При этом получаются следующие рекуррентные соотношения для унитарноскалярных факторов:

$$
\begin{aligned}
&| [f_1] (\lambda_1'\mu_1') S_1' [f_2] (\lambda_2'\mu_2') S_2' : (\lambda'\mu')_{\gamma'} | [f]_{\varepsilon'} (\lambda'\mu') S' > = \\
&= \frac{1}{N} \sum < [f_1] (\lambda_1\mu_1) S_1 [f_2] (\lambda_2\mu_2) S_2 : (\lambda\mu)_\gamma [f]_\varepsilon (\lambda\mu) S > \\
&> \left(\begin{array}{c|c} (\lambda_1\mu) (\lambda_2\mu_2) & (\lambda\mu)_\gamma \\ Y_1T_1\ Y_2T_2 & YT \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (\lambda_1'\mu_1') (\lambda_2'\mu_2') & (\lambda'\mu')_{\gamma'} \\ Y_1'T_1'\ Y_2'T_2' & Y'T' \end{array} \right) \times \\
&\times [f_1] \langle [f_1] (\lambda_1'\mu_1') S_1' [f_2] (\lambda_2'\mu_2') S_2' : Y'T'S' \| I^{(21111)}_{(11)yt1} (x_{(1)} + I^{[21111]}_{(11)yt1} (x_2) \| \times \\
&\times (\lambda_1\mu_1) S_1 [f_2] (\lambda_2\mu_2) S_2 : YTS \rangle . \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Квантовые числа $(\lambda\mu)S$, YT, $Y'T'$, yt являются фиксированными (выбираются произвольно), а по индексам $(\lambda_1\mu_1)S_1 \times (\lambda_2\mu_2)S_2$, Y_1T_1, Y_2T_2, γ производится суммирование. Матричные элементы в правой части (6) легко вычисляются с помощью алгебры тензорных операторов. Для нахождения нормировки N следует воспользоваться соотношением ортонормированности (3). Соотношение (6) позволяет найти состояния $[f](\lambda'\mu')S'$, если известны ККГ для некоторого состояния $[f](\lambda\mu)S$. Среди ККГ разложения произведения $[f_1] \times [f_2]$ на НП $[f]$ всегда есть по крайней мере один по определению равный единице (это имеет место для такого $[f]$, которое содержит базисную функцию с весом, равным сумме старших весов функций $[f_1]$ и $[f_2]$). Кроме того, проведенные нами конкретные вычисления показывают, что при учете правил отбора (5) многие другие ККГ для определенных $[f](\lambda\mu)S$ также оказываются равными единице. Поэтому, взяв такой единичный ККГ за исходный, можно получить с помощью соотношений (6) и (3) все остальные ККГ.

Проверка полученных ККГ была осуществлена путем сравнения средних значений квадратичного оператора Казимира группы U_6, вычисленных при использовании явного вида (2) функций НП $[f]$ с собственными значениями этого оператора для НП $[f]$, найденными из общих формул.

В заключение авторы приносят благодарность В. Г. Неудачину за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биленький С. М. и др. «Ядерная физика», 2, 762, 1965; Zusuki M. Nuovo cim. 38, 368, 1965; Konuma M., Remiddi E. Phys. Rev. Letts., 14, 1082, 1965.
2. Carter J. G., Meshkow S. Phys. Rev. Letts., 14, 523, 1965.
3. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф. Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по теории элементарных частиц. Ужгород, 1965.
4. Cook C. L., Murtaza G. Nuovo cim., 39, 531, 1965.
5. Swart J. J. Rev. Modd. Phys., 35, 916, 1963.
6. Кондон Е. И., Шортли Г. Н. Теория атомных спектров. М., ИЛ, 1949; Racah G. Group theory and spectroscopy, preprint CERN, 61—8, 1951.
7. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Юдин Н. П. «Ядерная физика», 2, вып. 6, 1965.

Поступила в редакцию
20. 6 1966 г.

НИИЯФ

УДК 533.9

В. В. ЛОГВИНОВ

О РЕЛАКСАЦИИ В КУЛОНОВСКОЙ КВАЗИРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

В сообщении единым методом рассмотрена релаксация направленных скоростей и температур за счет кулоновских столкновений в квазиравновесной плазме, т. е. в плазме, все компоненты которой имеют максвелловские распределения частиц по скоростям, но с различными направленными скоростями и температурами (в частности, такими компонентами могут быть пробные частицы или пучки) *.

Указанная задача в частных случаях рассматривалась многими авторами [1—6] и по существу сводится к прямому вычислению интеграла столкновений в форме Ландау, если не учитывать поляризацию плазмы. В первой половине сообщения даны результаты вычисления интегралов, характеризующих изменение импульса и энергии какой-либо компоненты a в результате столкновений частиц сорта a с частицами остальных сортов плазмы с учетом различных направленных скоростей компонентов. Эти интегралы, согласно [6], будем обозначать соответственно через $I_a\{n_a\vec{p}\}$ и $I_a\left\{n_a\frac{p^2}{2m_a}\right\}$.

Во второй половине сообщения вычислена усредненная по импульсам эффективная частота столкновений электронов $\overline{\nu_e}$, характеризующая влияние кулоновских столкновений на быстропеременные процессы в плазме при распространении в ней электромагнитных волн. Подобная задача возникает, например, в квазилинейной теории [6, 7], где $\overline{\nu}_e$ моделирует быстроменяющуюся часть интеграла столкновений (см. также [8]).

1. Рассмотрим вначале $I_a\{n_a\vec{p}\}$.

$$I_a\{n_a\vec{p}\} = n_a\int\vec{p}\sum_b 2(e_ae_b)^2 n_b\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\int\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\,\delta(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}'\vec{v}')\left\{\frac{\partial f_a}{\partial p_\beta}f_b-\frac{\partial f_b}{\partial p'_\beta}f_a\right\}d\vec{k}\,d\vec{p}'\,d\vec{p}. \quad (1)$$

Используя выражение для δ-функции

$$\delta(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{v}') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{v}')}\,d\tau$$

и максвелловские функции распределения с различными направленными скоростями

$$f_a(\vec{v}) = (\sqrt{\pi}v_a)^{-3}\exp\left\{-\frac{(\vec{v}-\vec{u}_a)^2}{v_a^2}\right\},\quad v_a^2=\frac{2T_a}{m_a},$$

получаем из (1) после интегрирования по частям

$$I_a\{n_ap_i\} = \sum_b\frac{(e_ae_b)^2 n_an_b}{\pi}\int e^{i\tau(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{v}')}\left\{\frac{v_\beta-u_{a\beta}}{T_a}-\frac{v'_\beta-u_{b\beta}}{T_b}\right\}\times$$

$$\times f_a(\vec{v})\,f_b(\vec{v}')\,d\vec{k}\,d\tau\,d\vec{v}\,d\vec{v}'.$$

Далее интегрируем последовательно по $\vec{v}'$, $\vec{v}$ и τ

$$I_a\{n_ap_i\} = -\sum_b\frac{4(e_ae_b)^2 n_an_b}{\sqrt{\pi}(v_a^2+v_b^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}\right)\times$$

$$\times\int\frac{k_i(\vec{k}\vec{u}_a-\vec{k}\vec{u}_b)}{k^5}\,e-\exp\left\{\frac{(\vec{k}\vec{u}_a-\vec{k}\vec{u}_b)^2}{k^2(v_a^2+v_b^2)}\right\}d\vec{k}.$$

При интегрировании по $\vec{k}$ перейдем к сферическим координатам, направляя ось z вдоль вектора $(\vec{u}_a-\vec{u}_b)$. При этом заметим, что

$$I_a\{n_ap_x\} = I_a(n_ap_y) = 0,\ \text{а}\ I_a\{n_ap_z\}$$

можно представить в виде

$$I_a\{n_ap_z\} = -n_am_a\sum_b\frac{u_a-u_b}{\tau_{ab}^{(u)}},$$

* Здесь мы не рассматриваем вопрос о релаксации за счет взаимодействия частиц с электромагнитными волнами, которые могут возбуждаться в плазме, если направленные скорости компонент различны.

где

$$\tau_{ab}^{(u)} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{m_a m_b}{(e_a e_b)^2 n_b L} \left(\frac{T_a}{m_a} + \frac{T_b}{m_b}\right)^{3/2} \frac{m_a}{m_a + m_b} \left[\int_0^1 t^2 e^{-p^2 t^2} dt\right]^{-1} \qquad (2)$$

обозначает время релаксации направленных скоростей при столкновениях заряженных частиц сорта a с частицами сорта b,

$$L = \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \text{ кулоновский логарифм, } k_{\max} = \frac{T_{ab}}{|e_a e_b|},\ k_{\min} \simeq r_D^{-1},$$

$$p^2 = \frac{(u_a - u_b)^2}{(v_a^2 + v_b^2)}.$$

Интеграл, входящий в $\tau_{ab}^{(u)}$, выражается через интеграл ошибок и в различных предельных случаях равен:

$$\int_0^1 t^2 e^{-p^2 t^2} dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2p^3}\Phi(p) - pe^{-p^2}\right\} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & p \ll 1 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{4p^3}, & p \gg 1 \end{cases}. \qquad (3)$$

В частности, из (2) и (3) при $p \gg 1$ можно получить времена релаксации скорости пробных частиц в плазме, совпадающие с вычисленными в работе [5].

Аналогичным образом вычисляется $I_a\left\{n_a \dfrac{p^2}{2m_a}\right\}$. После интегрирования по $\vec{v}'\vec{v}$ и τ имеем:

$$I_a\left\{n_a \frac{p^2}{2m_a}\right\} = -\sum_b \frac{4(e_a e_b)^2 n_a n_b}{\sqrt{\pi}(v_a^2 + v_b^2)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{k^5}\left\{\frac{k^2}{m_a m_b}(T_a - T_b) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right) \frac{\vec{k}\vec{u}_a - \vec{k}\vec{u}_b}{v_a^2 + v_b^2} (\vec{k}\vec{u}_a v_b^2 + \vec{k}\vec{u}_b v_a^2)\right\} e^{-\frac{(\vec{k}\vec{u}_a - \vec{k}\vec{u}_b)^2}{k^2(v_a^2 + v_b^2)}}. \qquad (4)$$

Полагая для простоты, что направленные скорости компонентов параллельны, и интегрируя (4) в сферических координатах, получаем

$$I_a\left\{n_a \frac{p^2}{2m_a}\right\} = -n_a \sum_b \left\{\frac{3}{2} \frac{T_a - T_b}{\tau_{ab}^{(T)}} + m_a \frac{(u_a - u_b)(u_a v_b^2 + u_b v_a^2)}{\tau_{ab}^{(u)}(v_a^2 + v_b^2)}\right\},$$

где

$$\tau_{ab}^{(T)} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{m_a m_b}{(e_a e_b)^2 n_b L} \left(\frac{T_a}{m_a} + \frac{T_b}{m_b}\right)^{3/2} \left[\int_0^1 e^{-p^2 t^2} dt\right]^{-1}$$

время релаксации температур при столкновениях заряженных частиц сорта a с частицами сорта b. В предельных случаях

$$\int_0^1 e^{-p^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\Phi(p) \approx \begin{cases} 1, & p \ll 1 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2p}, & p \gg 1. \end{cases}$$

В частности, в электрон-ионной плазме ($m \ll M$ и обычно $v_e^2 \gg v_i^2$) при $p \ll 1$ получаем известное выражение для $\tau_{ei}^{(T)}$, вычисленное впервые еще Ландау [1]. Отметим также, что при $p \ll 1$, $\dfrac{\tau_{ei}^{(u)}}{\tau_{ei}^{(T)}} = \dfrac{2m}{M}$, т. е. при столкновениях электронов с ионами, релаксация скоростей происходит значительно быстрее, чем температур.

2. Обратное время релаксации быстроменяющейся части функции распределения f_a^1 определяется, согласно [6], через быстроменяющуюся часть интеграла столкновений $\nu_a(\vec{v}) = -\frac{S_a^1}{f_a^1}$, и является функцией скорости. В уравнениях квазилинейного приближения в случае, когда пространственная дисперсия несущественна, мы можем использовать эффективную, усредненную по импульсам $\bar{\nu}_a$, которую определим через $\nu_a(\vec{v})$ из выражения для плотности тока

$$\bar{\nu}_a = -\frac{m_a}{|E|^2}\int(\vec{E}\vec{v})\left(\vec{E}\frac{\partial f_a^{\circ}}{\partial\vec{p}}\right)\nu_a(\vec{v})\,d\vec{p} = \frac{im_a\omega}{e_a|E|^2}\int(\vec{E}\vec{v})\,S_a^1 d\vec{p}, \tag{5}$$

где f_a° — медленно меняющаяся часть функции распределения, $\vec{E}$ — переменное электрическое поле в плазме и $S_a^1 = S_a^1(\omega, \vec{E}, f_a^{\circ}, f_b^{\circ})$.

Вычислим $\bar{\nu}_e$ для электрон-ионных корреляций, считая f_e° и f_i° — максвелловскими при $T_e \neq T_i$, $u_i = 0$, $u_e \neq 0$. Используя выражение для S_e^1, полученное в [6], и интегрируя (5) по частям, получаем

$$\bar{\nu}_e = i\,\frac{2}{3\pi}\,\frac{(ee_i)^2 n_i\omega}{m}\int\frac{d\vec{k}}{k^2}\left\{\frac{\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{u}_e}{T_e} - \frac{\vec{k}\vec{v}^1}{T_i}\right\}\frac{f_e^{\circ}(\vec{v})\,f_i^{\circ}(\vec{v}')\,d\vec{v}d\vec{v}'}{(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{v}')\,[\omega^2-(\vec{k}\vec{v}-\vec{k}\vec{v}')^2]},$$

а после интегрирования по $\vec{v}'$ и $\vec{v}$, пренебрегая членами порядка $\frac{m}{M}$

$$\bar{\nu}_e = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{(ee_i)^2 n_i}{\omega m^2\,(v_e^2+v_i^2)^{3/2}}\int\frac{d\vec{k}}{k^3}\left\{(\omega+\vec{k}\vec{u}_e)\,w\left(\frac{\omega+\vec{k}\vec{u}_e}{k\sqrt{v_e^2+v_i^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+(\omega-\vec{k}\vec{u}_e)\,w\left(\frac{\omega-\vec{k}\vec{u}_e}{k\sqrt{v_e^2+v_i^2}}\right) - 2(\vec{k}\vec{u}_e)\,w\left(\frac{\vec{k}\vec{u}_e}{k\sqrt{v_e^2+v_i^2}}\right)\right\}, \tag{6}$$

где w — комплексный интеграл ошибок [9].

При интегрировании по k рассмотрим два случая:

а) $u_e = 0$, $v_e^2 \gg v_i^2$. Переходя к сферическим координатам, из (6) имеем

$$\bar{\nu}_e = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\,\frac{(ee_i)^2 n_i}{\sqrt{m}\,T_e^{3/2}}\int\limits_{k_{\min}}^{k_{\max}}\frac{1}{k}\,w\left(\frac{\omega}{kv_e}\right)dk.$$

В области частот $\omega \ll \omega_e$ (ω_e — электронная ленгмюровская частота) мы можем использовать разложение $w\left(\frac{\omega}{k_{\min}v_e}\right)$ в ряд при малых значениях аргумента. В результате получаем выражение

$$Re\,\bar{\nu}_e = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\,\frac{(ee_i)^2 n_i}{\sqrt{m}\,T_e^{3/2}},$$

точно совпадающее с эффективной частотой столкновений электронов с ионами (полученное другим способом в [8]).

б) Если направленная скорость электронов велика ($u_e \gg v_i$, v_e), то для частот $w \simeq \omega_e$ имеем $\omega \ll k_{\text{мин}} u_e$ и соответствующее обратное время релаксации

$$\bar{\nu}_e = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{(ee_i)^2 n_i}{\omega m^2\,(v_e^2+v_i^2)^{3/2}}\int\frac{d\vec{k}}{k^3}\,(\omega-\vec{k}u_e)\,e^{-\frac{(\vec{k}\vec{u}_e)^2}{k^2(v_e^2+v_i^2)}}$$

При переходе к сферическим координатам по $\vec{k}$ (с осью z вдоль $\vec{u}_e$) нетрудно показать, что второй член в круглых скобках в подынтегральном выражении, содержащий $(\vec{k}\vec{u}_e)$, дает нулевой вклад, так, что, учитывая асимптотическое разложение интеграла ошибок, окончательно получаем

$$\bar{\nu}_e = \frac{8\pi}{3} \frac{(ee_i)^2 n_i L}{m^2 u_e (v_e^2 + v_i^2)}.$$

В заключение автор благодарит Ю. Л. Климонтовича за предложенную тему и направляющие указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **7**, 103, 1937.
2. Spitzer L., Notices M. Roy. Astron. Soc., **100**, 396, 1940.
3. Коган В. И. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958.
4. Трубников Б. А. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Атомиздат, 1963.
5. Сивухин Д. В. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
6. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд-во МГУ, 1964. (См. также Дополнение к английскому изданию.)
7. Климонтович Ю. Л., Логвинов В. В. «Прикладная механика и техническая физика» (в печати).
8. Силин В. П. ЖЭТФ, **41**, 861, 1961.
9. Фаддева В. Н., Терентьев Н. М. Таблица значений интеграла вероятности. М., Гостехиздат, 1954.

Поступила в редакцию
25. 7 1966 г.

Кафедра
общей физики для мехмата

УДК 621.374.387

Ю. В. МИНЕЕВ, И. Д. РАПОПОРТ

АНАЛОГОВО-ЦИФРОВОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ НА КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Описывается устройство преобразования постоянного напряжения в диапазоне от 3 *мв* до 3 *в* с помощью колебательного контура. Постоянное напряжение сначала преобразуется в импульс напряжения в отличие от работы [1] с помощью схемы линейного пропускателя. Импульс напряжения с выхода линейного пропускателя возбуждает колебательный контур LC, настраиваемый в «резонанс» с импульсом управления линейного пропускателя. Колебания контура усиливаются, ограничиваются и поступают на схему амплитудного дискриминатора. На выходе амплитудного дискриминатора получаем пакет унифицированных импульсов, число которых пропорционально логарифму постоянного напряжения на входе схемы. Число импульсов с выхода амплитудного дискриминатора

$N = \frac{1}{\pi d} \ln \frac{u}{u_{пор}}$ подсчитывается счетной схемой. Здесь d — затухание контура, u — амплитуда напряжения на входе, $u_{пор}$ — порог срабатывания дискриминатора.

Колебательный контур, осуществляющий логарифмическое преобразование, настраивается на частоту $f = \frac{1}{\tau}$, где τ — длительность возбуждающего импульса. В работе [2] указывалось, что при такой настройке изменение длительности управляющих импульсов от генератора импульсов на 20% вызывает изменение амплитуды колебаний всего на 2%, что позволяет не прибегать к специальной стабилизации частоты собственных колебаний контура.

Диапазон регистрируемых напряжений ограничивается в первую очередь динамическим диапазоном линейного пропускающего устройства. Наличие двух каскадов