

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12.01

В. В. АЛЕКСЕЕВ

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ N НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

В настоящее время теория рассеяния с участием связанных состояний разработана достаточно подробно [1]. Однако в общем случае не получены линейные однозначно разрешимые уравнения для амплитуд. Эти уравнения полезны для получения в разных конкретных случаях приближенных уравнений, которые хорошо описывают явление и могут быть решены с использованием современной вычислительной техники.

В данной статье мы построим такие уравнения в случае N -нерелятивистских бесспиновых частиц, и разложение волновой функции этой системы по амплитудам. При этом для нашего метода совершенно несущественно, каков характер действия сил между частицами. Рассмотрение частиц со спинами не вносит никаких принципиальных осложнений.

Пусть волновая функция системы из N -частиц удовлетворяет уравнению

$$E\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \left(- \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \Delta_i + V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \right) \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \quad (1)$$

Здесь \vec{x}_i — радиус-вектор частицы с номером i , Δ_i — оператор Лапласа по координатам этой частицы, m_i — ее масса. Функция V может включать в себя как попарные $v_{ij}^{(2)}(\vec{x}_{ij})$, так тройные $v_{ijk}^{(3)}(\vec{x}_{ij}, \vec{x}_{jk}, \vec{x}_{ki})$, четверные и т. д. потенциалы взаимодействия между частицами ($i \neq j \neq k \neq i$ пробегает значения от 1 до N). Единственное требование на $v^{(k)}$, это их достаточно быстрое убывание при $|\vec{x}_{ij}| = |\vec{x}_i - \vec{x}_j| \rightarrow \infty$. Далее мы будем рассматривать только задачи рассеяния. Это значит, что волновая функция $\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ имеет асимптотические состояния:

$$\prod_{i=1}^l \Psi_{\alpha_i, P}^{(N_i)}(\vec{x}^{(N_i)}); \quad N = \sum_{i=1}^l N_i,$$

где ψ удовлетворяет уравнению

$$E_i \Psi_{E_i}^{(N_i)}(\vec{x}_i^{(N_i)}) = \left(- \sum_{k_i=1}^{N_i} \frac{1}{2m_{k_i}} \Delta_{\vec{x}_{k_i}} + V^{(i)}(\vec{x}_1^{(N_i)} \dots \vec{x}_i^{(N_i)}) \right) \Psi_{E_i}^{(N_i)}(\vec{x}_i^{(N_i)}). \quad (2)$$

Здесь

$$E_i = \kappa_i + \frac{(\vec{P}^{(i)})^2}{2\sum m_{k_i}}, \quad \vec{x}_i^{(N_i)} = \{\vec{x}_1^{(N_i)} \dots \vec{x}_{N_i}^{(N_i)}\},$$

\varkappa_i — энергия связи комплекса из N_i частиц с координатами $\{\vec{x}_1^{(N_i)} \dots \vec{x}_{N_i}^{(N_i)}\}$, $\vec{P}^{(i)}$ — импульс этого комплекса.

Если $l=2$, волновую функцию $\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ можно следующим образом представить в виде разложения по полным наборам решений уравнений (2)

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = & \int d\vec{p}_n d\vec{q}_n \psi_{p_n}^{\rightarrow}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \psi_{q_n}^{\rightarrow}(\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_N) \tilde{C}(\vec{p}_n, \vec{q}_n) + \sum_{\varkappa_n} \int d\vec{q}_n d\vec{P}^{(\varkappa)} \times \\ & \times \psi_{\varkappa_n, \vec{P}^{(\varkappa)}}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \psi_{q_n}^{\rightarrow}(\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_N) \tilde{C}_{\varkappa_n}(\vec{P}^{(\varkappa)}, \vec{q}_n) + \sum_{\gamma^n} \int d\vec{p}_n d\vec{P}^{(\gamma)} \times \\ & \times \psi_{p_n}^{\rightarrow}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \psi_{\gamma^n, \vec{P}^{(\gamma)}}(\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_N) \tilde{C}_{\gamma^n}(\vec{p}_n, \vec{P}^{(\gamma)}) + \sum_{\varkappa_n, \gamma^n} \int d\vec{P}^{(\varkappa)} d\vec{P}^{(\gamma)} \times \\ & \times \psi_{\varkappa_n, \vec{P}^{(\varkappa)}}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \psi_{\gamma^n, \vec{P}^{(\gamma)}}(\vec{x}_{n+1} \dots \vec{x}_N) C_{\varkappa_n, \gamma^n}(\vec{P}^{(\varkappa)}, \vec{P}^{(\gamma)}), \end{aligned} \quad (3)$$

$\psi_{p_n}^{\rightarrow}$ и $\psi_{q_n}^{\rightarrow}$ — волновые функции состояний рассеяния в системах соответственно из n и $N-n$ частиц. Интегрирование по $d\vec{q}_n$ означает суммирование по всем дискретным и интегрирование по всем непрерывным индексам этих состояний. Покажем, что $C_{\varkappa_n, \gamma^n}$ соответствует амплитуде перехода в состояние, построенное из двух свободных комплексов с энергиями связи $\varkappa_k^n, \gamma_k^n$.

В самом деле, вследствие ортогональности величины

$$\psi_{\varkappa_k, \vec{P}^{(\varkappa)}}^n \psi_{\gamma_i, \vec{P}^{(\gamma)}}^n C_{\varkappa_k, \gamma_i}^n(\vec{P}^{(\varkappa)}, \vec{P}^{(\gamma)}) \quad (4)$$

всем остальным членам разложения, в последнем не найдется больше ни одного члена, ведущего себя асимптотически подобным образом и отвечающего данным значениям индексов $\varkappa, \gamma, \vec{P}$. Если бы из состояний типа рассеяния $\Psi_{p(q)}$ можно было бы построить выражение, ведущее себя асимптотически как (4), то последнее являлось бы комбинацией остальных членов разложения (3) и (4) не было бы им ортогонально.

Чтобы выделить амплитуды перехода в состояния, содержащие три свободных комплекса, каждое из состояний рассеяния разложим по полным наборам решений уравнений типа (2) так, чтобы группы частиц $1 \dots n; n+1 \dots N$ делились на две:

$$1 \dots m, m+1 \dots n; n+1 \dots k, k+1 \dots N.$$

Далее проделываем все те же операции, что и для $l=2$. Затем выделяем амплитуды переходов в состояния с 4,5 и т. д. комплексами. Окончательно, можно записать Ψ в виде разложения

$$\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \sum_{i, \varkappa_i^\alpha} \int \prod_{\alpha=1}^{Q_i} \psi_{\varkappa_i, \vec{P}_i^\alpha}^{\rightarrow}(\vec{x}_i^{(\alpha)}) d\vec{P}_i^{(\alpha)} C_{\varkappa_i \dots \varkappa_i^{G_i}}(\vec{P}_i^{(1)} \dots \vec{P}_i^{(Q_i)}). \quad (5)$$

Здесь $\sum_{\alpha=1}^{Q_i} N_\alpha = N$, i — номер разбиения по комплексам, α — номер комплекса в разбиении. G_i — число комплексов в разбиении, для которых $N_\alpha > 1$, т. е. $G_i < Q_i$.

Чтобы получить уравнения для C , подставим выражение (5) в (1) и умножим получившееся равенство на $\prod_{\beta=1}^{Q_j} \psi_{\varkappa_j^\beta, \vec{P}_j^\beta}^* (\vec{x}_j^{(\beta)})$; интегрируя по всем \vec{x} и используя условия ортогональности для $\psi_{\varkappa_j^\beta}, \psi_{p_j}^{\rightarrow}$, получим

$$\left(E + \sum_{\alpha} \varkappa_\alpha^\beta - \sum_{\beta} (\vec{P}_j^{(\beta)})^0 \right) \sum_{k, \varkappa} \prod_{\gamma=1}^{Y_k} \psi_{\varkappa_k^\gamma} (\vec{P}_{k,j}^{(\varkappa)}) C_{\varkappa_k \dots \varkappa_k^{Z_k}}(\vec{P}_{k,j}^{(1)} \dots \vec{P}_{k,j}^{(Y_k)}) =$$

$$= \int \prod_{\beta=1}^{Q_j} d\vec{x}_j^{(\beta)} \varphi_{\kappa_j^{(\beta)}, \vec{P}_j^{(\beta)}}^* (\vec{x}_j^{(\beta)}) V_j^* (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \Psi (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N).$$

Здесь

$$V_j^* (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = V (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) - \sum_{\beta=1}^{Q_j} V^{(\beta)} (\vec{x}_{1,j}^{(\beta)} \dots \vec{x}_{N\beta}^{(\beta)}),$$

$(\vec{P}_j^{(\beta)})^0$ — энергия, соответствующая импульсу $(\vec{P}_j^{(\beta)})$.

Здесь произведено разбиение Q^j — частиц на комплексы. Однако под частицей мы понимаем здесь и комплекс с собственной энергией κ ; k — номер разбиения по комплексам, a — число комплексов в разбиении, z_k — полное число вторичных комплексов, Y_k — число комплексов в разбиении, которые являются связанными состояниями первичных комплексов. Следовательно, $z_k \leq Y_k$. Учитывая, что

$$\Psi (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = \chi_j (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) +$$

$$+ \int \prod_{\beta=1}^{Q_j} d\vec{P}_j^{(\beta)} \psi_{\kappa_j^{(\beta)}, \vec{P}_j^{(\beta)}} (\vec{x}_j^{(\beta)}) \sum_{k,\kappa} \prod_{\gamma=1}^{Y_k} \psi_{\kappa_k^\gamma} (\vec{P}_{k,j}^{(\gamma)}) C_{\kappa_k^1 \dots \kappa_k^{z_k}}^{(j)} (\vec{P}_{k,j}^{(1)} \dots \vec{P}_{k,j}^{(z_k)}),$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 \kappa_k} \left(E + \sum_{\gamma=1}^{z_k} \kappa_{k,j}^\gamma - \sum_{\gamma=1}^{Y_k} (P_{k,j}^{(\gamma)})^0 \right) \prod_{\gamma=1}^{Y_k} \psi_{\kappa_k^\gamma} (\vec{P}_{k,j}^{(\gamma)}) C_{\kappa_k^1 \dots \kappa_k^{z_k}}^{(j)} (\vec{P}_{k,j}^{(1)} \dots \vec{P}_{k,j}^{(z_k)}) = \\ = \int \prod_{\beta=1}^{Q_j} d\vec{x}_j^{(\beta)} \varphi_{\kappa_j^{(\beta)}, \vec{P}_j^{(\beta)}}^* (\vec{x}_j^{(\beta)}) V_j^* (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) \chi_j (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (7) нетрудно видеть, что величины C имеют вид

$$C_{\kappa_k^1 \dots \kappa_k^{z_k}}^{(j)} (\vec{P}_{k,j}^{(1)} \dots \vec{P}_{k,j}^{(z_k)}) = F_k^j + \frac{f_{\kappa_k^1 \dots \kappa_k^{z_k}}^{(j)} (\vec{P}_{k,j}^{(1)} \dots \vec{P}_{k,j}^{(z_k)})}{E + \sum_{\gamma=1}^{z_k} \kappa_{k,j}^\gamma - \sum_{\gamma=1}^{Y_k} (P_{k,j}^{(\gamma)})^0 \pm i\epsilon}, \quad (7)$$

где F_k^j , удовлетворяющие условию

$$F_k^j \left(E + \sum_{\gamma=1}^{z_k} \kappa_{k,j}^\gamma - \sum_{\gamma=1}^{Y_k} (P_{k,j}^{(\gamma)})^0 \right) = 0,$$

соответствуют выбору начальных условий во всех каналах, поэтому уравнения для f , получающиеся после подстановки (7) в (6), однозначны. Легко видеть, что величины f являются амплитудами перехода в состояние, построенное из z_k связанных комплексов и $Y_k - z_k$ свободных частиц.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. И. Григорьеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ekstein H. Phys. Rev., **101**, 880, 1965.
2. Gerjuoj E. Ann. Phys., **5**, 58, 1958.
3. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
4. Фаддеев Л. Д. ДАН СССР, **138**, 565, 1961.
5. Фаддеев Л. Д. ДАН СССР, **145**, 301—304, 1962.
6. Фаддеев Л. Д. «Тр. матем. ин-та им. Стеклова», **19**, 1965.
7. Weinberg S. Phys. Rev., **133**, B232, 1964.
8. Kosenberg L. Phys. Rev., **138**, B1343, 1965.

Поступила в редакцию
30. 12.1965 г.

Кафедра
электродинамики квантовой теории