Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1967

УДК 530.12

Ю. П. ПЫТЬЕВ

ПЯТИМЕРНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СХЕМА (III)

Предложено исследование пятимерного пространства относительности.

В работе рассматриваются динамические переменные частицы в общем случае пятимерного пространства R_5. Используя неголономную систему координат, введенную в работе [1], удается построить динамические переменные в полной аналогии со случаем плоского пространства.

Далее рассматриваются уравнения движения, которые в случае тяжелого внешнего поля (в корпускулярной картине содержащего тяжелые частицы) описывают движение частицы с переменной массой покоя. Как следует из этих уравнений, R_5 является конфигурационным пространством, сопоставленным частице и зависящим от отношения констант взаимодействия с внешним полем *.

В заключение рассматривается случай нерелятивистского движения. Обсуждается вид потенциала тяжелого внешнего поля (в корпускулярной картине содержащего частицы определенной массы покоя), обобщающего потенциал Юкавы, и задача упругого и неупругого рассеяния на этом потенциале.

Вектор энергии—импульса—массы

Для случая плоского пятимерного пространства вектор энергии—импульса—массы частицы определяется следующими равенствами [2]:

$$P^{\sigma} = \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} = \left\{ m_0 c \frac{dx^0}{ds},\ m_0 c \frac{dx^1}{ds}, \ldots \pm m_0 c \right\}. \tag{1}$$

Здесь τ — некоторый канонический параметр вдоль мировой линии частицы, ds — элемент 4-длины мировой линии. Первые четыре компонента представляют вектор энергии—импульса частицы в обычной релятивистской схеме, модуль пятого компонента — скаляр в обычной релятивистской схеме — определяет массу покоя частицы. Ниже соответствующие динамические переменные будут получены в общем случае пятимерного пространства R_5.

---

* Аналогичная ситуация возникает при некоторых предположениях и в теории гравитации [4].

Определим вектор энергии—импульса—массы частицы в R_5 следующим равенством:

$$P^{\sigma}=\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}. \qquad (2)$$

Здесь τ — так же, как и в (1), канонический параметр вдоль мировой линии частицы (множитель пропорциональности, включенный в τ, определяется в задаче Коши для уравнений движения, рассмотренных в следующем параграфе). Физический смысл введенного вектора, однако, не так прозрачен, как в случае плоского пространства. Для выяснения физического смысла координат вектора (2) рассмотрим видимые

$$P^{(i)}=\lambda_{\sigma}^{(i)}P^{\sigma}=P^{i},\quad P_{(i)}=\lambda_{(i)}^{\sigma}P_{\sigma}=P_{i}-A_{i}P^{\sigma}A_{\sigma} \qquad (3)$$

и невидимые компоненты

$$P_{(4)}=\lambda_{(4)}^{\sigma}P_{\sigma}=A^{\sigma}P_{\sigma},\ P^{(4)}=\lambda_{\sigma}^{(4)}P^{\sigma}=P_{(4)} \qquad (4)$$

вектора $\vec{P}$, использовав построенную ранее неголономную систему координат [1]. Далее, так как $\vec{P}$ — изотропный вектор [2], из соотношения

$$G_{\sigma\mu}P^{\sigma}P^{\mu}=\left(G_{ik}-\frac{G_{i4}G_{k4}}{G_{44}}\right)P^{i}P^{k}+\left(\sqrt{G_{44}}\,P^{4}+\frac{G_{i4}}{\sqrt{G_{44}}}P^{i}\right)^{2}=0 \qquad (5)$$

находим

$$g_{ik}P^{i}P^{k}+(A_{\sigma}P^{\sigma})^{2}=g_{ik}P^{(i)}P^{(k)}+P_{(4)}P^{(4)}=0. \qquad (6)$$

Здесь $G_{\sigma\mu}$ — метрический тензор R_5, $g_{ik}=G_{ik}-A_iA_k$ — метрический тензор видимого мира, $A_{\sigma}=G_{\sigma 4}/\sqrt{G_{44}}$. Как следует из равенств (2—6), видимые компоненты P (или первые четыре контравариантные координаты (2)) представляют вектор энергии—импульса частицы в общей теории относительности, точнее, в кривом видимом мире; модуль невидимого компонента определяет массу покоя частицы $P_{(4)}=P^{(4)}=\pm m_0c$.

Таким образом, и в общем случае пятимерного пространства мы можем записать вполне аналогично случаю плоского пространства следующую систему равенств, выясняющих физический смысл вектора (2):

$$P^{(\sigma)}=\left\{m_0c\frac{dx^0}{ds},\ m_0c\frac{dx^1}{ds},\ \ldots\ \pm m_0c\right\}.$$

В отличие от равенства (1), здесь обычные компоненты вектора заменены на неголономные.

Что касается контравариантных видимых компонентов P, то для них имеют место равенства

$$P_{(i)}=g_{ik}P^{(k)}$$

и вторая группа соотношений (3), устанавливающая связь между ковариантными пятимерными и видимыми компонентами, представляет известные соотношения между компонентами обычного $P_{(i)}$ и канонического P_i импульсов (см. уравнения (12) и (13)). При этом, если метрические потенциалы $G_{\mu\sigma}$ не зависят от пятой координаты x^4, мы имеем дело со случаем заряженной частицы в электромагнитном и гравитационном полях. Потенциалы электромагнитного поля a_i связаны с A_i равенствами

$$A_iA_{\sigma}P^{\sigma}=\pm m_0cA_i=\pm\frac{e}{c}a_i,\quad i=0\div 3.$$

Здесь e — абсолютная величина электрического заряда частицы.

Остановимся на некоторых трансформационных свойствах вектора P. Рассмотрим прежде всего преобразования, соответствующие переходу к новой движущейся системе отсчета. Для простоты будет рассмотрен случай плоского видимого мира, т. е. $g_{ik}=g^{ik}=diag\ [-1111]$, когда введенный в [1] неголономный репер

$$\lambda^{\sigma}_{(0)} = (1000 - A_0/A_4), \ldots \lambda^{\sigma}_{(4)} = (00001), \tag{7}$$

$$\lambda^{(0)}_{\sigma} = (10000), \ldots \lambda^{(4)}_{\sigma} = (A_0 \ldots A_4)$$

становится ортонормированным — лоренцевым:

$$G^{\sigma\mu}\lambda^{(\alpha)}_{\sigma}\lambda^{(\beta)}_{\mu} = G^{(\alpha\beta)} = diag\,[-11111],$$

$$G_{\sigma\mu}\lambda^{\sigma}_{(\alpha)}\lambda^{\mu}_{(\beta)} = G_{(\alpha\beta)} = diag\,[-11111]$$

и таким образом может быть весьма просто связан с движущимся в R_5 наблюдателем. Для этого достаточно определить вектор скорости последнего равенством

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} = \lambda^{\mu}_{(0)}, \tag{8}$$

в котором $d\sigma$ — элемент длины мировой линии наблюдателя.

Локально видимый мир для каждого такого наблюдателя формируется компонентами $\lambda^{\mu}_{(0)} \div \lambda^{\mu}_{(3)}$ репера. Система отсчета, выделяющая в R_5 плоский видимый мир, в рассматриваемом случае задается системой неголономных лоренцевых реперов, связанных с движущимися в R_5 наблюдателями, мировые линии которых определены равенствами (8). Эту систему отсчета, относительно которой выше были определены динамические переменные частицы $P^{(\sigma)}$, выделим как неподвижную.

Рассмотрим далее систему отсчета, связанную с наблюдателями, движущимися относительно исходных. Реперы этих наблюдателей связаны с реперами (7) прежних наблюдателей равенствами

$$\lambda'^{(\beta)}_{\mu} = \Lambda^{(\beta)}_{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}_{\mu}, \quad \lambda'^{\mu}_{(\beta)} = \Lambda^{(\alpha)}_{(\beta)}\lambda^{\mu}_{(\alpha)}, \tag{9}$$

в которых $\Lambda^{(\beta)}_{(\alpha)}$ — матрица Лоренца. Динамические переменные частицы в новой системе отсчета могут быть получены по формулам

$$P'_{(\sigma)} = \lambda'^{\mu}_{(\sigma)}P_{\mu} = \Lambda^{(\alpha)}_{(\sigma)}\lambda^{\mu}_{(\alpha)}P_{\mu} = \Lambda^{(\alpha)}_{(\sigma)}P_{(\alpha)}.$$

Эти формулы аналогичны соответствующим формулам, обсуждавшимся в работе [2] в связи со случаем плоского пространства. В частности, если новые наблюдатели перемещаются лишь в направлении четвертой оси старых наблюдателей со скоростью $c\beta_4$, то

$$\Lambda^{(\alpha)}_{(\beta)} = \begin{pmatrix} 1/\gamma_4 & 0 & 0 & 0 & -\beta_4/\gamma_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_4/\gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 1/\gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \sqrt{1-\beta_4^2}.$$

Если, кроме того, в старой системе реперов частица не перемещалась вдоль направлений осей 0—3, то она не будет перемещаться по направлениям 0—3 и в новой системе реперов. Для ее динамических переменных находим

$$P'^{(4)} = \Lambda^{(4)}_{(\alpha)}P^{(\alpha)} = \frac{1}{\gamma_4}(P^{(4)} - \beta_4 P^{(0)}) = \pm\frac{m_0 c}{\gamma_4}(1 \mp \beta_4),\ P^{(4)} = \pm m_0 c,$$

$$P'^{(0)} = \Lambda^{(0)}_{(\alpha)}P^{(\alpha)} = \frac{1}{\gamma_4}(P^{(0)} - \beta_4 P^{(4)}) = \frac{m_0 c}{\gamma_4}(1 \mp \beta_4),\ P^{(0)} = m_0 c,$$

что уже было получено для случая плоского пространства в работе [2].

Подчеркнем, что результаты, полученные для динамических переменных в случае плоского пространства, удалось распространить на общий случай пространства R_5, введя неголономные преобразования локальных реперов (в отличие от точечных преобразований координат).

Остановимся также на группе точечных преобразований координат

$$x'^4 = \varphi(x^\sigma), \quad x'^i = x^i, \quad i = 0 \div 3. \tag{10}$$

Прежде всего нетрудно проверить, что $P_{(\sigma)}$ и $P^{(\sigma)}$— инварианты преобразования (10) *, т. е.

$$P'_{(\sigma)} = P_{(\sigma)}, \quad P'^{(\sigma)} = P^{(\sigma)}.$$

Как было подчеркнуто в работе [1], преобразование (10) не меняет внутренних свойств видимого мира, т. е. $g'_{ik} = g_{ik}$. С другой стороны, имеют место равенства

$$A'_i = A_i + A_4\varphi_i, \quad A'_4 = A_4\varphi_4, \quad \varphi_\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma},$$

в силу которых выбором функции φ всегда можно добиться выполнения равенства

$$A'_4 = A_4\varphi_4 = 1. \tag{11}$$

Равенство (11) не будет нарушено преобразованием (10), если $\varphi_4 = 1$, т. е. если ограничиться преобразованиями вида

$$x'^4 = x^4 + f(x^i),\ x'^i = x^i,\ i = 0 \div 3.$$

При этом

$$A'_i = A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad A'_4 = A_4 = 1.$$

Уравнения движения

При обсуждении уравнений движения частицы в качестве исходной инвариантной конструкции удобно выбрать уравнение эйконала в R_5

$$H(x^\sigma, P_\sigma) = \frac{1}{2}G^{\sigma\mu}P_\sigma P_\mu = \frac{1}{2}G^{\sigma\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = 0. \tag{12}$$

Здесь $H(x^\sigma, P_\sigma)$ — оптическая функция Гамильтона, равная нулю вдоль мировой линии частицы, $\varphi(x^\sigma)$ — эйконал. Уравнения движения в этом случае даются канонической системой уравнений характеристик (12):

$$\frac{dx^\sigma}{d\tau} = P^\sigma = \frac{\partial H}{\partial P_\sigma}, \quad \frac{dP_\sigma}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}P_\alpha P_\beta = -\frac{\partial H}{\partial x^\sigma} \tag{13}$$

* Это утверждение было бы верно для любых неголономных компонентов и любых точечных преобразований, если бы репер задавался независимо от системы координат.

изотропных геодезических R_5. Соотношение (12) является интегралом системы (13), последний можно переписать также в виде равенства

$$ds = \pm A_\sigma P^\sigma, \quad ds = \sqrt{-g_{ik}dx^i dx^k}, \tag{14}$$

органичивающего выбор начальных условий для системы (13).

Мировая линия частицы дается решением задачи Коши для системы (13): при некотором значении параметра $\tau_{(\sigma)}$ задаются значения x^σ и динамических переменных P^σ (или $P^{(\sigma)}$, т. е. в том числе и массы покоя), причем значения x^σ, P^σ должны удовлетворять уравнению (12).

Переписывая уравнения (13) в виде системы второго порядка

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \tag{15}$$

мы, как обычно, получим физическую интерпретацию последней, рассматривая ее в неголономной системе отсчета. Умножим с этой целью равенство (15) на $\lambda^{(\mu)}_\sigma$ и слегка преобразуем; это дает

$$\frac{dP^{(\mu)}}{d\tau} + \Delta^{(\mu)}_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta = 0. \tag{15a}$$

Здесь через $\Delta^{(\mu)}_{\alpha\beta}$ обозначены коэффициенты вращения Риччи [3]

$$\Delta^{(\mu)}_{\alpha\beta} = \lambda^{(\mu)}_\sigma\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial\lambda^{(\mu)}_\beta}{\partial x^\alpha}.$$

Рассмотрим первые четыре уравнения

$$\frac{dP^{(i)}}{d\tau} + G^{i\sigma}(\gamma_{\alpha\beta,\sigma}P^\alpha P^\beta \pm F_{\beta\sigma}P^\beta\dot{s}) = 0, \quad \dot{s} = \frac{ds}{d\tau}. \tag{16}$$

Второй член в этих уравнениях соответствует гравитационному члену в уравнениях движения в общей теории относительности. Третий же член может иметь тот или иной знак в зависимости от знака заряда (знак определяется начальными условиями для соотношения (14)) и соответствует таким образом электромагнитному члену в упомянутых уравнениях.

Уравнения (16) можно также переписать в виде

$$\frac{dP^{(i)}}{d\tau} \pm g^{ij}F_{(\nu j)}P^{(\nu)}\dot{s} + g^{ij}\gamma_{\alpha\beta(j)}P^\alpha P^\beta = 0, \tag{17}$$

введя неголономные компоненты

$$F_{(\sigma\mu)} = \lambda^\alpha_{(\sigma)}\lambda^\beta_{(\mu)}F_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta(j)} = \lambda^\mu_{(j)}\gamma_{\alpha\beta,\mu}.$$

Если метрический тензор $G_{\sigma\mu}$ не зависит от x^4, а A_4 положить равным единице, то уравнения (16) и (17) принимают известную форму уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном

$$f_{ik} = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}\right) = \frac{|P_{(4)}|\,c}{e}F_{(ik)} = \frac{|P_{(4)}|\,c}{e}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right) \tag{18}$$

и гравитационном полях. Последнее уравнение (15a)

$$\frac{dP^{(4)}}{d\tau} + \frac{1}{A_4}\{\gamma_{\alpha\beta,4} + A_\alpha F_{\beta 4}\}P^\alpha P^\beta = 0,$$

описывающее поведение массы покоя частицы, в этом случае превращается в закон сохранения последней $P^{(4)} = \text{const}$.

В общем случае, когда $G_{\sigma\mu}$ зависят от всех пяти координат, рассмотренные уравнения описывают движение частицы с переменной массой покоя. «Константа» связи с внешним полем также оказывается переменной и вдоль мировой линии меняется пропорционально массе покоя (точнее $P_{(4)}$). Этот факт является прямым следствием однородности уравнений эйконала (12) относительно производных $\partial\varphi/\partial x^{\sigma}$. Мы поясним его на примере электрического заряда.

Допустим, что внешнее поле состоит из электромагнитного и какого-либо поля, зависящего от пятой координаты. При движении в таком поле будет меняться масса покоя частицы и в силу равенства (18) при постоянном заряде мы были бы вынуждены считать, что вдоль мировой линии электромагнитное поле меняется пропорционально массе, кроме своего естественного изменения.

При движении сохраняется отношение e/m_0, оно характеризует частицу и пространство R_5, в котором происходит движение. Пространство R_5 является конфигурационным пространством, сопоставленным данной частице и зависящим от отношения «констант» взаимодействия к массе покоя *.

В заключение коротко рассмотрим, к чему приводят преобразования к движущейся системе отсчета ((9) и сл.). Пусть в исходной системе отсчета внешнее поле не зависит от пятой координаты. Это значит, что масса покоя внешнего поля равна нулю и при движении в таком поле сохраняется масса покоя частицы. При переходе в новую систему отсчета, вообще говоря, появляется зависимость от пятой координаты. В корпускулярной картине это означает, что в системе отсчета нового наблюдателя внешнее поле содержит тяжелые частицы и движение пробной частицы сопровождается изменением ее массы покоя.

Нерелятивистский предел

Нерелятивистские уравнения движения удобно вначале рассмотреть на примере свободной частицы. Соответствующее релятивистское уравнение эйконала, описывающее свободную частицу, имеет вид

$$-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2=0 \tag{19}$$

и выражает известное релятивистское соотношение

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2=\vec{p}^{\,2}+(m_0c)^2,\ \frac{E}{c}=\varphi_0,\ \vec{p}=\nabla_{(1\div 3)}\varphi=\nabla\varphi,\ m_0c=\pm\varphi_4,$$

связывающее полную энергию E, импульс $\vec{p}$ и массу покоя m_0 частицы. Если скорость движения частицы невелика по сравнению с предельной скоростью c, т. е. если

$$\left(\frac{\nabla\varphi}{\varphi_4}\right)^2=\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\ll 1,\ \beta=\frac{v}{c},$$

где v — скорость частицы, то мы имеем дело с нерелятивистским движением частицы. В этом случае уравнение (19) может быть заменено приближенным соотношением

$$\pm\varphi_0\varphi_4=\varphi_4^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2, \tag{20}$$

представляющим нерелятивистское уравнение эйконала. Знак $+$ в левой части и при этом $\varphi_4>0$ соответствуют частице, знак $-$ и при этом

* Речь идет таким образом о рождении новых частиц с фиксированным e/m.

$\varphi_4<0$ соответствуют античастице или частице с другим знаком заряда (частица и античастица имеют положительную энергию φ_0). В нерелятивистском случае, таким образом, частице и ей сопряженной соответствуют различные уравнения. Следует также подчеркнуть, что в отличие от обычного нерелятивистского уравнения Якоби—Гамильтона уравнение (20) соответствует соотношению

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

включающему энергию покоя m_0c^2 в определение полной энергии. Такое определение связано с тем, что, как было показано выше, для взаимодействующей частицы возможно изменение массы покоя.

В случае плоского видимого мира, $g_{ik}=diag\ [-1111]$, аналогичные вычисления приводят к следующему нерелятивистскому уравнению:

$$\pm(\varphi_0 - A_0\varphi_4)\,\varphi_4 = \varphi_4^2 + g^{ab}(\varphi_a - A_a\varphi_4)(\varphi_b - A_b\varphi_4).$$

Здесь φ_4 положено равным единице, при этом была использована рассмотренная выше возможность преобразования координат (10).

В случае движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле $U(x^\sigma)$ соответствующее уравнение эйконала имеет вид

$$\pm\varphi_0\varphi_4 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + (1+U)\,\varphi_4^2 = 0$$

и является обобщением уравнения Якоби—Гамильтона на случай потенциала, зависящего от пятой координаты. Это уравнение описывает движение нерелятивистской частицы с переменной массой покоя.

Ниже обсуждается простейший пример движения в поле, зависящем от пятой координаты. С этой целью прежде всего определим возможный вид потенциала $U(x^\sigma)$. Мы будем предполагать, что потенциал U всюду, кроме оси x^4, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^1 \partial x^1} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x^4 \partial x^4} = 0, \tag{21}$$

сферически симметричен в пространстве $x^{1\div3}$, исчезает при $r^2=(x^1)^2+ +(x^2)^2+(x^3)^2 \to \infty$ и имеет вид произведения $U=\Phi(r)F(x^4)$. Решение такого типа можно записать следующим образом:

$$U = \varepsilon\cos(kx^4 + \alpha)\cdot\frac{e^{-kr}}{r}, \tag{22}$$

где ε, k и α — некоторые постоянные.

Потенциал U, как это следует из работы [1], в корпускулярной картине соответствует (тяжелому) полю частиц с фиксированной массой покоя $\mu=\frac{\hbar k}{c}$, источник которого находится в $r=0$. Если масса покоя частиц μ обращается в нуль, мы получаем обычный кулоновский потенциал, при этом исчезает зависимость от пятой координаты. В случае же $\mu\neq0$ формула (22) представляет потенциал, обобщающий потенциал Юкавы. В пространстве $x^{1\div3}$ потенциал (22) определяет силы с коротким радиусом действия $\sim 1/k$, которые в силу периодической зависимости от пятой координаты x^4 при стационарном движении в известном смысле не зависят от знака ε.

Следует подчеркнуть, что потенциал (22) не является, как это обычно принято, фундаментальным решением уравнения Лапласа (21).

Это последнее, как известно, имеет вид

$$U^* = \frac{\varepsilon}{R^2} = \frac{\varepsilon}{(x^4)^2 + r^2}$$

и соответствует полю частиц всевозможных масс μ, так как

$$U^* = \varepsilon \int_0^\infty \cos kx^4 \, \frac{e^{-kr}}{r} \, dk.$$

Можно рассматривать движение в поле частиц двух и т. д. сортов, скажем

$$U = U_1 + U_2 + \dots .$$

При этом удобно один из потенциалов считать кулоновским, т. е. порожденным частицами с нулевой массой покоя. В этом случае при достаточно больших r тяжелое поле не будет влиять на движение частицы и у последней не будет меняться масса покоя.

К сожалению, эти задачи не допускают точного аналитического решения и в настоящей работе мы ограничимся лишь несколькими замечаниями по поводу задачи рассеяния на потенциале (22) в случае достаточно больших прицельных расстояний r_0 в $x^{1\div 3}$ пространстве. В этом случае применима теория возмущений, которая приводит к следующим результатам: полное изменение массы покоя рассеивающейся частицы дается интегралом

$$\Delta\varphi_4 = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_4^2 \frac{\partial U}{\partial x^4} d\tau = \frac{k\varepsilon (m_0 c)^2}{r_0} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[k\left(\frac{E_k}{c} + m_0 c\right)\tau + \alpha\right] \times$$
$$\times \frac{e^{-kr_0}\sqrt{1 + \varphi_\theta^2 \tau^2 / r_0^4}}{\sqrt{1 + \varphi_\theta^2 \tau^2 / r_0^4}} d\tau.$$

Здесь r_0 — прицельное расстояние в $x^{1\div 3}$ пространстве, E_k кинетическая энергия падающей частицы, φ_θ — угловой момент, причем $\varphi_4 = m_0 c$ для падающей частицы выбирается достаточно большим, чтобы $\varphi_4 + \Delta\varphi_4 > 0$ (в противном случае следует учитывать, что $m_0 c = |\varphi_4|$). Угол рассеяния дается равенством

$$\Delta\theta = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varphi_\theta \rho \, d\tau}{(1 + \varphi_\theta^2 \tau^2 / r_0^4)^{3/2}},$$

где ρ есть решение уравнения

$$\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + \frac{3\rho}{(1 + \xi^2)^2} = u(\xi), \quad u(\xi) = -(m_0 c)^2 \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \xi = \varphi_\theta \tau / r_0^2$$

с нулевыми начальными условиями при $\xi = -\infty$.

Как следует из приведенных формул, при $\alpha = 0$ в первом приближении теории возмущений имеет место рассеяние частицы с неизменной массой покоя, т. е. упругое рассеяние, так как в этом случае интеграл, дающий $\Delta\varphi_4$, вычисляется от нечетной функции, и таким образом $\Delta\varphi_4 = 0$. В общем случае частица рассеивается с изменением массы покоя.

Приведем выражения для пятимерных христофелей:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\sigma}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial G_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial G_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right\},\quad \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=G^{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\beta,\sigma},$$

$$\Gamma_{ab,s}=\gamma_{ab,s}+\frac{1}{2}\{A_aF_{bs}+A_bF_{as}+A_sQ_{ab}\},$$

$$\Gamma_{4b,s}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bs}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}\{A_4F_{bs}+A_bF_{4s}+A_sQ_{4b}\},$$

$$\Gamma_{ab,4}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^4}+\frac{1}{2}\{A_aF_{b4}+A_bF_{a4}+A_4Q_{ab}\},$$

$$\Gamma_{44,s}=A_4F_{4s}+\frac{1}{2}A_sQ_{44},\quad \Gamma_{4b,4}=\frac{1}{2}(A_4F_{b4}+A_4Q_{4b}).$$

Здесь

$$\gamma_{ab,s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{as}}{\partial x^b}+\frac{\partial g_{bs}}{\partial x^a}-\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^s}\right),$$

$$\gamma_{4b,s}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bs}}{\partial x^4},\quad \gamma_{ab,4}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^4},$$

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},\quad Q_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, 70, 1966.
2. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 1966.
3. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I. М.— Л., Гостехиздат, 1939.
4. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
28.9 1965 г.

Кафедра
математики