

Ю. И. КУЗНЕЦОВ, К. Ф. ТЕОДОРЧИК

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ГАРМОНИЧЕСКУЮ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ

Предлагается метод траекторий корней для анализа нелинейных автоматических систем, допускающих гармоническую линеаризацию. Развита методика применения метода. В качестве примера рассмотрена нелинейная система третьего порядка.

Принцип гармонического баланса Крылова—Боголюбова [1] нашел широкое практическое применение в автоматике для приближенного расчета нелинейных систем автоматического регулирования высокого порядка даже при наличии в системах сильных нелинейностей [2, 3].

Для широкого класса нелинейных автоматических систем можно выделить нелинейное звено, а линейные звенья объединить в один блок. Это позволяет представить структурную схему системы в виде, показанном на рис. 1.

Пусть приведенная линейная часть системы имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{x}{-y} = \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)}, \quad (1)$$

где  $\Psi_m(p)$  и  $\Phi_n(p)$  — полиномы оператора  $p=d/dt$  с действительными коэффициентами степени  $m$  и  $n$  соответственно ( $n \geq m$ ) и пусть  $y=f(x)$  — однозначная, нечетно-симметричная характеристика нелинейного звена.

Если переменная  $x$ , входящая под знак нелинейности, изменяется по закону, близкому к гармоническому

$$x \approx a \sin \Omega t, \quad (2)$$

(что часто наблюдается на практике), то нелинейное звено можно заменить эквивалентным линейным с коэффициентом передачи [2, 3]

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (3)$$

Как показал М. А. Айзерман, указанная замена допустима, когда линейная часть системы обладает свойством фильтра [4]. В этом случае

характеристическое уравнение собственных движений замкнутой линеаризованной системы для координаты  $x$  можно представить в виде [2, 3]

$$\Phi_n(p) + q(a) \Psi_m(p) = 0. \quad (4)$$

Существенное отличие уравнения (4) от линейного состоит в том, что эквивалентный коэффициент передачи нелинейного звена  $q$  зависит от амплитуды переменной  $x$ .

Уравнение (4) может быть исследовано методом траекторий корней на плоскости собственных частот  $p = \delta + i\omega$ . Действительно, формально, отвлекаясь от зависимости  $q$  от амплитуды  $a$ , мы можем построить траектории корней уравнения (4), считая  $q$  свободным параметром, допускающим изменение от  $-\infty$  до  $+\infty$  [5]. Однако в дальнейшем надо учитывать, что при анализе конкретных систем характер нелинейности  $y = f(x)$  может наложить ограничения на допустимые значения  $q(a)$ . В зависимости от этих ограничений на траекториях, построенных для  $-\infty \leq q \leq +\infty$ , выделяются области допустимых значений корней линеаризованного уравнения (4).

Выделенные таким образом области однозначно определяют динамические свойства линеаризованной системы. При этом возможны следующие случаи: 1) области допустимых значений корней целиком лежат в левой полуплоскости комплексного переменного  $p$ ; 2) области допустимых значений корней частью лежат в правой полуплоскости комплексного переменного  $p$ . В первом случае в системе возможны только затухающие движения, во втором случае в системе возможны незатухающие движения.

Существенный интерес представляет рассмотрение второго случая, когда возможен выход пары комплексно-сопряженных корней на мнимую ось  $i\omega$ , т. е. когда в системе возможны периодические движения\*. Точки выхода пары комплексно-сопряженных корней на ось  $i\omega$  дают частоту периодических движений. Амплитуда этих движений для координаты  $x$  определяется из уравнения  $q(a) = q_{кр}$ , где  $q_{кр}$  — значение  $q$ , при котором пара комплексно-сопряженных корней выходит на мнимую ось. Это уравнение легко может быть решено графически.

Возбуждение системы может носить либо мягкий, либо жесткий характер, что определяется видом зависимости  $q$  от амплитуды  $a$ . Если  $q(0)$  таково, что пара комплексно-сопряженных корней уравнения (4) лежит справа от мнимой оси, то положение равновесия системы неустойчиво и возбуждение будет мягким. Если же при  $a=0$  все корни линеаризованного уравнения лежат слева от  $i\omega$ , то положение равновесия системы будет устойчивым в малом, и возбуждение системы может быть только жестким. В особых случаях положение равновесия будет устойчивым, по крайней мере в малом, если выполняются условия предельной устойчивости [6]. Методику исследования устойчивости периодических режимов приведем на конкретном примере.

Рассмотрим нелинейную систему третьего порядка, уравнение которой имеет вид

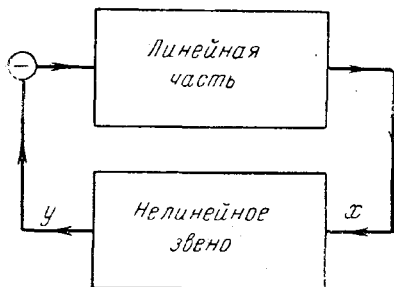


Рис. 1

\* Аперiodическая потеря устойчивости в данной работе не рассматривается.

$$p(p+1)(p+2)x + [(p+0,5)^2 + (4,44)^2] f(x) = 0, \quad (5)$$

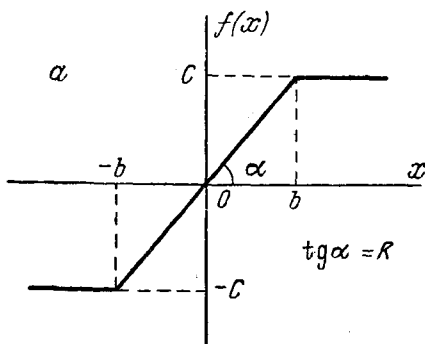
где  $f(x)$  — нелинейная однозначная нечетно-симметричная функция. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{при } |x| \leq b, \\ c \operatorname{sign} x & \text{при } |x| > b. \end{cases} \quad (6)$$

График этой характеристики представлен на рис. 2, а. Эквивалентный коэффициент передачи нелинейного звена будет

$$q(a) = \begin{cases} k & \text{при } a \leq b, \\ \frac{2}{\pi} k \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) & \text{при } a > b. \end{cases} \quad (7)$$

График зависимости  $q(a)$  представлен на рис. 2, б.



При замене нелинейного звена эквивалентным линейным с коэффициентом передачи  $q(a)$ , характеристическое уравнение линеаризованной системы для координаты  $x$  будет

$$p(p+1)(p+2) + q(a)[(p+0,5)^2 + (4,44)^2] = 0. \quad (8)$$

Так как  $q(a) \geq 0$ , то построим траектории корней уравнения (8) для  $0 \leq q \leq +\infty$ .

При  $q=0$  траектории корней уравнения (8) начинаются в начальных точках  $p_1=0$ ,  $p_2=-1$ ,  $p_3=-2$ .

При возрастании  $q$  от нуля до  $+\infty$  два корня будут двигаться к предельным точкам траекторий  $z_{1,2} = -0,5 \pm \pm 4,44 i$ , третий уходит в  $-\infty$  вдоль действительной оси  $\delta$ . Траектории корней уравнения (8) для  $0 \leq q \leq +\infty$  показаны на рис. 3, а. На этом рисунке крестиками обозначены начальные точки, кружками — предельные точки, на траекториях корней точками обозначены положения корней при некоторых значениях  $q$ . Траектории корней пересекают мнимую ось в двух парах комплексно-сопряженных точек:

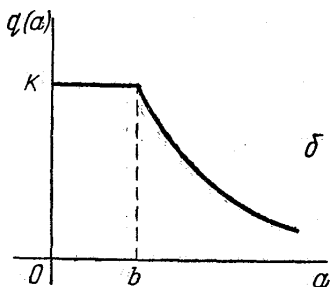
$$cc^* (\pm 1,55 i) \text{ при } q = q_{кр.1} = 0,411, \quad ee^* (\pm 4,07 i) \text{ при } q = q_{кр.2} = 14,6. \quad (9)$$

В данной системе возможны следующие случаи.

1.  $k < q_{кр.1}$ . При этом области допустимых значений корней уравнения (8) целиком лежат слева от оси  $i\omega$ . Положение равновесия системы устойчиво при любых внешних возмущениях.

2.  $q_{кр.2} > k > q_{кр.1}$ . При  $a=0$   $q=k$  и пара комплексно-сопряженных корней находится справа от мнимой оси. Положение равновесия системы неустойчиво. Пусть  $k=5$ ,  $b=1$ . На рис. 3, б (кривая 1) представлен график  $q(a)$  при этих значениях (график построен в логарифмическом масштабе).

Рис. 2



На этом рисунке заштрихованы те области значений  $q$ , при которых все корни уравнения (8) лежат слева от мнимой оси. При  $a=0$   $q=5$  пара комплексно-сопряженных корней находится справа от оси  $i\omega$  в точках  $dd^*$  ( $+0,26 \pm 2,5i$ ) (см. рис. 3, а). Система мягко возбуждается и в ней возникают нарастающие во времени движения. Частота старта движения равна  $\omega_{ст1} = 2,5$ . Когда амплитуда этих движений  $a$  будет больше  $b=1$ , то при дальнейшем увеличении ее  $q(a)$  будет уменьшаться, и комплексно-сопряженные корни со временем начнут двигаться к мнимой оси. При  $a=a_{01}$ , когда  $q=q_{кр1}$ , они придут на ось  $i\omega$  в точки  $cc^*$  и в системе будут наблюдаться периодические движения частоты  $\omega_{кр1} = 1,55$ .

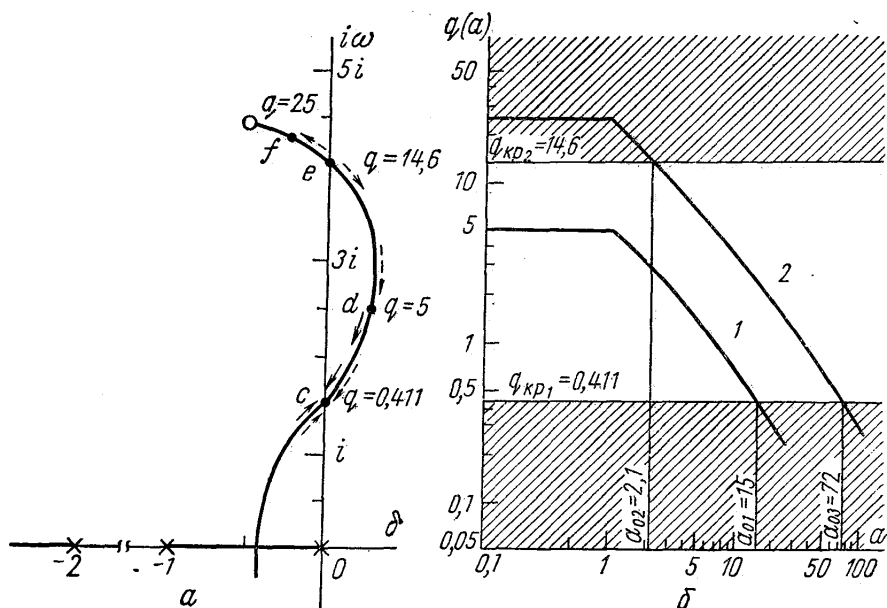


Рис. 3

Значение амплитуды этих движений  $a_{01}$  легко определить графически (см. рис. 3, б). В данном случае  $a_{01} = 15$ .

Этот периодический режим будет устойчивым. Действительно, если дадим  $a_{01}$  приращение  $-\Delta a$ , то  $q(a_{01}-\Delta a) > q(a_{01})$  (см. рис. 3, б) и пара комплексно-сопряженных корней выйдет в правую полуплоскость, в системе возникнут нарастающие во времени движения, при увеличении амплитуды  $q(a)$  будет падать, и эти корни со временем возвратятся на ось  $i\omega$ . Если дадим  $a_{01}$  приращение  $+\Delta a$ , то  $q(a_{01}+\Delta a) < q(a_{01})$ , и эти корни выйдут в левую полуплоскость, в системе будут наблюдаться затухающие движения,  $q(a)$  со временем будет увеличиваться, и корни возвратятся на мнимую ось  $i\omega$ . На рис. 3, а сплошными стрелками показано движение комплексно-сопряженных корней во времени для этого случая.

3.  $k > q_{кр2}$ . При  $a=0$  все корни уравнения (8) находятся слева от мнимой оси. Положение равновесия системы устойчиво в малом.

Пусть  $k=25$ ,  $b=1$ . График  $q(a)$  для этого случая представлен на рис. 3, б, кривая 2. При  $a=0$   $q=25$ , пара комплексно-сопряженных корней находится слева от оси  $i\omega$  в точках  $ff^*$  ( $-0,24 \pm 4,3i$ ) (см. рис. 3, а). Если в результате внешнего воздействия амплитуда гармоники

частоты  $\omega_{кр2}=4,07$  координаты  $x$  будет равна  $a_{02}=2,1$ , то  $q=q_{кр2}$  (см. рис. 3, б), пара комплексно-сопряженных корней выйдет на ось  $i\omega$  в точки  $ee^*$ . При этом в системе возникнут периодические движения частоты  $\omega_{кр2}=4,07$ . Периодический режим частоты  $\omega_{кр2}$  и амплитуды  $a_{02}$  неустойчив. При сколь угодно малом изменении амплитуды  $a_{02}$  в сторону уменьшения пара комплексно-сопряженных корней со временем придет в точки  $ff^*$ , а при изменении в сторону увеличения эти корни со временем придут на ось  $i\omega$  в точки  $cc^*$ , и в системе установятся устойчивые автоколебания частоты  $\omega_{кр1}=1,55$  и амплитуды  $a_{03}=72$  (см. рис. 3, б). На рис. 3, а пунктирными стрелками показано движение комплексно-сопряженных корней со временем для этого случая. Следовательно, при  $k=25$ ,  $b=1$  в системе возможно жесткое возбуждение устойчивых автоколебаний частоты  $\omega_{кр1}=1,55$  и амплитуды  $a_{03}=72$ ; порог возбуждения равен  $a_{02}=2,1$ , частота старта  $\omega_{ст2}=\omega_{кр2}=4,07$ .

Таким образом, построение траекторий корней уравнения (4), что легко может быть сделано для систем довольно высокого порядка, и графика зависимости  $q$  от амплитуды  $a$  координаты, входящей под знак нелинейности, позволяет исследовать свойства нелинейных автоматических систем, допускающих гармоническую линеаризацию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
2. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
3. Сб. Метод Гольдфарба в теории регулирования. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. Айзерман М. А. «Автоматика и телемеханика», № 5, 1953.
5. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
6. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.

Поступила в редакцию  
5. 11 1965 г.

Кафедра  
физики колебаний