, а также ограничимся случаем поглощения одного фотона. Рассмотрим в этих предположениях рассеяние в плоскости xz ($\varphi=0$, $\theta=\pi$). Тогда для величин, характеризующих линейную поляризацию излучения, получаем

$$\left.\begin{array}{l}S_2^0\\ S_3^0\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{m}{\lambda}\right)\left\{[(k_1^2+m^2)\,\mu'^2+m^2\mu^2\mp2\zeta\zeta'\,m\mu\mu'\,\lambda]\,\Gamma^2+m^2(\mu\pm\mu')^2Q^2\right\}.$$

При этом интегралы (17) и (18) приводятся к известным функциям Ангера (см. [11])

$$\Gamma_n=\frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2}dz e^{-i[nz+\eta\sin2z]}=\cos^2\frac{\pi n}{2}\,\bar{J}_{n/2}(-q)+$$

$$+\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\,\overline{E}_{n/2}(-q).$$

Используя далее свойство функций Ангера $\overline{J}_\nu(z) = \cos^2\nu\pi\, J_\nu(z)$, где J_ν — функция Бесселя, получаем, при $n = 1$, $\xi \ll 1$

$$\Gamma_n = U_n \equiv 0, \quad Q_n = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\,[\Gamma_{n-1} + \Gamma_{n+1}].$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{\xi^2}\,\frac{\varkappa}{\varkappa'}\,\frac{1}{2m^2\mu'^2}\,S^0,$$

где

$$S_2^0 = \frac{1}{2}m^2\xi^2(\mu+\mu')^2\{1+\zeta\zeta' m/\lambda\},$$

$$S_3^0 = \frac{1}{2}m^2\xi^2(\mu'-\mu)^2\{1-\zeta\zeta' m/\lambda\},$$

$\lambda = \sqrt{m^2 + \varkappa^2\sin^2\theta} = m$. В этих формулах всюду полагаем $\theta = \pi$, что соответствует излучению наиболее жестких квантов вперед по движению электрона. Поэтому окончательно имеем

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)\left(\frac{\mu'+\mu}{\mu'}\right)^2\frac{1+\zeta\zeta'}{2},$$

$$\frac{d\sigma_3}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)\left(\frac{\mu'-\mu}{\mu'}\right)^2\frac{1-\zeta\zeta'}{2}. \tag{21}$$

Из полученных результатов следует, что преимущественно будет излучаться тот же компонент линейной поляризации, что и в падающем излучении (σ_2). Для компонента σ_2 направление электрического вектора поля излучения при $\theta=\pi$ совпадает с начальным. При этом излучение σ_2 компонента происходит без изменения начальной ориентации электронного спина. Напротив, излучение σ_3 компонента происходит только при условии обращения спина электрона ($\zeta=-\zeta'$). Отношение дифференциальных сечений

$$\frac{d\sigma_3^{\uparrow\downarrow}}{d\sigma_2^{\uparrow\uparrow}} = \left(\frac{\mu'-\mu}{\mu'+\mu}\right)^2 = \eta = \left[\frac{\varkappa/2\varepsilon_1}{1-\varkappa/2\varepsilon_1}\right]^2 \tag{22}$$

$$\left(\text{здесь } \mu' = m\sqrt{\frac{1+|v'|}{1-|v'|}} \cong \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\varepsilon_1 \text{ и } \mu'-\mu = 2\varkappa\right)$$

показывает, что для не слишком жестких рассеянных квантов $\varkappa<\varepsilon_1$ поляризация при рассеянии сохраняется без изменений. Однако для вылетающих жестких квантов, когда $\varkappa/2\varepsilon_1$ заметно отлично от нуля, поляризационный компонент σ_3 также должен наблюдаться, причем это излучение может происходить только при условии обращения спина.

Формулу (22) можно с помощью (16) выразить через частоту падающего излучения $\eta = \varkappa' \Big/ \left(\varkappa' + \frac{m^2}{\mu'}\right)$. Для нерелятивистских электронов величина $\eta \to 1$, если только $\hbar\varkappa' \sim mc^2$, т. е. для очень жестких падающих квантов света. В случае релятивистских электронов

$$\eta = 1\Big/\left(1 + \frac{m}{2\varkappa'}\sqrt{1-\beta^2}\right).$$

Поэтому при $2c\hbar\varkappa' \sim mc^2(mc^2/E)\eta \to \frac{1}{2}$, т. е. проявление квантовых переходов с обращением спина становится существенным.

Суммирование формул (21) по спиновым состояниям приводит в случае покоящегося электрона $v'=0$ к известным результатам [12].

Рассмотрим, наконец, круговую поляризацию излучения (см. (11)):

$$S_0^{(l)} = 2im\zeta' \{\mu'(k_1^2 + k_2^2)\Gamma + (\mu' - \mu)[(m^2(1+\xi^2) - \\ - \mu\mu')\Gamma + m^2U]\sin\theta + 2mk_2\mu'Q\}\Gamma\sin\theta\cos\varphi.$$

Выбирая значения углов $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (при этих значениях зависимость круговой поляризации от спинов электрона и фотона приближается к максимальной), получаем при $n=1$ и $\xi \ll 1$

$$S_0^{(l)} = \sqrt{2}\, i\zeta' m\varkappa \left\{\frac{q}{1+q^2}(\mu'\varkappa + m^2 - \mu\mu') - m\mu'\right\}\frac{q}{1+q^2},$$

где $q = \frac{\mu'}{m}$. В зависимости от скорости электрона величина круговой поляризации меняется, в частности при $q=1$ (покоящийся электрон) получаем

$$\frac{d\sigma^{(l)}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^2\left\{\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - 1\right\}\left\{1 + \frac{\zeta' l}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{\varkappa}{\varkappa'} - 1}{\frac{\varkappa}{\varkappa'} + \frac{\varkappa'}{\varkappa} - 1}\right\},$$

где $l=1$ соответствует правой, а $l=-1$ — левой круговой поляризации. Эта формула совпадает с результатами работы [13]. В случае электронов, движущихся с большой скоростью $q \gg 1$, получаем

$$\frac{d\sigma^{(l)}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)\left\{1 - \frac{\zeta' l}{\sqrt{2}}\,\frac{m\varkappa}{\mu'^2}\right\}.$$

Поскольку отношение $(m\varkappa/\mu'^2) \ll 1$, то вклад членов, зависящих от ζ' и l, очень мал.

Заметим, что аналогичный расчет для случая поглощения двух фотонов ($n=2$) практически не меняет этого вывода, однако полная величина сечения становится очень малой

$$\frac{d\sigma_l}{d\Omega} = \frac{13r_0^2}{16}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^2\frac{m^2}{\mu\mu'}\left(1 - \frac{20}{13\sqrt{2}}\zeta' l\,\frac{m\varkappa}{\mu'^2}\right)\xi^2.$$

В заключение авторы благодарят проф. А. А. Соколова за дискуссию результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volkov D. M. Zs. Phys., **94**, 250, 1935.
2. Волков Д. М. ЖЭТФ, **7**, 1286, 1937.
3. Bargmann V., Vigner E. P. Proc. Nat. Acad. Sci., VS **31**, 211, 1948.
4. Альперин М. ЖЭТФ, **14**, 3, 1944.
5. Гольдман И. И. ЖЭТФ, **46**, 1412, 1964.
6. Галицкий В. М., Яковлев В. П. Препринт. Новосибирск, 1964.
7. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.
8. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
9. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, **31**, 473, 1956.
10. Арутюнян Ф. Р., Туманян В. А. ЖЭТФ, **44**, 2100, 1963.
11. Erdely A., Magnus W., Oberthettinger F., Tricomi F. Nig her Transcendental Functions. N. Y., 1953.
12. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М., ИЛ, 1956.
13. Соколов А. А., Лысов Б. А. ЖЭТФ, **34**, 1351, 1958.

Поступила в редакцию
29. 6 1965 г.

Кафедра
теоретической физики