Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1967

УДК 53:51

Л. Д. АКУЛЕНКО

О РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ И ВРАЩЕНИЯХ В НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Исследуются резонансы общего вида в системе, содержащей линейную вращательную координату и N-мерный квазистатический вектор. Развитая в статье методика проиллюстрирована на конкретной механической модели.

§ 1. Постановка задачи

В статье исследуется возмущенная система вида

$$\begin{gathered} \ddot{x} + Q(x) = \varepsilon q(t, x, \dot{x}, z, \dot{z}; \varepsilon); \\ \ddot{z} = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, z, \dot{z}; \varepsilon); \end{gathered} \tag{1}$$

где $t \in (-\infty, \infty)$ — независимая переменная, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — малый параметр ($\varepsilon_0 > 0$), x — одномерная линейная координата, L—N — мерный вектор в E^N. Относительно функций Q, q и F предположим выполненными следующие требования.

1. $Q(x)$ определена для всех $x \in (-\infty, \infty)$, периодична с периодом 2π с нулевым средним значением; ее вторая производная удовлетворяет условию Липшица для всех достаточно близких значений $x', x'' \in (-\infty, \infty)$.

Функции q и F определены для всех $t \in (-\infty, \infty)$, непрерывны и периодичны с периодами T_q и T_F соответственно. Они также периодичны по x с периодом 2π; по x, $\dot{x}$, z, $\dot{z}$ и ε обладают первыми частными производными, удовлетворяющими в некоторой неограниченной по x области $G \in E^{2N+2}$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ условиями Липшица с независящими от t постоянными.

Наряду с основной возмущенной системой (1) рассмотрим «порождающую»:

$$\ddot{x}_0 + Q(x_0) = 0; \quad \ddot{z}_0 = 0. \tag{2}$$

При наложенных на функцию Q требованиях периодичности и гладкости первое уравнение (2) в области, целиком лежащей вне сепаратрисы, допускает вращательное решение вида (см. [1])

$$x_0 = \frac{2\pi}{T_0}(t - t_0 + \tau) + \varphi_0\left[\frac{2\pi}{T_0}(t - t_0 + \tau), \frac{2\pi}{T_0}\right], \tag{3}$$

где τ — фазовая постоянная, φ_0 — периодическая периода T_0 функция t, а T_0 — период невозмущенного вращательного движения определяется известным выражением

$$T_0 = T_0(E_0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2[E_0 - U(x)]}}, \tag{4}$$

в котором E_0 — сохраняющийся гамильтониан невозмущенной системы, описываемой координатами x_0 и $\dot{x}_0$; $U(x) = \int\limits_0^x Q(y)\,dy$ — периодический «потенциал». За любой промежуток времени $\Delta t = T_0$ координата x_0 получает приращение 2π, а $\dot{x}_0 \equiv \frac{dx_0}{dt}$ — периодическая функция периода T_0, причем $\dot{x}_0 \geqslant \delta > 0$. Так как фундаментальное уравнение для z_0 имеет нулевой корень кратности $2N$, которому соответствует N групп решений, то система для z_0 имеет семейство периодических решений, содержащее N произвольных постоянных и имеющее вид

$$Z_0 = M_0 = \text{const}, \tag{5}$$

т. е. вектор z_0 является статическим.

Поставим задачу найти точное для всех $t \in (-\infty, \infty)$ вращательно-колебательное решение системы (1) при ε достаточно малом, имеющее период T и обращающееся в порождающее (3), (5) при $\varepsilon = \theta$. При этом скажем, что возмущенное решение относится к резонансному виду $m:n:l$, если между периодами выполняются соотношения $T = nT_0 = mT_q = lT_F$, где T — период возмущенного вращательно-колебательного движения, T_0 — период невозмущенной вращающейся координаты (4), T_q — наименьший период функции q по явно входящему аргументу t, T_F — то же для F; m, n, l — взаимно простая совокупность целых чисел.

Заметим, что к исследованию системы вида (1) приводит задача о движении связанных систем типа равномерно вращающейся или находящейся в равновесии «тяжелой» массы M с подвешенным к ней «плоским, длинным» маятником длины l, находящимся в режиме вращений.

Для параметров системы должны иметь место соотношения

$$\frac{\mu}{M} \sim \varepsilon^2, \quad \frac{L}{l} \sim \varepsilon \ll 1,$$

где μ — масса маятника, а L — характерная для движения массы M длина. Аналитическая квазистатическая система типа

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \varepsilon F_i(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_N, \dot{x}_N; \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

исследовалась в [2]. К исследованию подобных систем приводит задача о движении системы, находящейся под действием высокочастотных возмущений. Стационарные резонансные режимы вращательных систем с медленно меняющимися параметрами типа:

$$\frac{d}{dt}\left[m(x)\frac{dy}{dt}\right] + Q(x, y) = \varepsilon q(\theta, y, \dot{y}, x; \varepsilon).$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\theta, y, \dot{y}, x; \varepsilon),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \nu(x) + \varepsilon\Psi(\theta, y, y, x; \varepsilon),$$

где x — вектор, θ — скалярная фаза внешней возмущающей силы; а также аналогичные неканонические системы исследовались с помощью метода усреднения [1, 3] на промежутке времени $t \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ в работах [4—8]. Общие вращательно-колебательные автономные системы с медленными и быстрыми движениями усреднялись в [1] на промежутке времени $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

§ 2. Построение резонансного решения для бесконечного промежутка времени

В уравнениях (1) положим

$$x = x_0 + \varepsilon y, \quad z = M_0 + \varepsilon w; \tag{6}$$

где y и w — периодические периода T добавки. Систему (1) в силу условий гладкости, наложенных на функции Q, q и F, можно привести к виду

$$\ddot{y} + Q'(x_0)\, y = q(t, x_0, \dot{x}_0, M_0, 0;\ 0) + \varepsilon Y(t, y, \dot{y}, w, \dot{w};\ \varepsilon),$$
$$\ddot{w} = F(t, x_0, \dot{x}_0, M_0, 0;\ 0) + \varepsilon W(t, y, \dot{y}, w, \dot{w};\ \varepsilon), \tag{7}$$

где

$$Y = -\frac{1}{2} Q_0'' y^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y + \left(\frac{\partial q}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_0 w + \left(\frac{\partial q}{\partial \dot{z}}\right)_0 \dot{w} +$$
$$+ \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0 + Y^*(t, y, \dot{y}, w, \dot{w}; \varepsilon), \tag{8}$$

$$W = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 w + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right)_0 \dot{w} +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0 + W^*(t, y, \dot{y}, w, \dot{w};\ \varepsilon),$$

причем

$$Y^*|_{\varepsilon=0} = W^*|_{\varepsilon=0} \equiv 0. \tag{9}$$

Периодическое периода T решение системы (7) ищем последовательными приближениями по схеме $(k \geqslant 2)$

$$\ddot{y}^{(k)} + Q'(x_0)\, y^{(k)} = q_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0) + \varepsilon Y(t, y^{(k-1)}, \dot{y}^{(k-1)}, \ldots, w^{(k-1)}, \dot{w}^{(k-1)};\ \varepsilon),$$
$$\ddot{w}^{(k)} = F_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0) + \varepsilon W(t, y^{(k-1)}, \dot{y}^{(k-1)}, \ldots, w^{(k-1)}, \dot{w}^{(k-1)};\ \varepsilon). \tag{10}$$

Рассмотрим далее однородную систему, соответствующую (10):

$$\ddot{\varphi} + Q'(x_0)\, \varphi = 0, \quad \ddot{\psi} = 0. \tag{11}$$

Ее фундаментальной системой являются функции

$$\varphi_1 = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} = \dot{x}_0 \equiv u, \quad \varphi_2 = ut + v.$$

где

$$v = \omega_0 \frac{\partial x_0(\psi_0, \omega_0)}{\partial \omega_0}, \quad \left(\psi_0 = \frac{2\pi}{T_0}(t - t_0 + \tau),\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right).$$

Далее $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = t - t_0$.

Нулевое приближение определим из системы

$$\begin{gathered} \ddot{y}^{(0)} + Q'(x_0)\, y^{(0)} = q_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0), \\ \ddot{w}^{(0)} = F_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0), \end{gathered} \tag{12}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{gathered} y^{(0)} = K\left\{u \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t_1} uq_0\, dt_2 - vq_0 - \beta_0\right) dt_1 + v\left(\int_{t_0}^{t} uq_0\, dt_1 - \beta_0\right)\right\} + \\ + \alpha_0 u \equiv y^{(0)*} + \alpha_0 u, \end{gathered} \tag{13}$$

$$w^{(0)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} F_0\, dt_2 + A_0\right) + N_0 \equiv w^{(0)*} + N_0.$$

Условия периодичности $y^{(0)}$, $w^{(0)}$ дают $(N+1)$ уравнений, которым должны удовлетворять постоянные τ, M_0

$$\begin{gathered} L(\tau, M_0) = \int_0^T uq_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0)\, dt = 0, \\ R(\tau, M_0) = \int_0^T F_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0)\, dt = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Предположим, что эти уравнения допускают вещественный корень $\{\tau^*, M_0^*\}$. Тогда постоянные β_0 и A_0 равны

$$\beta_0 = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_{t_0}^{t} uq_0\, dt_1 - vq_0\right) dt\, \Big|_{\tau=\tau^*, M_0=M_0^*},$$

$$A_0 = -\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{t_0}^{t} F_0\, dt_1\, \Big|_{\tau=\tau^*, M_0=M_0^*}.$$

Величина K в выражении (13) постоянна на основании теоремы Лиувилля и равна

$$K = \frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{u^2 + u\dot{v} - \dot{u}v} = -[\ln T_0(E_0^*)]' > 0. \tag{15}$$

В результате получаем периодическое периода T решение системы (12) при произвольных значениях постоянных $\{\alpha_0, N_0\}$. Если функциональный определитель Δ отличен от нуля

$$\Delta = \left|\frac{D(L, R)}{D(\tau, M_0)}\right|_{\substack{\tau=\tau^*; \\ M_0=M_0^*}} \neq 0; \tag{16}$$

то постоянные $\{\alpha_0, N_0\}$ однозначно определяются из системы первого приближения

$$\ddot{y}^{(1)} + Q'(x_0)\,y^{(1)} = q_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0) + \varepsilon Y(t, y^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, w^{(0)}, \dot{w}^{(0)}; 0),$$
$$\ddot{w}^{(1)} = F_0(t, x_0, \dot{x}_0, M_0) + \varepsilon W(t, y^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, w^{(0)}, \dot{w}^{(0)}; 0),$$

где правые части берутся при $\tau=\tau^*$, $M_0=M_0^*$. Действительно, уравнения периодичности $w^{(1)}$ типа (14) имеют вид

$$R_0(\alpha_0, N_0) = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \alpha_0 u + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \alpha_0 \dot{u} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 N_0\right] dt +$$
$$+ \int_0^T \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 y^{(0)*} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{y}^{(0)*} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 w^{(0)*} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right)_0 \dot{w}^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0\right] dt =$$
$$= \frac{\partial R}{\partial \tau^*}\alpha_0 + \frac{\partial R}{\partial M_0^*} N_0 + \Phi_0(\tau^*, M_0^*) = 0, \tag{17}$$

где символически обозначено $\frac{\partial R}{\partial \tau^*} \equiv \frac{\partial R}{\partial \tau}\Big|_{\substack{\tau=\tau^* \\ M_0=M_0^*}}$ и т. д. Произведя простые выкладки, получим условие периодичности $y^{(1)}$ типа (14):

$$L_0(\alpha_0, N_0) = \frac{\partial L}{\partial \tau^*}\alpha_0 + \frac{\partial L}{\partial M_0^*} N_0 + \Psi_0(\tau^*, M_0^*) = 0, \tag{18}$$

где

$$\Psi_0(\tau^*, M_0^*) = \int_0^T \left\{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y^{(0)*} + \left(\frac{\partial q}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{y}^{(0)*} + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_0 w^{(0)*} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial \dot{z}}\right)_0 \dot{w}^{(0)} + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0\right] u + q_0 \dot{y}^{(0)*}\right\} dt.$$

Из уравнений (17), (18) определяются $(N+1)$ неизвестных постоянных $\{\alpha_0, N_0\}$, так как выполняется условие (16). Следовательно, нулевое приближение неизвестных $\{y, w\}$ (первое для $\{x, z\}$) полностью определено. Из уравнений (10) аналогичным образом можно найти любое приближение решения системы (7). Заметим, что уравнения для определения постоянных $\{\alpha_k, N_k\}$ $(k \geqslant 1)$ будут, вообще говоря, нелинейными вида

$$L_k(\alpha_k. N_k; \varepsilon) = \frac{\partial L}{\partial \tau^*}\alpha_k + \frac{\partial L}{\partial M_0^*} N_k + \Psi_k(\alpha_k, \mathrm{N}_k; \varepsilon),$$
$$R_k(\alpha_k, N_k; \varepsilon) = \frac{\partial R}{\partial \tau^*}\alpha_k + \frac{\partial R}{\partial M_0^*} N_k + \Phi_k(\alpha_k, N_k; \varepsilon),$$

где

$$\Psi_k(\alpha_k, N_k; 0) \equiv \Psi_0(\tau^*, M_0^*),\ \Phi_k(\alpha_k, N_k; 0) \equiv \Phi_0(\tau^*, M_0^*).$$

Таким образом, если последовательные приближения $\{y^{(k)}, w^{(k)}\}$ равномерно сходятся, то их предел может представить периодическое периода T решение системы (7). Доказательство сходимости последовательных приближений к истинному периодическому решению можно производить методом, развитым в [2] для квазилинейных систем в случае резонанса, на основании известной теоремы Флоке—Ляпунова. Однако не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 3. Основные результаты

Следствием § 2 является.

Теорема. Возмущенная система (1) допускает единственное стационарное решение вида $m:n:l$ при ε достаточно малом, обращающееся в порождающее (3), (5) при $\varepsilon=0$ и принадлежащее $(2N+2)$-мерной области G евклидова пространства E^{2N+2} определения функций Q, q, $\boldsymbol{F}$, а) если выполнены требования 1 и 2 § 1, б) если $(N+1)$ постоянных $\{\tau^*, M_0^*\}$ удовлетворяют системе нелинейных уравнений (14) и в) если определитель Δ (16) отличен от нуля.

Замечания к теореме.

1. Единственность решения в теореме понимается в том смысле, что каждому простому корню $\{\tau^*, M_0^*\}$ уравнений (14) соответствует одно семейство резонансных решений вида (6) (ε — параметр). Теорема предполагает, что таких изолированных корней может быть несколько, даже счетное множество.

2. Так как характеристическое уравнение для системы в вариациях (11) имеет корень, равный единице, кратности $(2N+2)$, которому соответствует при $\varepsilon=0$ $(N+1)$ периодическое решение, то вопрос об устойчивости построенных решений является сложным и заслуживает отдельного исследования.

3. Теорема, аналогичная сформулированной, справедлива в случае, если порождающая система (2) допускает чисто периодическое решение

$$x_0 = \varphi_0(\omega_0(t - t_0 + \tau), \omega_0); \; z_0 = M_0 = \text{const}.$$

Условие периодичности функций Q, q и F по x в этом случае можно отбросить.

4. Среди функций $z=\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$, например, первые S $|S \leqslant N|$ могут быть вращающимися. В общем случае функции q, F должны быть периодическими по этим координатам с периодами T_1, $T_2, \ldots, T_S$ соответственно. Порождающее решение для z тогда имеет вид

$$z_{0,i} = \delta_i \frac{T_i}{2\pi} \omega_i (t - t_0) + \theta_i,$$

где $\delta_i=1$ при $i \leqslant S$ и $\delta_i=0$ при $i>S$; θ_i — фазовые постоянные, а ω_i — совокупность S постоянных, удовлетворяющих условиям:

$$T = nT_0 = mT_q = m_1 T_{F_1} = m_2 T_{F_2} = \ldots = m_N T_{F_N} =$$

$$= n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2 = \ldots = n_s \tau_s,$$

где T_q, T_{F_1}, $T_{F_2}, \ldots, T_{F_N}$ — наименьшие периоды функций q, F_1, $F_2, \ldots, F_N$ по явно входящему времени t; $\tau_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$, а n, m, $\{m_i\}$, $\{n_j\}$ — совокупность $(N+S+2)$ целых чисел, не имеющая общих множителей. Вращающиеся величины x_0 и $z_{0,i}$ получают за период T приращения $2\pi n$ и $T_i n_i$ — соответственно. Для этого случая также можно получить аналогичную теорему.

§ 4. Конкретный пример

Пусть однородный трехосный эллипсоид, внутри которого находится неуравновешенная масса μ, вращается вокруг одной из своих осей AB, причем последняя сама вращается вокруг направления CD, перпендикулярного AB и проходящего через центр эллипсоида, так что лагранжиан системы имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2+a\mu g\cos\varphi,$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции системы, a — расстояние от оси AB до массы μ. Рассмотрим предельный случай, когда $I_1=I_2+\Delta$, где Δ — малая величина: $\frac{\Delta}{I_1}=\varepsilon\ll 1$. Пусть на систему действуют малые возмущения, так что ее уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\theta}=\varepsilon 2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}-\varepsilon\Gamma+\varepsilon\sigma\theta\left(1+N\sin\nu t\right)+0\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\ddot{\varphi}+k^2\sin\varphi=\varepsilon b\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2-\varepsilon\beta+\varepsilon M\sin\nu t+0\left(\varepsilon^2\right),$$

где введены обозначения: $k^2=\frac{a\mu g}{I_3}$ и $b=\frac{I_1}{I_3}$, а Γ, β — коэффициенты, характеризующие трение в осях CD и AB соответственно; N и M — величины, характеризующие «внешние моменты» частоты ν. Поставим задачу отыскать стационарное вращательное для φ и колебательное для θ решение вида $1:1:1$ системы на всем интервале времени $t\in(-\infty,\infty)$. Порождающая система интегрируется элементарно:

$$\theta_0=\tau,$$

$$\varphi_0=\omega\left(t+h\right)+4\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\,\frac{q^p}{1+q^{2p}}\sin p\omega\left(t+h\right),$$

где $q=\exp\left\{-\pi\frac{K'}{K}\right\}$, K — полный эллиптический интеграл 1-го рода по модулю $\gamma=k\sqrt{2/E_0}$, а K' — его производная. Постоянная E_0 связана с ω соотношением $\omega=2\pi k/\gamma K\left(\gamma\right)$. Величины E_0, ω выберем из условия главного резонанса $\omega\left(E_0\right)=\nu$. После этого система уравнений относительно τ, h примет вид

$$R\left(\tau,h\right)=-\Gamma+\sigma\tau=0,$$

$$N\left(\tau,h\right)=\beta+M\,2\frac{q}{1+q^2}\sin\nu h=0,$$

откуда главные значения корней

$$\tau^*=\frac{\Gamma}{\sigma},\quad h_1=-\frac{1}{\nu}\arcsin\left(\frac{\beta}{2M}\,\frac{1+q^2}{q}\right),\quad h_2=\frac{\pi}{\nu}-h_1,$$

причем должно выполняться условие $\beta<M\frac{2q}{1+q^2}$. Так как при этом $\frac{\partial R}{\partial\tau^*}\neq 0$ и $\frac{\partial N}{\partial n^*}\neq 0$, то, согласно теореме, существует решение основной системы при ε достаточно малом. Поправки θ_1 и φ_1, участвующие для всех $t\in(-\infty,\infty)$ в выражениях

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\theta_1+0\left(\varepsilon^2\right),\quad \varphi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+0\left(\varepsilon^2\right),$$

имеют вид

$$\theta_1 = -\frac{\sigma\tau^* N}{\nu^2}\sin\nu t + A_1,$$

$$\varphi_1 = K\left\{u\int_0^t\left[\int_0^{t_1}(-\beta + M\sin\nu t_2)\,u\,dt_2 - v(-\beta + M\sin\nu t_1) - \beta_1\right]dt_1 + \right.$$

$$\left. + v\int_0^t(-\beta + M\sin\nu t_1)\,u\,dt_1 - \beta_1\right\} + \alpha_1 u \equiv \varphi_1^* + a_1 u,$$

где

$$u = \dot{\varphi}_0 = \nu\left[1 + 4\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p^q}{1+q^{2p}}\cos p\nu(t+h^*)\right],$$

$$v = 4\nu\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{p^q}{1+q^{2p}}\right)\sin p\nu(t+h^*),$$

$$K = -[\ln T_0(E_0^*)]' = \frac{\gamma^3}{4k^2}\left[\frac{1}{\gamma} + \frac{K'}{K}\right];$$

$$\beta_1 = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\left[\int_0^t u(-\beta + M\sin\nu t_1)\,dt_1 - v(-\beta + M\sin\nu t)\right]dt.$$

Постоянные A_1 и α_1 находятся в виде квадратур по формулам (17), (18) через известные функции. Аналогично решается задача, когда θ вращается. Таким образом, предложенный метод позволяет решать резонансные задачи на бесконечном промежутке времени.

Пользуюсь случаем поблагодарить проф. В. М. Волосова за внимание к работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М. «Усп. матем. наук», 17, № 6, 3—126, 1962.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963; ДАН СССР, 155, № 2, 277, 1964.
4. Моргунов Б. И. ДАН СССР, 155, № 2, 277, 1964.
5. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 56—65, 1965.
6. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 83—86, 1965.
7. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 161, № 6, 1303—1305, 1965.

Поступила в редакцию
26. 10 1965 г.

Кафедра
математики